Idraulica e Idrologia: Lezione 14
Agenda del giorno

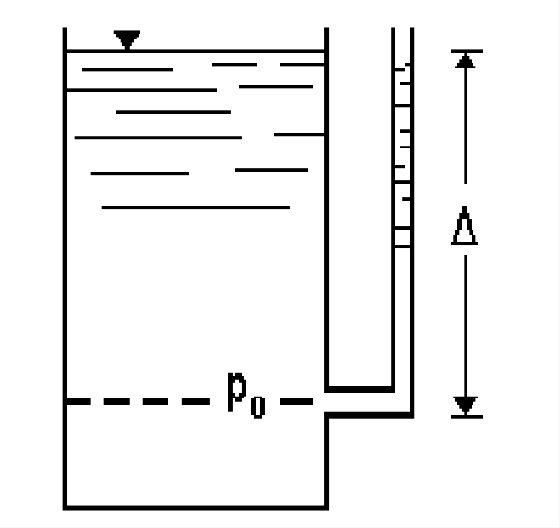
- Misure di pressione: manometri e barometri
- Capillarità
- Cinematica dei fluidi: tubo di flusso
- Equazione di continuità
- Conservazione dell’energia: Teorema di Bernoulli

Misure piezometriche (ovvero: di pressione) - 1

Servono a calcolare la pressione in un punto (o in un piano) *generico* di un liquido in quiete o in moto. La conoscenza della pressione in seno a un liquido permetterà, come vedremo in seguito, di determinarne lo stato di quiete o di moto, nonché di determinare certe grandezze relative al moto stesso.

MANOMETRI

Gli apparecchi atti alla misura della pressione si chiamano manometri. Il tipo più semplice di manometro è quello a superficie libera, che si basa sul noto principio dei vasi comunicanti.
Per questo, inserendo un tubo con un tronco verticale di opportuna lunghezza nella parete di un recipiente contenente un determinato liquido in quiete, tale liquido riempirà il tubo sino a che la superficie libera in esso raggiungerà la quota della superficie libera nel recipiente. Occorre naturalmente che il tubo, in funzione del tipo di liquido contenuto nel recipiente, sia di diametro sufficiente affinché non intervengano effetti secondari di capillarità (se acqua: diametro > 2 cm).



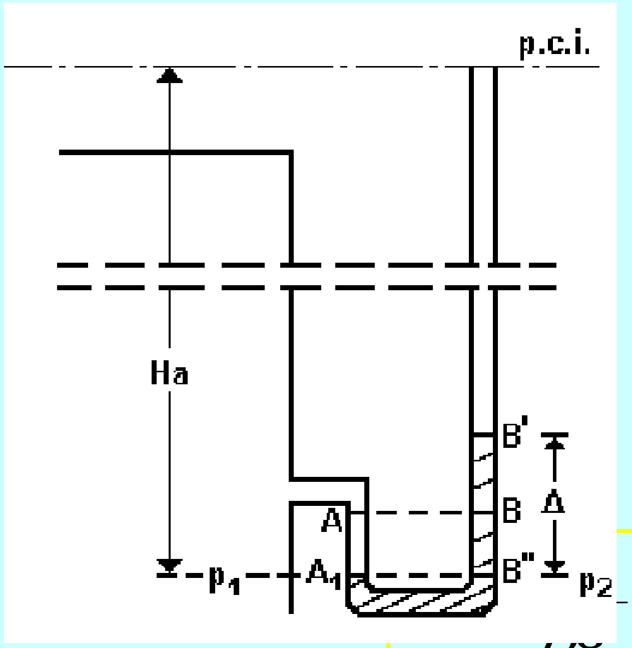
$$p_0 = \gamma_{acqua} \cdot \Delta$$

Misure piezometriche (ovvero: di pressione) - 2

MANOMETRI

Onde evitare, in presenza di notevoli pressioni, una eccessiva escursione del menisco nel tubo del manometro e quindi installazioni ingombranti o viceversa per piccole pressioni, escursioni valutabili con difficoltà, si ricorre a liquidi manometrici, rispettivamente di peso specifico maggiore o minore di quello del liquido in esame.

Nelle misure comuni per l'acqua si usa il manometro a mercurio. Esso è costituito da un tubo ad *U* contenente nella sua parte a gomito un quantitativo opportuno di mercurio (vedi figura). Quando il manometro non è connesso, i due menischi si trovano nelle due posizioni A e B sullo stesso piano. Se esso viene inserito, essendoci nel primo tronco una pressione maggiore che nel secondo, il menisco A si deprime e passa in A' e B si innalza e passa in B'. La pressione si misura dalla differenza di quota tra i due menischi, proprio considerando che in seno al mercurio la superficie orizzontale passata per A' e B" risulta isobarica.



Misure piezometriche (ovvero: di pressione) - 3

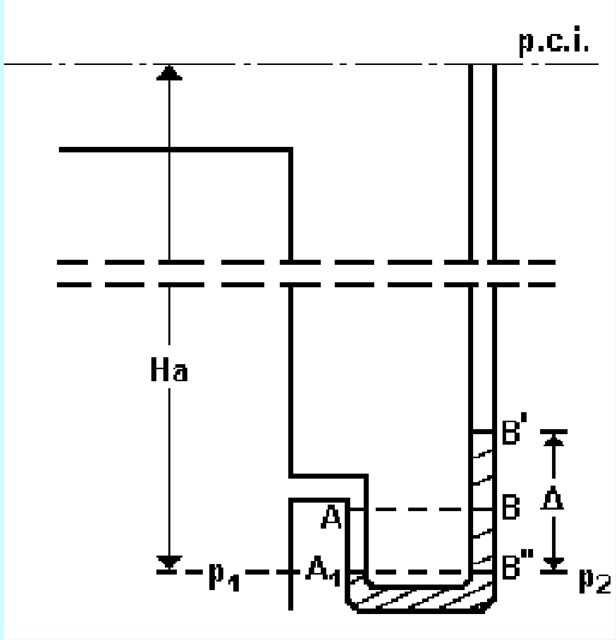
MANOMETRI a mercurio
Chiamate con $p1$ e $p2$ le pressioni in corrispondenza di due punti A' e B" e con p0 quella in corrispondenza del baricentro 0 della sezione di attacco si ha:

$p1 = p2$. Dato che Δ non è altro che l'affondamento sotto il piano dei carichi idrostatici e $\gamma_{mercurio}$ il peso specifico del mercurio, si ricava: $p1=p2 = \Delta\gamma_{mercurio}$.
Considerando che il tronco al di sopra del menisco del mercurio della posizione A' è riempito dall'acqua e nella sezione a contatto dei due liquidi si ha la stessa pressione, si ricava:

$$p1 = \gamma_{acqua} H_a = p2$$

Pertanto

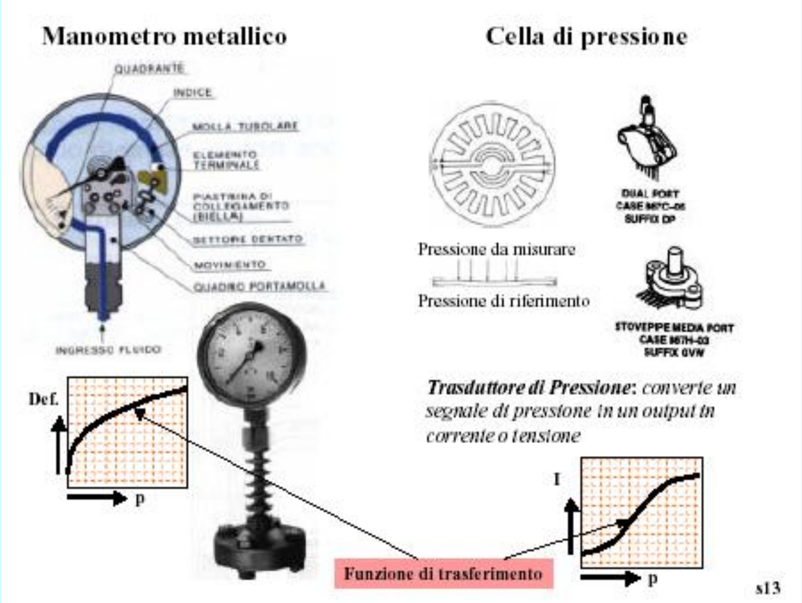
$$H_a = \frac{p_1}{\gamma_{acqua}} = \frac{p_2}{\gamma_{acqua}} = \frac{\Delta\gamma_{mercurio}}{\gamma_{acqua}}$$



p.c.i.= piano dei carichi idrostatici,
Ovvero quota che verrebbe raggiunta dall'acqua se si utilizzasse un manometro ad acqua.

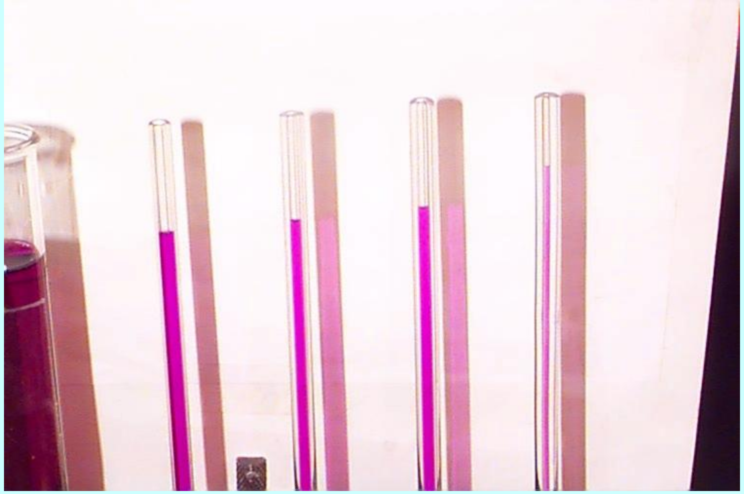
Altri strumenti per misurare la pressione

MANOMETRO PIEZOELETTRICO.
Il rivelatore di pressione è costituito da sostanze solide cristalline che hanno la proprietà di caricarsi quando sottoposte a pressione. Le cariche prodotte a loro volta generano una differenza di potenziale che si può amplificare e misurare. La differenza di potenziale è proporzionale alle sovrapressioni applicate, per cui una volta tarato lo strumento per confronto esso misura direttamente le sovrapressioni.
Il vantaggio dei manometri piezoelettrici è la piccolissima inerzia del materiale rivelatore, cioè alla facilità con la quale possono essere seguite variazioni rapide di pressione.

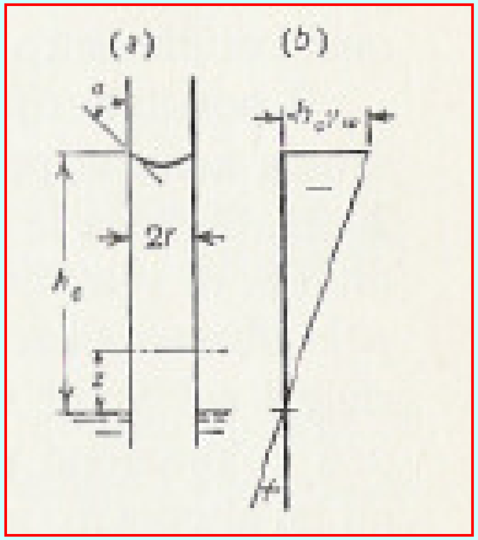


Capillarità - 1

Il fenomeno dell'ascesa capillare, molto importante p.es. nell'idraulica dei terreni insaturi, può essere evidenziato immergendo in acqua l'estremità inferiore di un tubo capillare (molto sottile) di vetro. L'attrazione fra le molecole d'acqua e di vetro combinata con la tensione superficiale dell'acqua medesima spinge quest'ultima fino ad un'altezza h_c al di sopra del pelo libero (fig. a), noto come *altezza capillare*. La superficie dell'acqua nel tubo assume la forma di una coppa, detta *menisco*, che forma con la parete del tubo stesso un angolo *a* detto *angolo di contatto*.

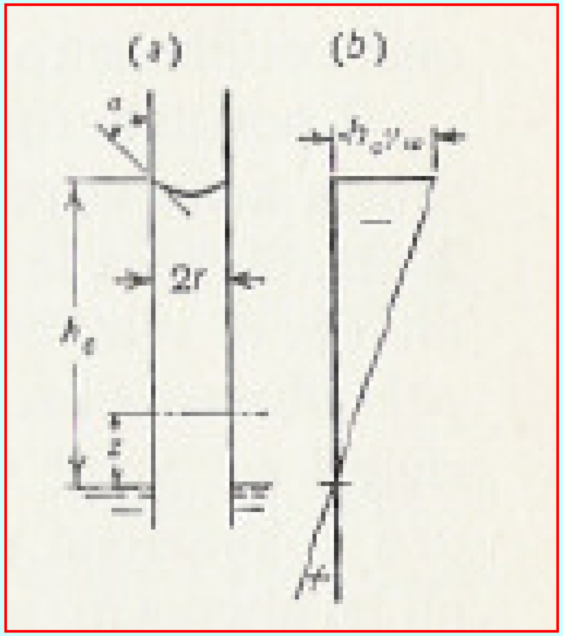


In questi tubi di diametro diverso si ha risalita capillare, segnalata dal colore del fluido, in funzione del diametro.



Capillarità - 2

La descrizione del fenomeno può essere ottenuta come segue.
Se T_s è la tensione superficiale dell'acqua,
r il raggio del capillare, e γ_w il peso specifico dell'acqua,
la condizione di equilibrio si esprime come
(forza di trazione=forza peso acqua):



$$h_c \pi r^2 \gamma_w = 2\pi r T_s \cos\alpha$$

$$\Rightarrow h_c = \frac{2T_s}{r\ \gamma_w} \cos\alpha$$

Al di sopra del pelo libero la pressione idrostatica dell'acqua è negativa e, alla quota z, pari a: $-z\gamma_w$

Capillarità - 2

La relazione predente può essere sintetizzata, per una certa combinazione di liquido e parete di contatto, come

$h\,d = \text{cost}$

La relazione indica che i fenomeni di capillarità sono trascurabili al crescere del diametro d.
La capillarità è particolarmente importante nelle applicazioni di interesse in quanto il moto dell'acqua nel terreno non saturo è regolato dalle forze capillari.
In particolare, per le falde freatiche, i fenomeni di risalita capillare possono essere consistenti influenzando fortemente i quantitativi di acqua a disposizione delle colture.

Cinematica dei fluidi

L'idrodinamica si occupa dello studio del moto dei fluidi e, relativamente al nostro corso, del moto dell'acqua.

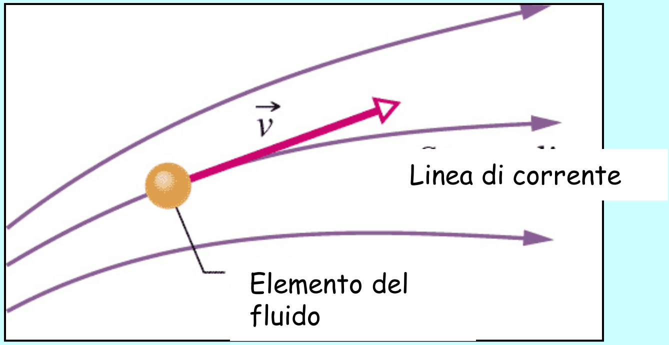
Qualche definizione:

Si distinguono tre tipi di campi di moto:

-**uniforme**: la velocità dei punti del campo di moto è costante nello spazio e nel tempo;
-**permanente**: le velocità è costante nel tempo, variabile nello spazio;
- **vario**: la velocità varia nel tempo e nello spazio

La visualizzazione dell'andamento delle velocità viene abitualmente risolta con riferimento al concetto di **linea di flusso** (o di **corrente**). Si tratta di linee che, per un dato istante, sono tangenti in ogni punto al vettore velocità. **Nel caso di moto permanente, il concetto di traiettoria e di linea di corrente coincidono**.

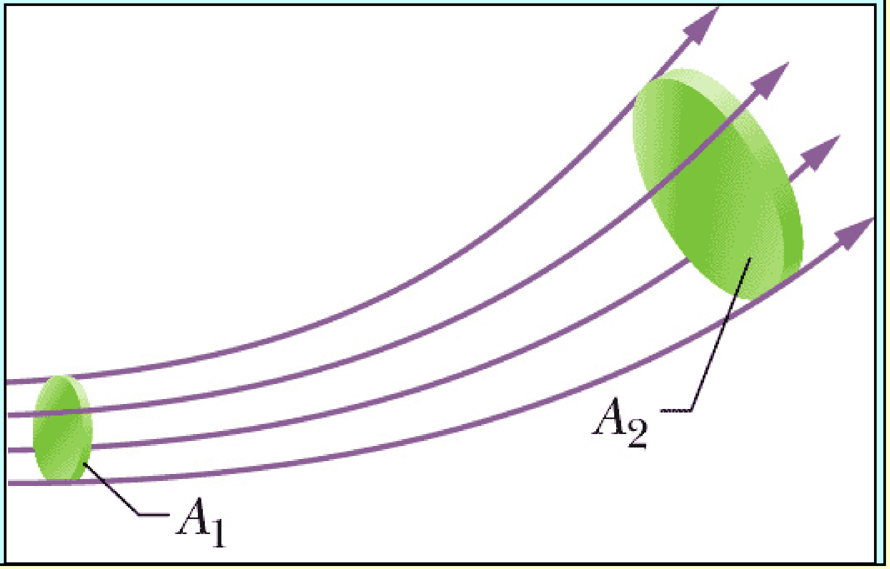
Tratteremo in questa fase solo di fluidi perfetti, ovvero di fluidi il cui comportamento non è influenzato dalle forze viscose (che generano quindi perdite di energia)



Tubo di flusso e portata

Se nel campo di moto prendiamo una linea chiusa (come il perimetro di A_1) e consieriamo tutte le linee di flusso che vi passano, evidenziamo un involucro ideale che viene chiamato **tubo di flusso**. La sua caratteristica è quella di non essere attraversato da fluido in movimento.
In particolare, se si prende in considerazione una condotta, la superficie della massa liquida che lambisce la superficie interna di quella risulta un tubo di flusso, proprio perché le velocità risultano necessariamente tangenti ad essa.

Al concetto di tubo di flusso è associato quello di portata, ovvero il volume d'acqua che nell'unità di tempo transita attraverso la sezione del tubo di flusso.



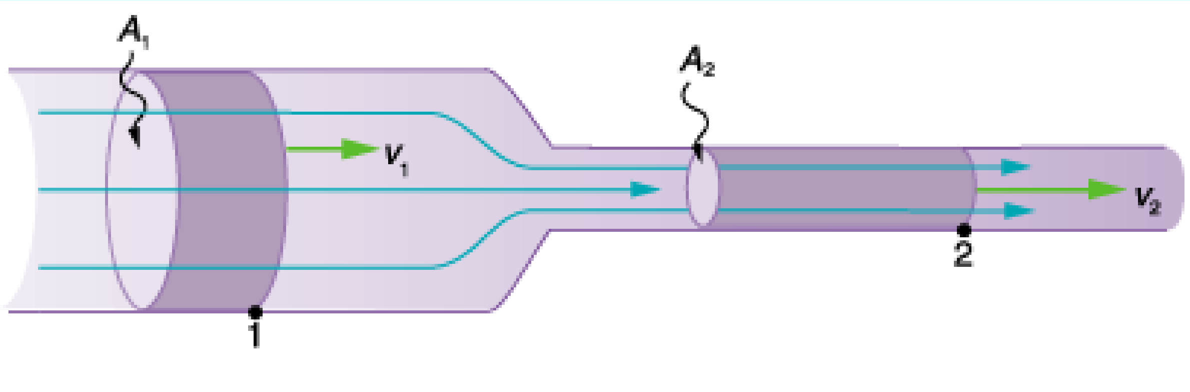
Equazione di continuità - 1

Il tubo rappresentato in figura materializza un tubo di flusso.
Sulla base del concetto di continuità della massa nei liquidi incomprimibili (acqua), ed in riferimento ad un campo di moto permamente, si ha necessariamente (vedi figura) che tutta l'acqua compresa tra le due sezioni trasversali di area A1 ed A2 deve passare attraverso di esse e solo attraverso di esse, per la menzionata proprietà del tubo di flusso.
Si ha allora:

$$Q = const$$

$$\Rightarrow v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1}$$



Equazione di continuità - 2

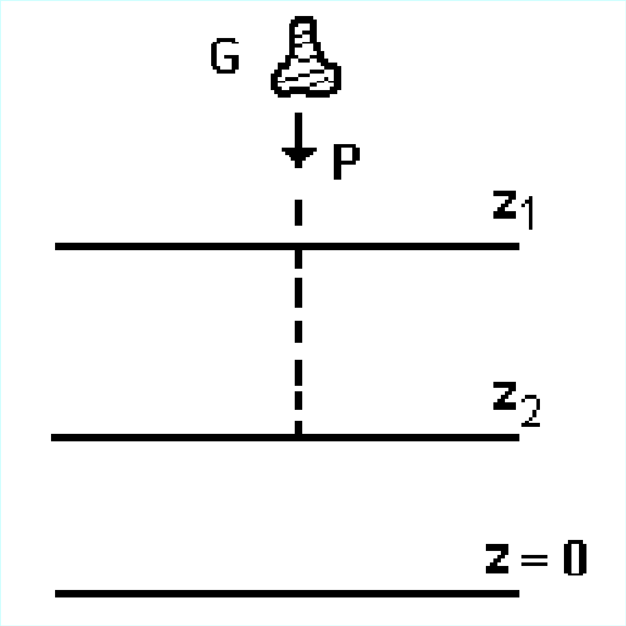
Velocità media

Con riferimento alla costanza della portata, considerando una sezione del tubo di flusso, potremo introdurre un'altra caratteristica molto indicativa: la **velocità media**. Questa viene definita come quella grandezza che moltiplicata per l'area della sezione considerata misura la portata del tubo di flusso.

I valori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ riportati in precedenza sono pertanto da considerarsi come velocità media del fluido in corrispondenza delle sezioni A_1 ed A_2.

Memoranda: Il teorema delle forze vive - 1

Tramite questo teorema si giunge a dimostrare l'equivalenza quantitativa tra lavoro ed energia.
L'enunciato è il seguente: "La variazione di energia cinetica di un corpo eguaglia il lavoro compiuto dalle forze esterne ad esso applicate".
Per la dimostrazione si fa ricorso al consueto esempio del moto di un grave *G* che cade liberamente per effetto delle forze esterne ad esso applicate, cioè la forza peso ***p*** (Figura).



Memoranda: Il teorema delle forze vive - 2

Nell'istante t_1 il corpo transita alla quota z_1 con velocità v_1 e sarà in possesso dell'energia cinetica

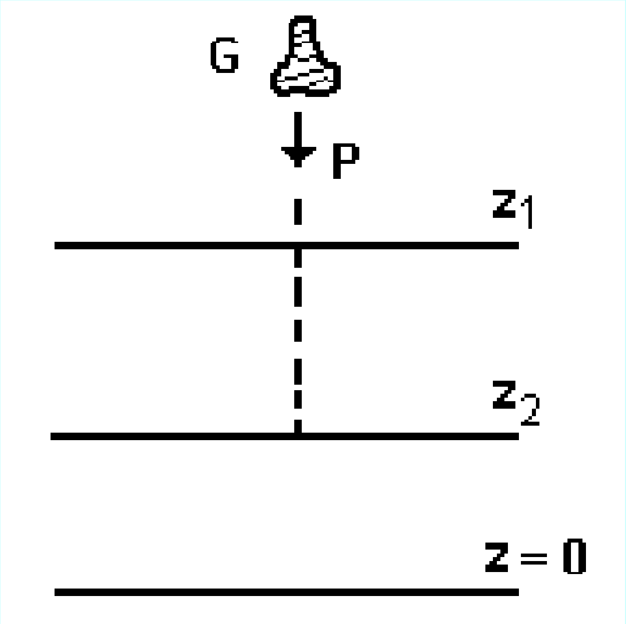
$$E = \frac{1}{2} m v_1^{\,2}$$

Nel successivo istante t_2 transita alla quota z_2 con velocità v_2 sarà in possesso dell'energia cinetica

$$E = \frac{1}{2} m v_2^{\,2}$$

Nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, indicando con v_m la velocità media in questo intervallo, il grave avrà
percorso la distanza:

$$\Delta s = v_m \Delta t$$

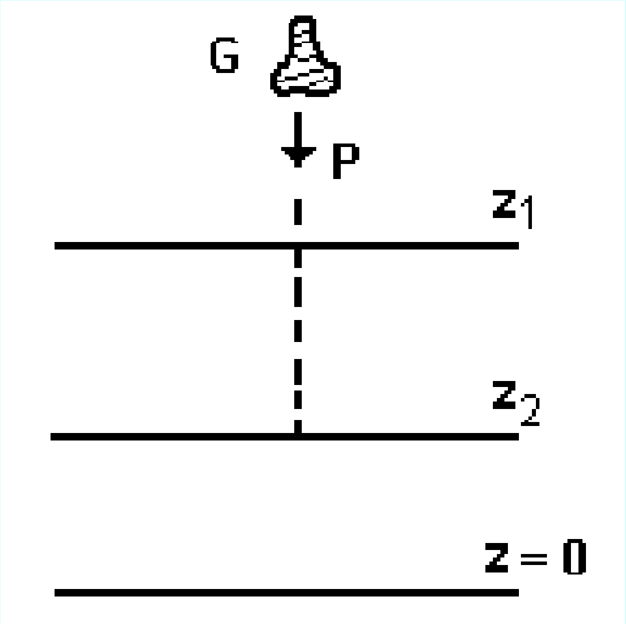


Memoranda: Il teorema delle forze vive - 3

Valutando v_m come media fra v_1 e v_2, si ha:

$$v_m = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

Il lavoro sviluppato dalla forza peso è pari a:



$$L = F\Delta s = m\frac{\Delta v}{\Delta t} v_m \Delta t$$

$$dove$$

$$F = m\frac{\Delta v}{\Delta t}\ e$$

$$\Delta s = v_m \Delta t$$

Memoranda: Il teorema delle forze vive - 4

Valutando Δv come differenza fra v_1 e v_2, si ha:

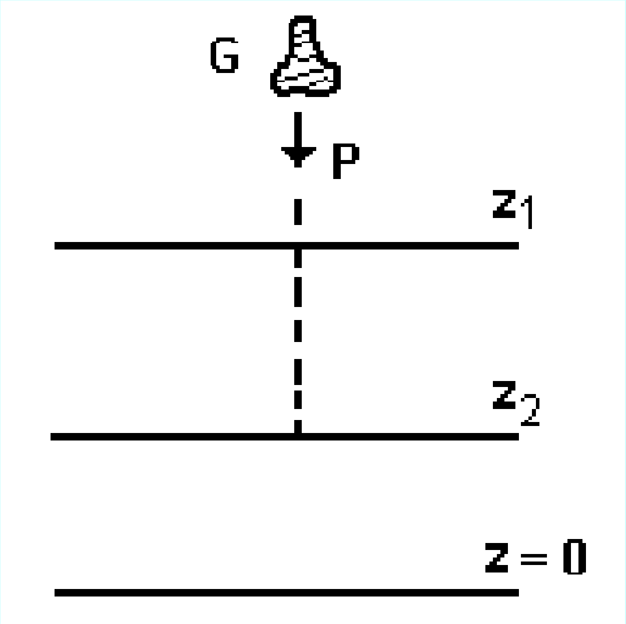
$$\Delta v = v_2 - v_1$$

Si ha quindi che il lavoro può essere espresso come:

$$L = m\left(v_2 - v_1\right)\frac{1}{2}\left(v_2 + v_1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(v_2^{\,2} - v_1^{\,2}\right) = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2}$$

L'espressione ottenuta conferma pertanto che il lavoro compiuto dalle forze esterne eguaglia la differenza di energia cinetica.



Equazione di conservazione dell'energia
Teorema di Bernoulli

Daniel Bernoulli (Groningen, 1700 – Basilea, 1782).
Matematico olandese, visse per lungo tempo a Basilea, in Svizzera. Si occupò di idrodinamica - lavorò con Eulero alle equazioni che da quest'ultimo presero nome ed enunciò il teorema circa la conservazione dell'energia in un tubo di flusso per un fluido perfetto in moto permanente.
Figlio di Jahann Bernoulli e nipote di Jakob Bernoulli, entrambi noti fisisci e matematici dell'eopca.

Equazione di conservazione dell’energia
Teorema di Bernoulli - 1

Per un tubo di flusso il teorema di Bernoulli può considerarsi una delle tante forme che assume il principio di conservazione dell'energia.
In sostanza il teorema di Bernoulli descrive la trasformazione tra energia potenziale, di pressione ed energia cinetica, e, ha luogo in un fluido in movimento.

Ricaviamo l'espressione analitica di questo teorema nel caso di un liquido perfetto in moto permanente.

Equazione di conservazione dell'energia
Teorema di Bernoulli - 2

Prendiamo in esame il tubo di flusso della figura e applichiamo al fluido, compreso tra le due sezioni trasversali (1) e (2), il teorema delle forze vive.
Con riferimento alla figura, le forze esterne applicate al fluido contenuto nella sezione di tubo sono: i) le forze di pressione e ii) la forza peso.
Le forze dovute alla pressioni p1 e p2 applicate agli estremi del condotto sono:

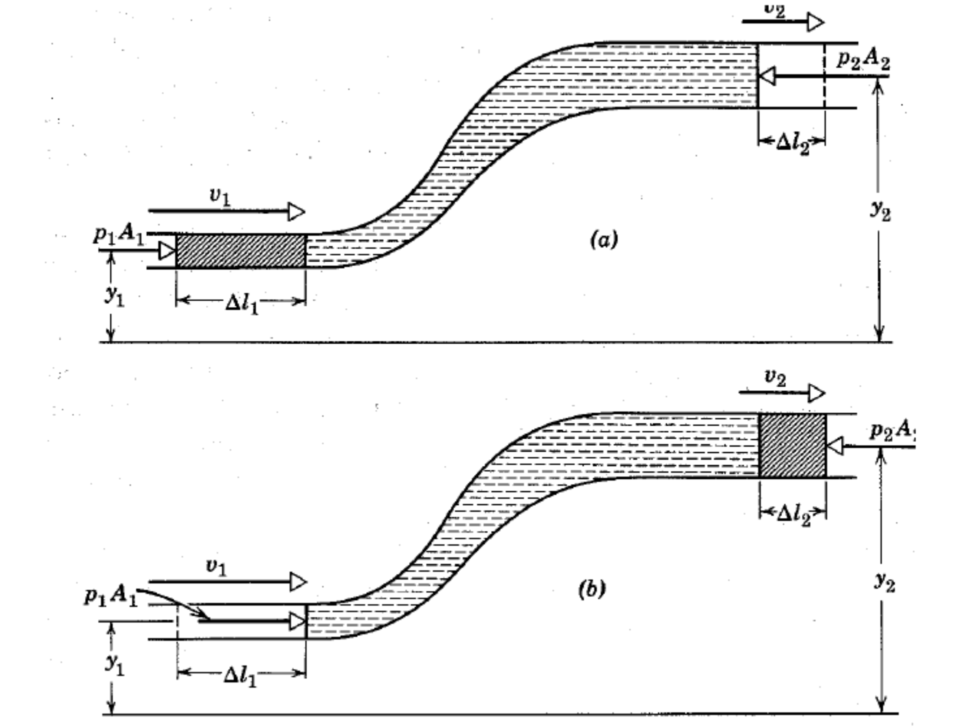
$$F_1 = p_1 A_1 \quad F_2 = p_2 A_2$$

Il lavoro meccanico W fatto da queste forze nello spostare un volume V di fluido e'

$$F_1 = p_1 A_1 \quad F_2 = p_2 A_2$$

$$lavoro \Rightarrow L$$

$$W = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2$$



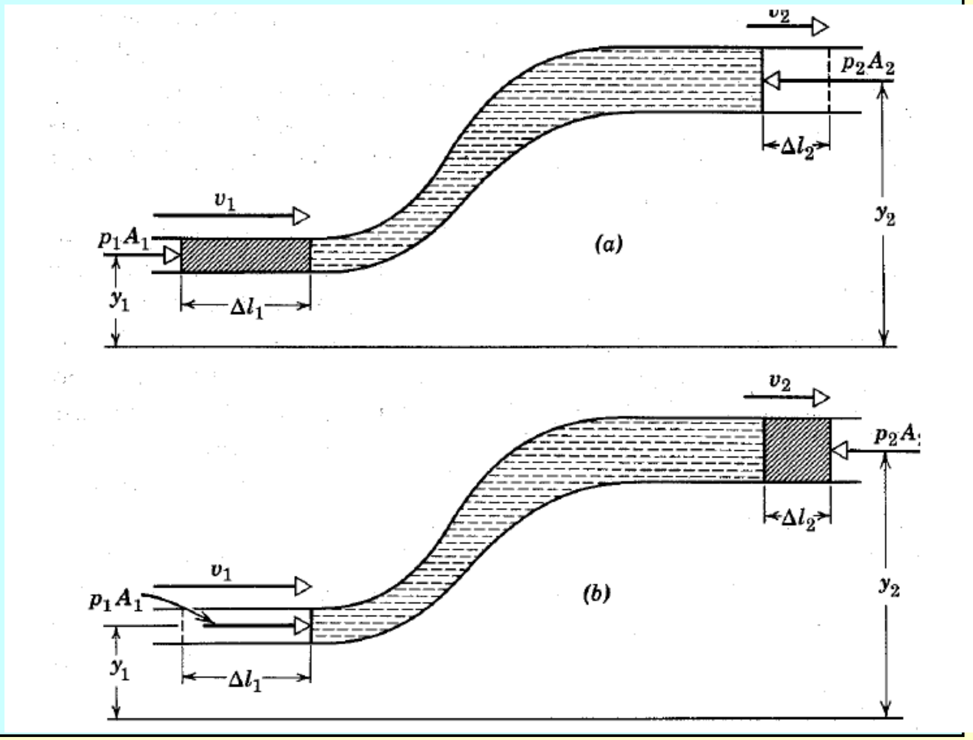
Equazione di conservazione dell'energia
Teorema di Bernoulli - 3

Il lavoro sviluppato dalla forza peso nello spostare il volume di liquido tra i livelli y1 e y2 si calcola nel modo seguente (m=massa; g= acc gravità)

$$W_g = -mg(y_2 - y_1)$$

Il lavoro totale Wt sviluppato dalle forze esterne è quindi pari a:

$$W_t = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 - mg(y_2 - y_1)$$



Equazione di conservazione dell'energia
Teorema di Bernoulli - 4

Per il principio di conservazione dell'energia, possiamo ora scrivere che:

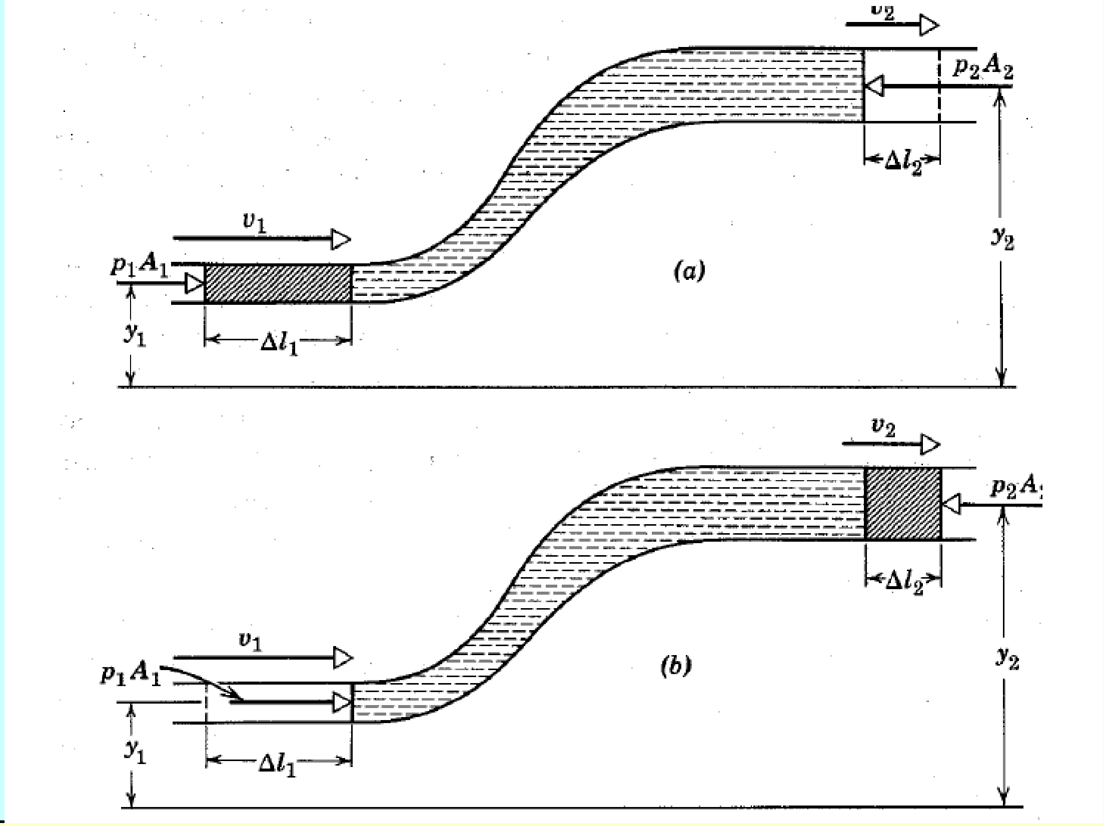
$$W_t = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

E pertanto:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = p_1A_1\Delta l_1 - p_2A_2\Delta l_2 - mg(y_2 - y_1)$$

Per la conservazione della massa:

$$m = \rho A_1\Delta l_1 = \rho A_2\Delta l_2$$



Equazione di conservazione dell'energia
Teorema di Bernoulli - 5

Sostituendo ed ordinando, si ha:

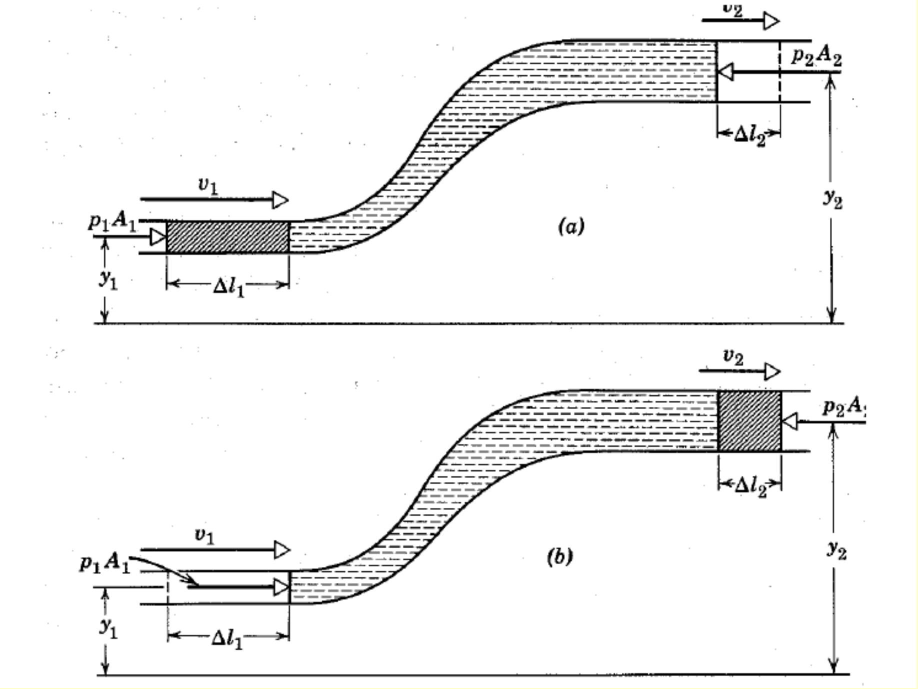
$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

E quindi:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = const$$

$$\frac{p}{\gamma} + y + \frac{v^2}{2g} = const$$

Il teorema di Bernoulli esprime quindi la costanza, lungo un tubo di flusso, del trinomio composto dalla quota geometrica, dal termine di pressione, e dal termine di energia cinetica.



Equazione di conservazione dell'energia
Teorema di Bernoulli - 6

Enunciato:

In un moto di un fluido perfetto incomprimibile a regime permanente, la somma delle energie di pressione, potenziale e cinetica è costante lungo una linea di corrente.

Teorema di Bernoulli: interpretazione geometrica - 1

Il teorema di Bernoulli, come ricavato per un tubo di flusso, è valido, per moto permanente, anche per una traiettoria.

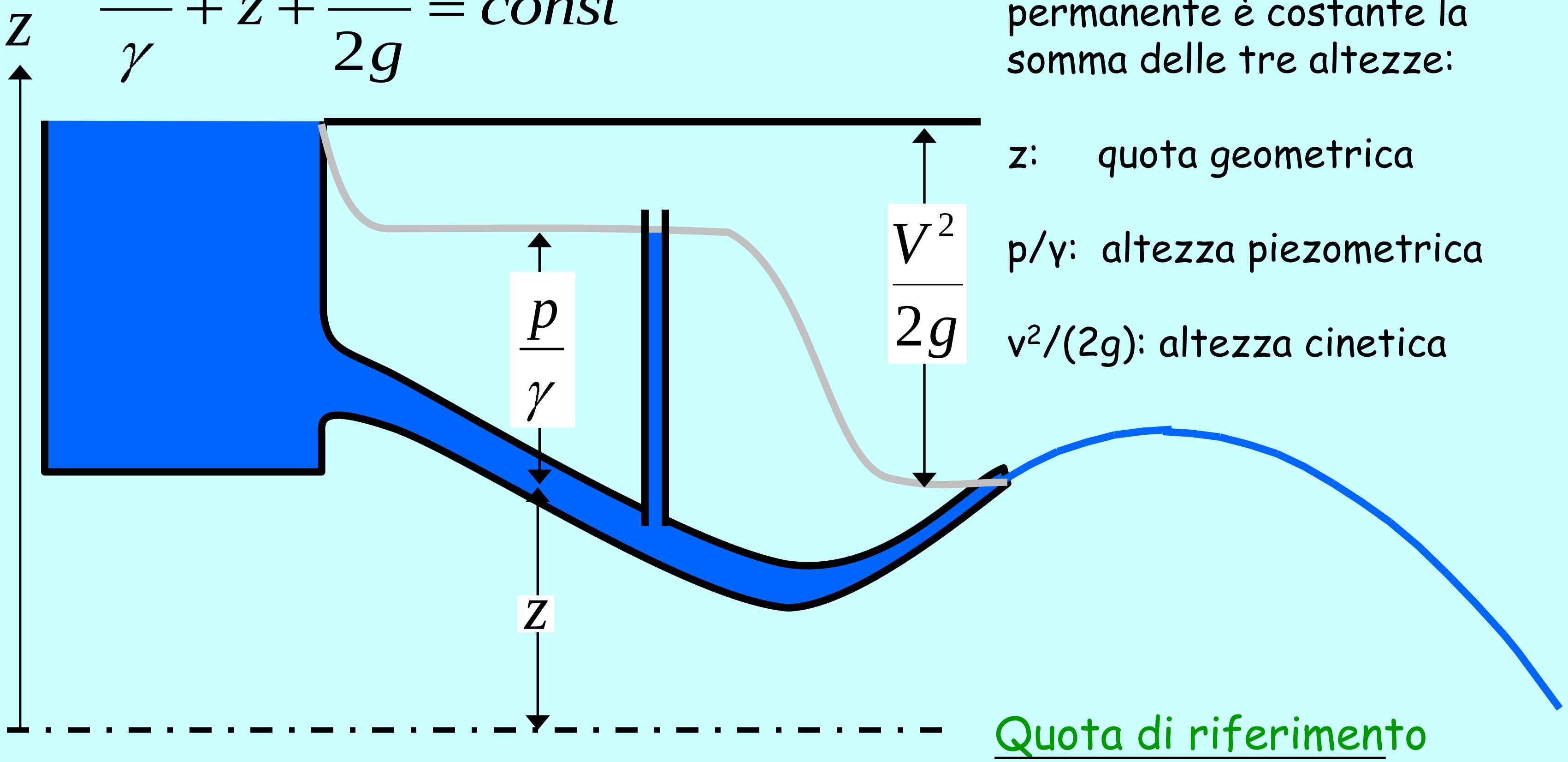
$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = const$$

Quindi, lungo la traiettoria di un fluido perfetto in moto permanente è costante la somma delle tre altezze:

z: quota geometrica

p/γ: altezza piezometrica

$v^2/(2g)$: altezza cinetica



Teorema di Bernoulli: interpretazione geometrica - 2

Qui l'acqua è in quiete, quindi il termine di energia cinetica è nullo.
Const=pressione + quota

Lungo il tubo in uscita dal recipiente la sezione è costante, quindi la velocità (diversa da zero) è costante.
Const= altezza cinetica+ +pressione + quota

Sull'ugello all'uscita dal tubo la pressione è pari a quella atmosferica (di riferimento), per cui il termine di pressione è nullo:
Const= altezza cinetica+ + quota