

# **Idraulica e Idrologia: Lezione 17**

## **Agenda del giorno**

- **Efflusso libero da luci: Efflusso da parete sottile e parete grossa. Efflusso da luci in parete.**
- **Luci a battente. Stramazzi.**
- **Fluidi reali**
- **Viscosità**

# Efflusso da luci - introduzione - 1

L'obiettivo di questa sezione è rappresentato dalla caratterizzazione dell'efflusso dell'acqua (e di un fluido in generale) da un recipiente. Esempi di questo tipo di processi sono: efflusso da un recipiente tramite un orifizio; sfioro da bordo fisso. La "luce" rappresenta in questo caso l'apertura attraverso la quale si realizza il deflusso.

**Luce a battente:** il carico idraulico sulla apertura supera il bordo superiore dell'apertura (battente indica appunto l'altezza del carico sopra il bordo superiore dell'apertura);

**Luce a stramazzo:** luce a battente nullo.

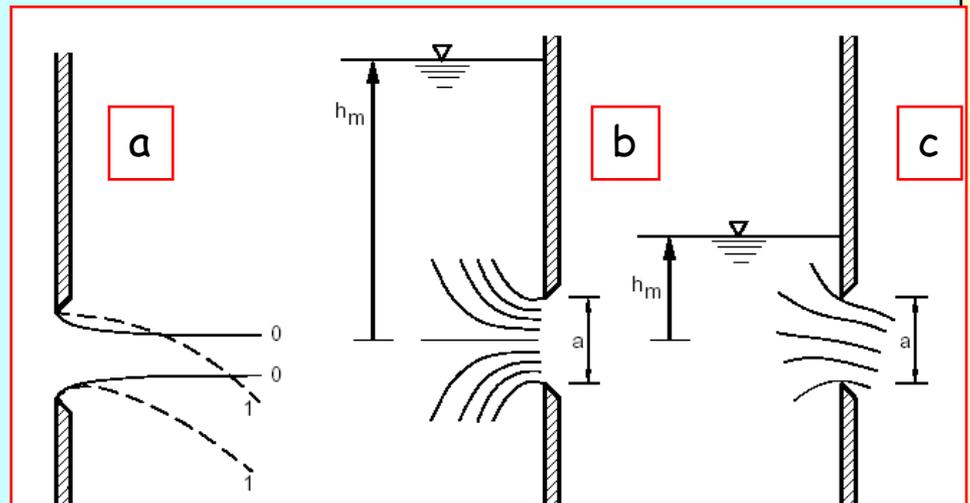
Anche nei casi reali, il flusso viene studiato come moto di fluido perfetto ed incompressibile. Il moto di efflusso da luce è governato da: **forza di gravità e forza inerziale** (le forze inerziali, pari al prodotto della massa per l'accelerazione, rappresentano l'inerzia di un corpo in movimento). In assenza di gravità, il moto assume la configurazione 0-0, mentre all'aumentare della forza di gravità il getto tende verso la configurazione 1-1 (Figura a).

Le linee di corrente in corrispondenza della luce tendono ad essere più fitte e rettilinee quando la luce è "stretta" (figura b), mentre sono più curve e meno fitte quando la luce è "ampia" (figura c).

La luce a è intesa "stretta" per:  
 $a/h_m \sim 0$

La luce a è intesa "ampia" per:  
 $a/h_m > 0.2$

( $h_m$  è il carico idraulico sull'asse della luce).

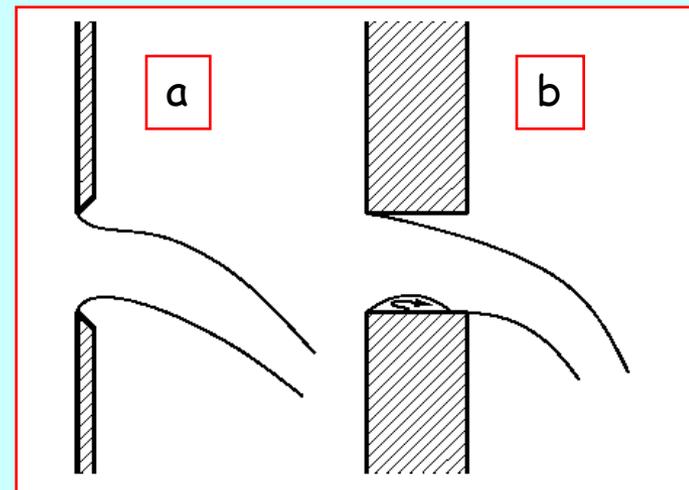


## Efflusso da luci - introduzione - 2

La forma del getto è inoltre influenzata dallo spessore della parete da cui il fluido effluisce. In particolare, si dice:

**'efflusso da parete sottile'** quando lo spessore della parete è piccolo rispetto all'apertura 'a' della luce (meglio ancora se i bordi sono taglienti) (figura a). In questo caso, l'efflusso è caratterizzato da un fenomeno di contrazione di vena con la formazione di una sezione di vena contratta in cui le linee di corrente sono rettilinee e si ha distribuzione idrostatica delle correnti.

**'efflusso da parete grossa'** nel caso in cui lo spessore della parete non sia piccolo rispetto all'apertura 'a' della luce. In questo caso, la vena dopo la sezione di vena contratta si adagia sulla parete (figura b). Si forma una dissipazione locale di energia, con conseguente modifica del campo di moto ed attenuazione del fenomeno di vena contratta.



# Efflusso da luci a battente - contrazione della vena

La contrazione della vena è stata studiata teoricamente sotto le seguenti ipotesi:

- assenza di gravità;
- fluido bidimensionale.

I risultati sono riportati, in termini di coefficiente di contrazione, nella tabella seguente. Il coefficiente di contrazione ( $C_c$ ) è il rapporto fra la sezione contratta e la sezione della bocca d'uscita. La tabella fa riferimento, per quanto riguarda la geometria della luce, alla figura.

Alcuni risultati significativi:

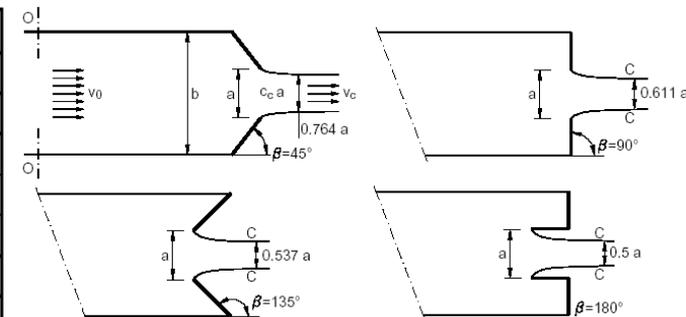
$\beta=90^\circ$  (parete verticale): luce molto piccola rispetto al battente ( $a/b=0$ ):  $C_c=0.611$

$\beta=180^\circ$  (cono rientrante): ( $a/b=0$ ):  $C_c=0.5$

$\beta=45^\circ$  (cono sporgente): ( $a/b=0$ ):  $C_c=0.764$

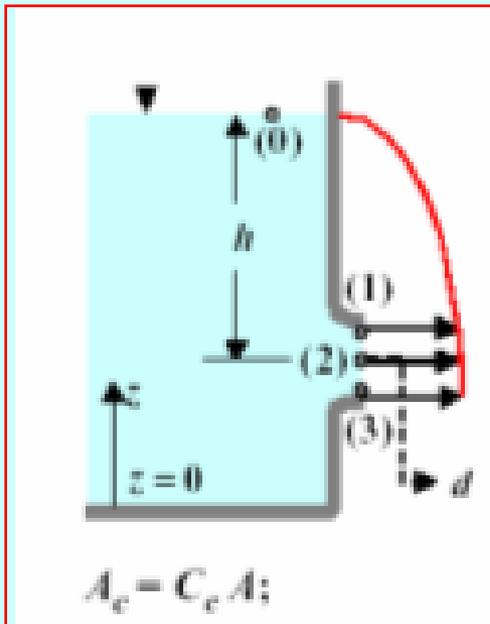
Il coefficiente di contrazione aumenta all'aumentare di  $a/b$ .

a/b	$\beta = 45^\circ$	$\beta=90^\circ$	$\beta=135^\circ$	$\beta=180^\circ$
0.0	0.746	0.611	0.537	0.5
0.1	0.747	0.612	0.546	0.513
0.2	0.747	0.616	0.555	0.528
0.3	0.748	0.622	0.659	0.544
0.4	0.749	0.633	0.580	0.564
0.5	0.752	0.644	0.599	0.586
0.6	0.758	0.662	0.620	0.613
0.8	0.789	0.722	0.698	0.691
0.9	1.0	1.0	1.0	1.0



# Applicazioni del teorema di Bernoulli: efflusso da luce in parete

Consideriamo il caso di un vena effluente liberamente da una luce praticata sulla parete verticale di un recipiente. Ipotesi: luce piccola; carico costante e pari ad  $h$  sulla bocca. Si applica allora l'equazione di conservazione dell'energia (teorema di Bernoulli) fra il punto 0 ed il punto 2. Queste ipotesi permettono il calcolo della velocità dell'acqua in uscita. Per il calcolo della portata, si tiene conto della contrazione della vena (coefficiente di contrazione  $C_c$  che viene applicato all'area della luce).



$$d \ll h$$

$$v_2 = \sqrt{2g(z_0 - z_2)} = \sqrt{2gh}$$

$$Q = C_c A \sqrt{2gh}$$

# Applicazioni del teorema di Bernoulli: efflusso da paratoia

Un caso speciale di luce a battente è costituito da quello, rappresentato in figura, dove il bordo inferiore della bocca coincide con il recipiente. Il caso trova applicazione nello studio dell'efflusso sotto paratoia sollevata sul fondo di un canale. Si osservi che, per fluido perfetto, il caso può riguardarsi come quello di efflusso da parete verticale con angolo beta pari a  $90^\circ$  (la parete di fondo può essere assimilata all'asse di simmetria di tale getto). Per questo motivo, il coefficiente di contrazione può essere assunto pari a 0.61.

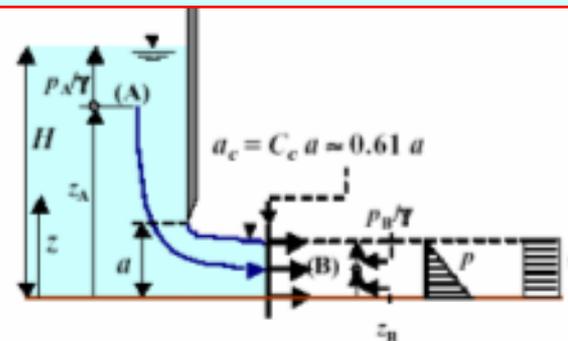
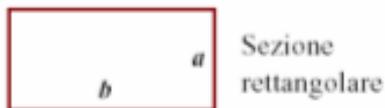
Si può quindi applicare l'equazione di conservazione dell'energia (teorema di Bernoulli) fra le sezioni A e B (nell'ipotesi che la velocità nel canale sia prossima a zero), ottenendo il seguente sviluppo

$$Q = C_c A \sqrt{2gh}$$

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

$$v_B = \sqrt{2g(H - C_c a)}$$

$$Q = C_c \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2g(H - C_c a)}$$



## Applicazioni del teorema di Bernoulli: efflusso da paratoia - 2

Da quanto esposto, l'efflusso da una luce di fondo sembra avere una certa analogia con l'efflusso da parete verticale. In effetti, però, tale analogia si limita all'effetto di contrazione. Nel caso della luce in parete verticale, infatti, le linee di corrente nella sezione contratta sono tutte alla stessa pressione atmosferica. Nel caso della luce di fondo, invece, la distribuzione della pressione è quella idrostatica (ovvero cresce linearmente con la profondità), perché la vena effluente appoggia sul piano di fondo.

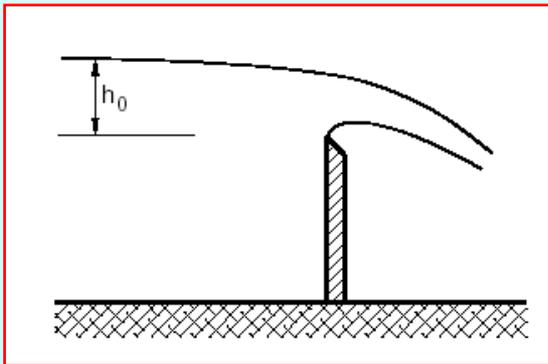
# Applicazioni del teorema di Bernoulli: efflusso da luci a stramazzo - 1

Una luce a stramazzo è costituita da una luce a battente nullo, cioè costituita dal solo bordo inferiore e dai bordi laterali.

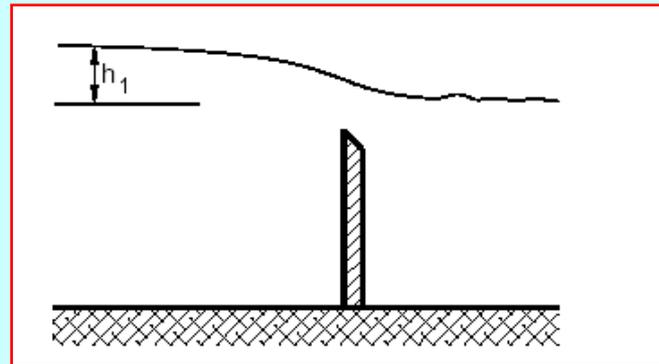
Il carico  $h_0$ , relativo allo stramazzo, si definisce come il dislivello fra la superficie libera a monte e il punto più basso della luce.

In condizioni normali lo stramazzo è libero (figura a), cioè presenta una vena ben delimitata, e soggetta alla stessa pressione (atmosferica) su tutto il contorno. Questo richiede che il livello liquido a valle sia inferiore alla soglia dello stramazzo; altrimenti lo stramazzo è rigurgitato (figura b).

Gli sviluppi qui presentati nelle sezioni seguenti si applicano al caso di stramazzo libero.



a)



b)

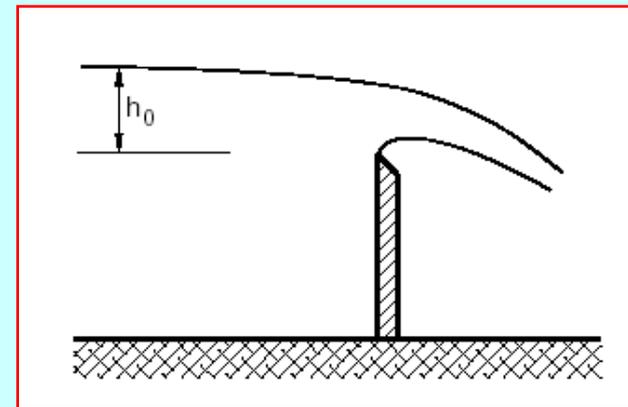
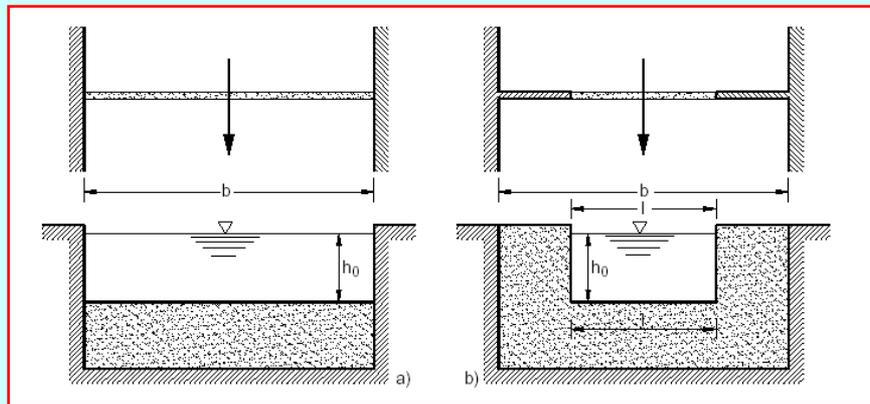
# Stramazzo Bazin o Poleni - 1

In questo caso, la luce è rettangolare, e si danno i due casi indicati in figura:

In figura a) le pareti coincidono con quelle del canale in arrivo (luce larga  $b$ ), mentre nel caso della figura b) la luce è larga  $l$  ed è più ristretta rispetto alla larghezza del canale di arrivo (in questo caso la vena subisce una contrazione laterale).

La sezione longitudinale dello stramazzo è invece indicata nella figura a dx.

In questo caso la curvatura delle linee di corrente non permette una diretta applicazione del teorema di Bernoulli; si applica il procedimento messo a punto da Poleni, considerando la luce come costituita da una serie di tratti elementari con velocità torricelliana e con coefficiente di contrazione costante.



# Stramazzo Bazin o Poleni - 2

Per ognuno dei tratti elementari di altezza  $dh$  si ha (se velocità di arrivo nel canale è nulla):

$$dQ = C_c \cdot b \cdot dh \cdot \sqrt{2gh}$$

che si può integrare fra  $h=0$  ed  $h=h_0$ , per ottenere:

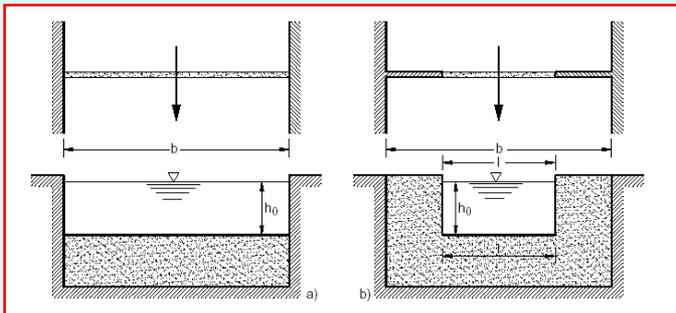
$$\begin{aligned} Q &= \int_{h=0}^{h=h_0} C_c \cdot b \cdot dh \cdot \sqrt{2gh} = \\ &= C_c \cdot b \cdot \sqrt{2g} \int_{h=0}^{h=h_0} h^{0.5} dh = \\ &= \frac{2}{3} C_c \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} \Big|_{h=0}^{h=h_0} = \frac{2}{3} C_c \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h_0^{3/2} \end{aligned}$$

ricorda :

$$\int x^{0.5} dx = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

in quanto

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$



# Stramazzo Bazin o Poleni - 3

Sostituendo  $C_c=0.61$  si ha:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2}{3} C_c \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h_0^{3/2} = \\ &= \frac{2}{3} 0.61 \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h_0^{3/2} = \\ &= 0.41 \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h_0^{3/2} = 1.81 \cdot b \cdot h_0^{3/2} \end{aligned}$$

Per tener conto della contrazione laterale (ovvero: agente anche sui bordi verticali):

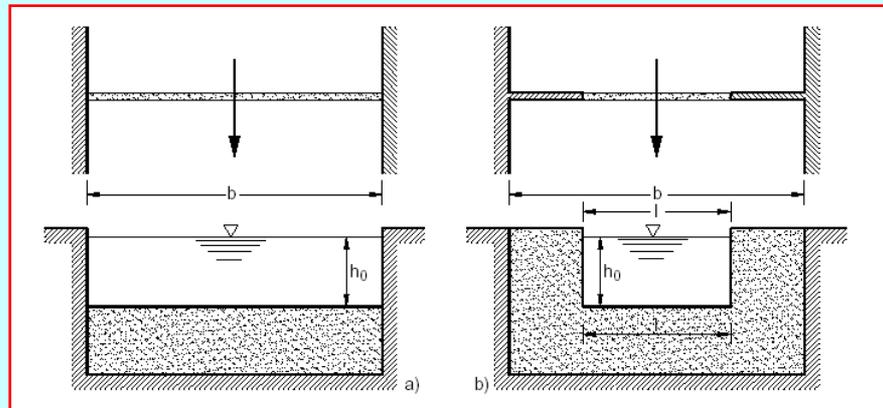
$$Q = \frac{2}{3} 0.61 \cdot l' \cdot \sqrt{2g} \cdot h_0^{3/2}$$

dove

$$l' = l - 0.2 \cdot h_0$$

La relazione precedente è valida se  $l \geq 3h_0$ .

In caso contrario, si utilizzano altre procedure



# Stramazzo triangolare

Gli stramazzi rettangolari non sono troppo indicati per la misura di piccole portate, perché esse richiedono la misura di piccoli carichi il cui apprezzamento è necessariamente impreciso. Per ovviare a questi inconvenienti può essere impiegato lo stramazzo triangolare, la cui geometria viene definita dall'angolo  $\alpha$ . La bisettrice dell'angolo è generalmente verticale.

L'analisi di questo tipo di stramazzo viene condotta come nel caso dello stramazzo Bazin, tenendo conto della variazione della larghezza  $l$  con  $h$ , nel modo seguente:

$$dQ = C_c \cdot l \cdot dh \cdot \sqrt{2gh}$$

con

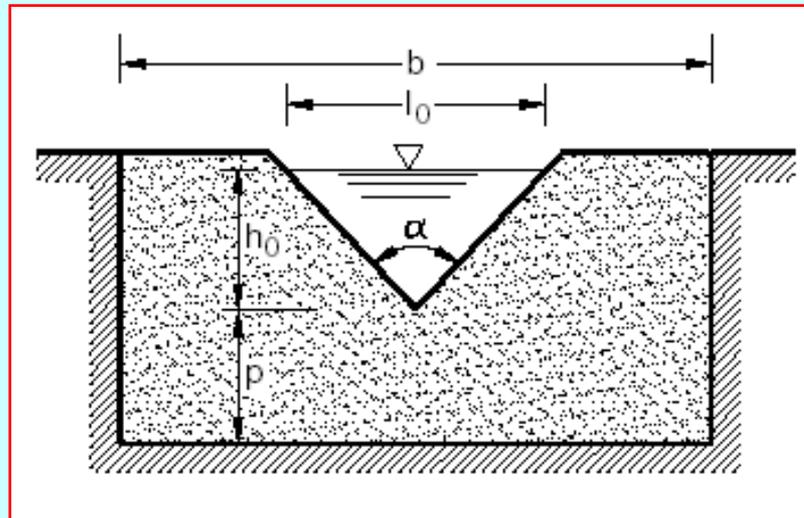
$$l = \frac{l_0 (h_0 - h)}{h_0}$$

da cui, sostituendo, si ottiene

$$Q = \frac{4}{15} \cdot C_c \cdot \frac{l_0}{h_0} \cdot \sqrt{2g} \cdot h_0^{5/2}$$

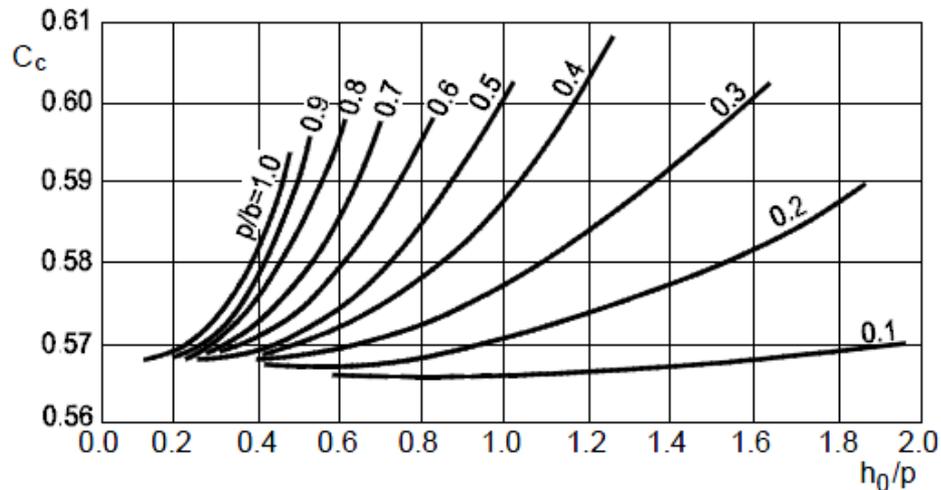
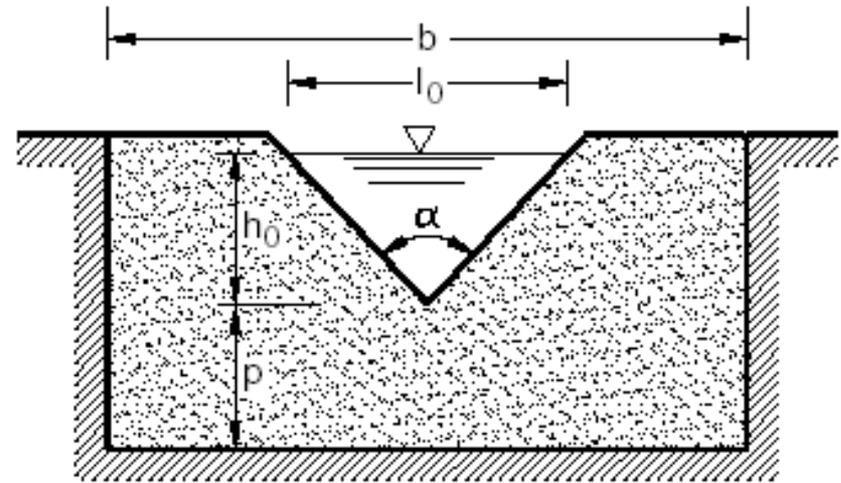
dove

$$\frac{l_0}{h_0} = 2 \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$$



# Stramazzo triangolare - valore di $C_c$

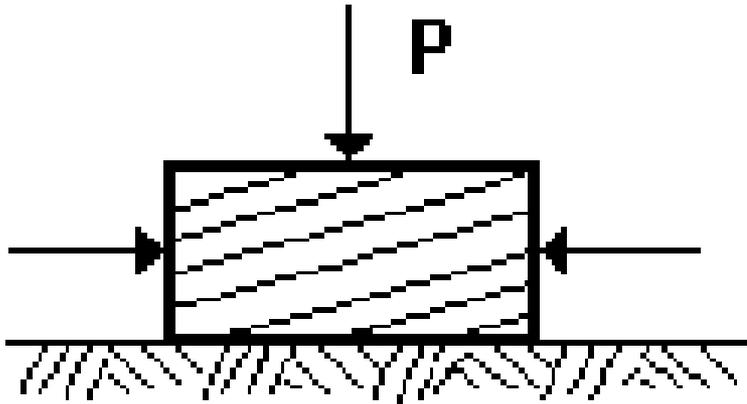
Per uno stramazzo triangolare caratterizzato da angolo  $\alpha=90^\circ$ , il valore del coefficiente di contrazione  $C_c$  può essere ricavato dalla seguente figura.



- **Fluidi reali**
- **Viscosità**

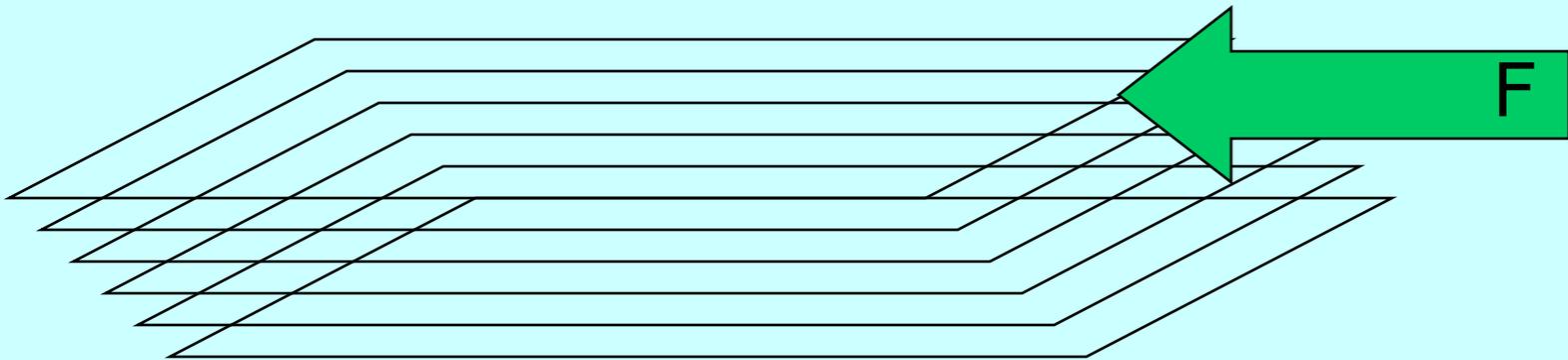
## Attrito fra solidi

Considerato un solido appoggiato su un piano e gravante su di esso per effetto del proprio peso  $P$  (Figura), risulta evidente che per muovere il corpo sul piano è necessario imprimere una forza capace di vincere la resistenza che quest'ultimo offre al moto. Questa resistenza prende il nome di attrito.



# Viscosità

- Si consideri una risma di fogli di carta giacenti su una superficie piana. Se si applica una forza orizzontale al foglio posto in posizione superiore, il foglio stesso opporrà una forza (di attrito) al movimento.
- Si può pensare al fluido come composto da strati, esattamente come una risma di fogli. Quando uno strato (o un foglio) deve essere posto in movimento rispetto ad un altro strato (o un altro foglio), si manifesta una forza di attrito.
- Questo tipo di resistenza è definita, per i fluidi, viscosità.
- Un fluido reale è un fluido in cui la viscosità è diversa da zero (in un fluido ideale la viscosità è nulla)



L'esperienza mostra che per mantenere il movimento uniforme con velocità  $\delta u$  (vedi figura) è necessario applicare una forza  $F$  tale che sia

$$F = \mu A \frac{\delta u}{\delta y}$$

dove  $A$  è la superficie della parete stessa e  $\delta y$  la sua distanza dalla parete fissa. Ne risulta che, per unità di superficie, è necessario applicare uno sforzo tangenziale

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{\delta u}{\delta y}$$

i fluidi che obbediscono a questa legge sono detti fluidi 'newtoniani'

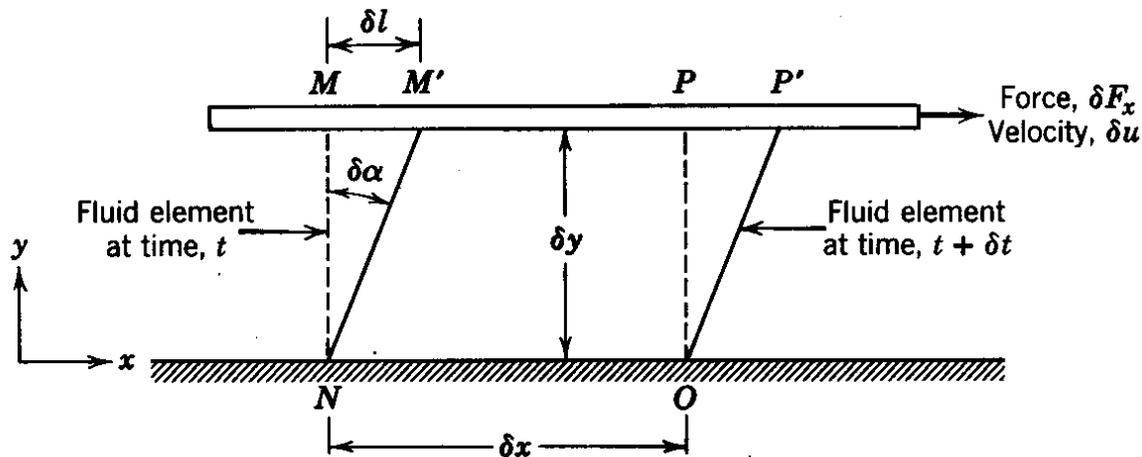


Fig. 2.8 Deformation of a fluid element.

## Deformazione di un fluido

- Poichè  $\delta y$  può essere piccolo a piacere, lo sforzo tangenziale  $\tau$  è dato da:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

- Il termine  $du/dy$  è noto come gradiente di velocità;
- Il coefficiente  $\mu$  è noto come coefficiente di viscosità **dinamica**. Questo parametro varia con lo stato termico del fluido ma per gli aeriformi e per molti liquidi resta costante al variare della velocità del fluido in moto. I liquidi che possiedono questa caratteristica si chiamano newtoniani, gli altri invece si denominano, ad esempio: pseudoplastici, dilatanti, Bingham, tixotropici, reopectici e elastoviscosi, a seconda del loro comportamento nella variazione della viscosità nel tempo sia nelle deformazioni.

## Viscosità dell'acqua

- L'acqua è un fluido newtoniano e ha una viscosità poco variabile nel dominio di temperature del suo stato di liquido, assumendo valori prossimi a **0.0001** (kg-peso s/ m<sup>2</sup>) alla temperatura di 20° C, con valori crescenti al limite di **0.00018** per temperature prossime a 0°C e decrescenti verso **0.00003** intorno a 100°C.
- Nel moto del liquido la viscosità determina il trasferimento dell'effetto dell'attrito tra il liquido e le pareti solide periferiche, che lo contengono, all'interno dello stesso liquido. Si noti che la viscosità dimensionalmente si può interpretare come un rapporto tra l'energia (resistiva), dovuta al legame intermolecolare interno, sulla portata della stessa massa liquida in moto.
- Il moto dell'acqua è **laminare** quando l'energia impressa alle molecole del liquido per il loro moto è inferiore all'energia richiesta per rompere il legame esistente tra le molecole stesse altrimenti il moto diventa **turbolento** e le molecole nel moto si miscelano.

# Valori del coefficiente di viscosità dinamica per alcuni fluidi

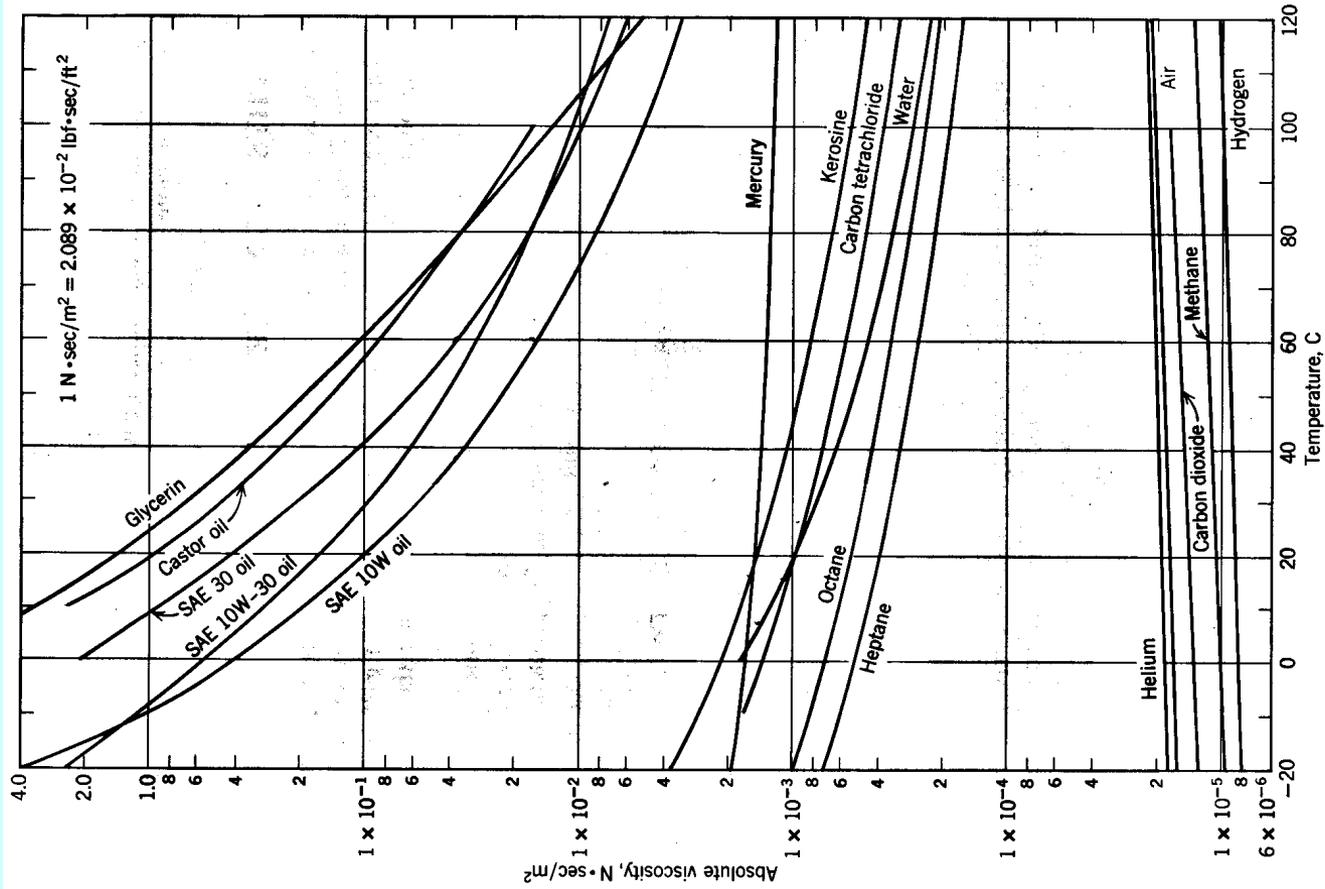


Fig. A.2 Dynamic (absolute) viscosity of common fluids as a function of temperature (data from Refs. 1, 5 and 9).

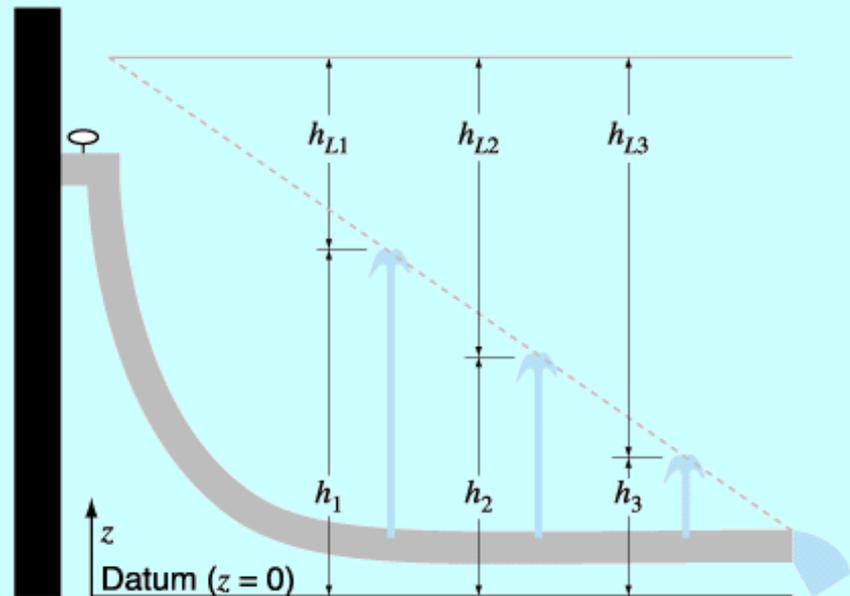
## Perdita di energia (di carico) a causa della viscosità e della turbolenza

- L'equazione di Bernoulli assume fluido ideale (non viscoso)
- Tuttavia, parte dell'energia viene persa nel moto a causa delle proprietà viscosi dei fluidi.

Per esempio:

la quota piezometrica lungo un tubo che consente di essere portata da un serbatoio diminuisce lungo la lunghezza del tubo, in ragione delle perdite di energia (perdite di carico) che si manifestano nella direzione del moto.

- Si osservano pertanto delle perdite di energia,  $h_L$ , lungo il percorso ( $h_L =$  perdita di carico).



## Teorema di Bernoulli generalizzato

- Per le considerazioni energetiche esposte in precedenza, preso in esame un tronco di corrente uniforme (Figura), nelle due sezioni (a) e (b) non sarà  $H(a) = H(b) = \text{cost}$ , ma sarà:
- $H(a) = H(b) + DH = H(b) + DH' + DH''$ .
- Le perdite di energia  $DH = DH' + DH''$  sono distribuite ovvero localizzate. Le prime  $DH'$  sono provocate dal moto del fluido in condotta e sono costanti per metro lineare di condotta di caratteristiche uniformi (stesso diametro, stesso materiale, ecc.). Le perdite ripartite  $DH''$  sono provocate da punti singolari di discontinuità della condotta (bruschi cambiamenti di sezione, o di direzione, ovvero sensibili ostacoli nella condotta).

