

Idraulica e Idrologia: Lezione 18

Agenda del giorno

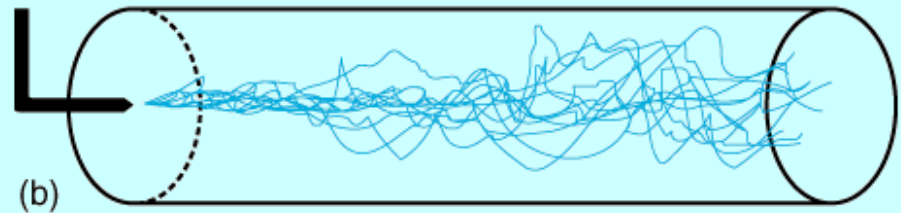
- **L'esperienza di Reynolds**
- **Regime laminare e turbolento**
- **Leggi di distribuzione per tensioni tangenziali e velocità**
- **Legge di Hagen-Poiseuille**

Regimi laminare e turbolento: l'esperienza di Reynolds

- O. Reynolds, per mezzo di una famosa esperienza ed utilizzando opportuni liquidi colorati (iniettati nel fluido da una speciale apparecchiatura), ha messo in chiara evidenza l'esistenza dei due regimi (laminare e turbolento) a diverse velocità (velocità del fluido attraverso il tubo). Filetti fluidi colorati, infatti, si presentano distinti entro una massa liquida incolore sino a determinate velocità, oltre le quali il colore si diffonde in tutta la massa circostante. All'interno di una corrente, poi, la turbolenza viene messa in evidenza dalle pulsazioni intorno a valori medi delle caratteristiche velocità e pressione. In regime turbolento non si può più parlare di traiettoria come luogo delle posizioni successive che una particella elementare occupa in ogni istante.



Regime laminare

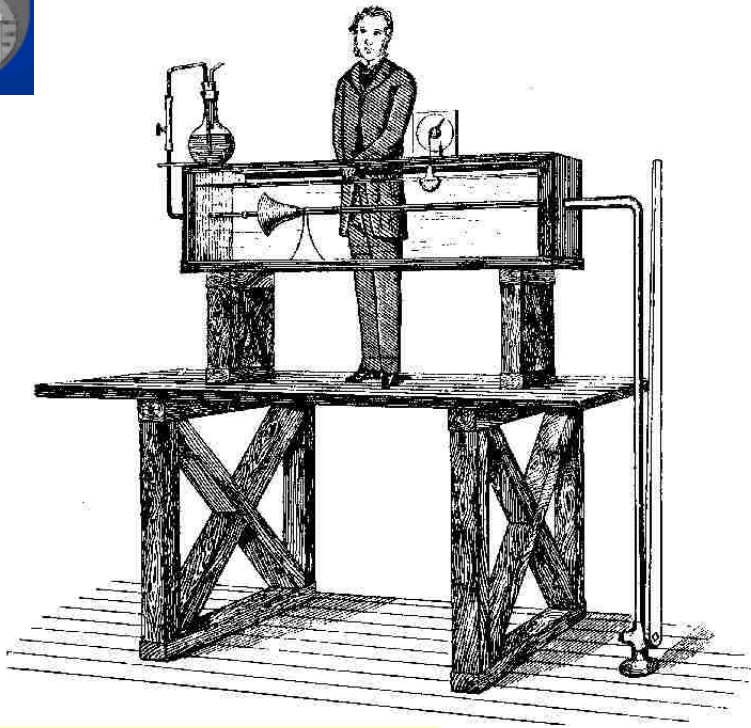


Regime turbolento

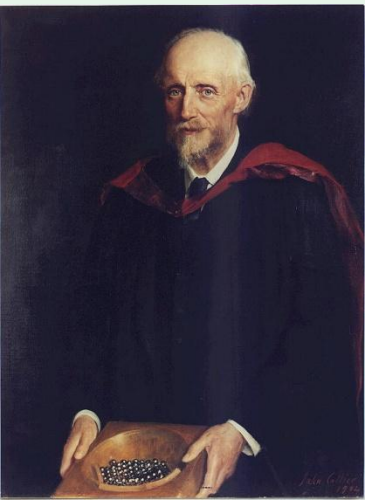
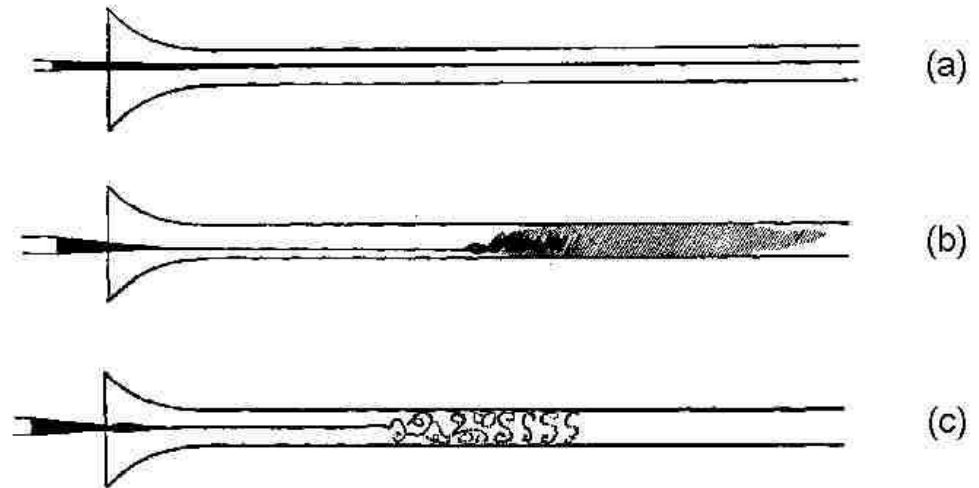




Royal Soc. Phil. Trans., 1883



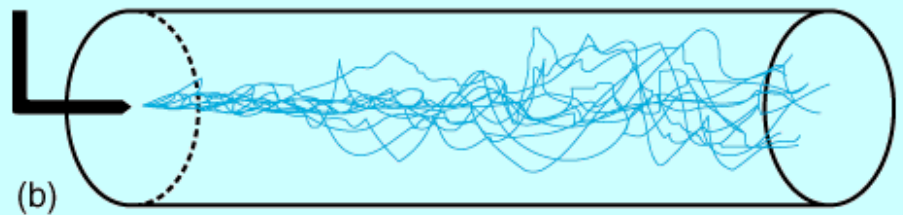
'the colour band would all at once mix up with the surrounding water, and fill the rest of the tube with a mass of coloured water ... On viewing the tube by the light of an electric spark, the mass of colour resolved itself into a mass of more or less distinct curls, showing eddies.'



Osborne Reynolds, 1842 - 1912

L'esperienza di Reynolds: la definizione del regime turbolento

- A Reynolds si deve anche la individuazione di un numero Re indice, funzione delle grandezze e delle caratteristiche fisiche di un fluido, inteso a rappresentare il rapporto fra forze di natura inerziale e quelle viscosi, nonché la determinazione del particolare valore Rc di tale numero che rappresenta il limite di coesistenza tra i due regimi (laminare e turbolento).



- Indicate in ρ la densità, in V la velocità media, in D la dimensione trasversale media della corrente e in μ la viscosità di un liquido, il numero indice caratteristico del tipo di moto di tale liquido, o numero di Reynolds, è dato dall'espressione seguente:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{\text{forze inerziali}}{\text{forze viscosi}}$$

V = velocità

ρ = densità

D = dimensione trasversale corrente

μ = viscosità

Regime laminare e Regime turbolento

- Nel regime laminare, molto graduale, lo sforzo tangenziale è dovuto all'interazione microscopica fra le molecole; i disturbi al flusso sono smorzati dalle forze viscosse.
- Il regime laminare, nei tubi, si ha per numeri di Reynolds inferiori a 2000.
- Nei tubi il regime turbolento si instaura a partire da valori del numero di Reynolds maggiori di 3000.
- Il regime laminare nei canali si ha per numeri di Reynolds inferiori a 5000.
- Nel regime turbolento il flusso è caratterizzato da fluttuazioni osservabili, che agiscono su scala macroscopica. Le proprietà generali del moto sono il risultato di tali fluttuazioni.

Esempio

La velocità media dell'acqua a temperatura ambiente in un tubo di diametro pari a 0.1m è 0.2ms^{-1} . Il regime del flusso è laminare o turbolento ? (Ricorda: $\rho_0=1\times 10^3\text{kgm}^{-3}$, $\mu=1\times 10^{-3}\text{Nsm}^{-2}$)

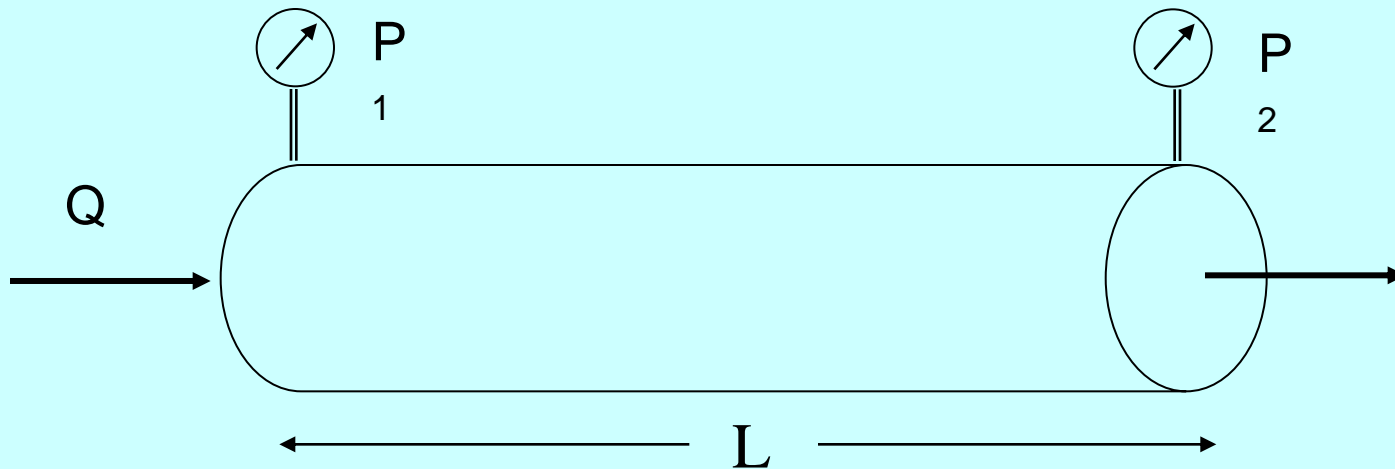
Calcolo del numero di Reynolds:

$$R_e = \frac{2\rho_0 vR}{\mu} = \frac{(1\times 10^3\text{kgm}^{-3})(0.2\text{ms}^{-1})(0.1\text{m})}{1\times 10^{-3}\text{Nsm}^{-2}} = 20000 \frac{\text{kgms}^{-2}}{\text{N}} = 20000$$

Maggiore di 3000, quindi turbolento.

- **Regime laminare e turbolento**
- **Distribuzione di velocità e leggi di resistenza**

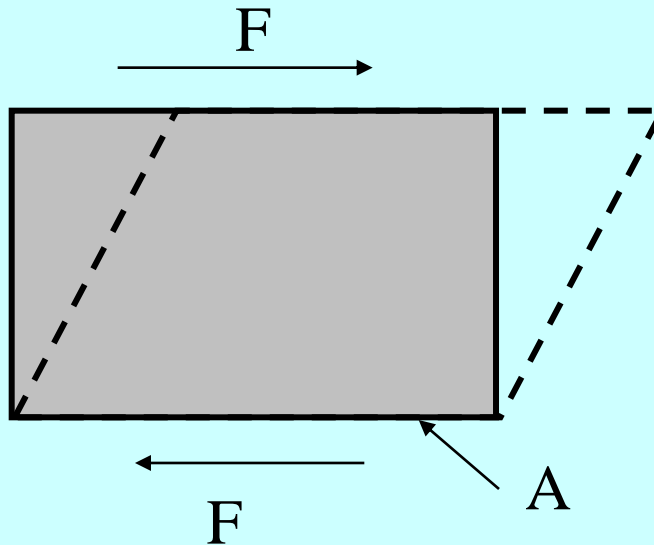
Esperimento di moto (regime laminare) indotto da variazioni di pressioni (P_1 e P_2) sulle due superfici estremali



- La condotta è orizzontale, di lunghezza L .
- Una portata Q fluisce al suo interno

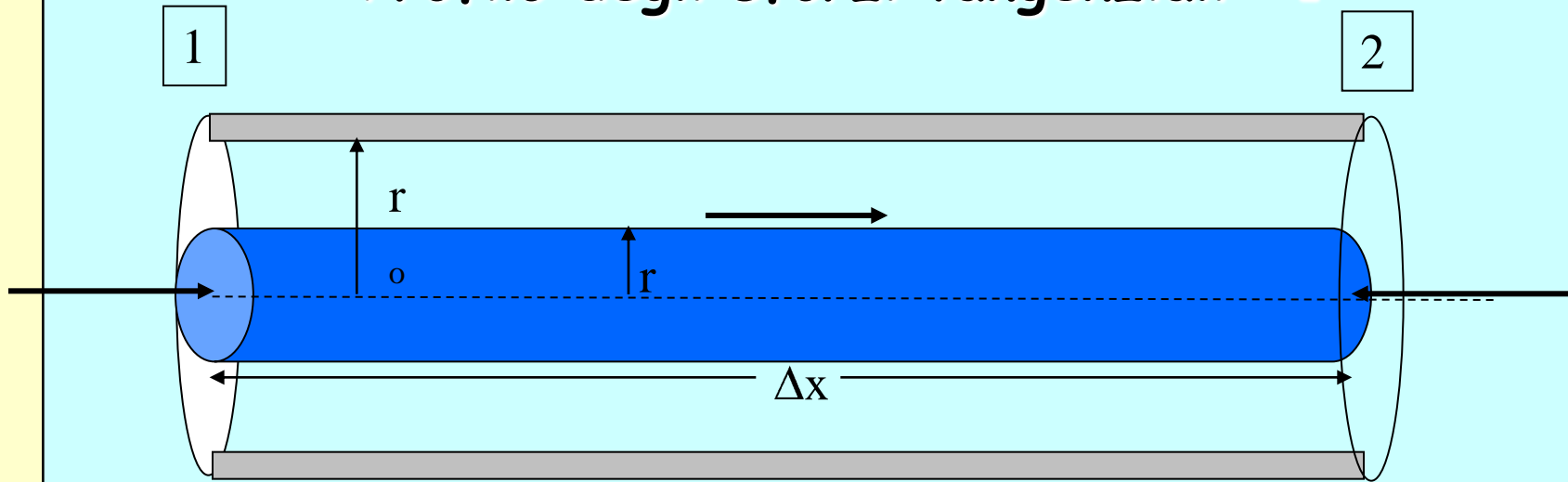
Tensioni (sforzi) tangenziali

- La tensione (sforzo) tangenziale agisce parallelamente alla superficie (al contrario della pressione, che agisce normalmente alla superficie), ed è data dal rapporto fra la forza parallela F e l'area della superficie



$$\tau_{\text{tangenziale}} = \frac{F_{\text{tangenziale}}}{A}$$

Profilo degli sforzi tangenziali -1



Bilancio delle forze sull'elemento cilindrico, di lunghezza Δx .

Le forze sono:

- pressione su superficie 1;
- pressione su superficie 2;
- Sforzi tangenziali sul perimetro.

Ovvero:

$$P_1 \pi r^2 - P_2 \pi r^2 + \tau (2\pi r \Delta x) = 0$$

$$\therefore -\frac{(P_1 - P_2)}{\Delta x} = \frac{2\tau}{r} \quad (1)$$

Profilo degli sforzi tangenziali -2

Dalla (7.1) si ha che gli sforzi tangenziali variano linearmente con r:

$$\tau = -\frac{r}{2} \left(\frac{P_1 - P_2}{\Delta x} \right) \quad (2)$$

In corrispondenza della parete ($r=r_o$):

$$\tau_p = -\frac{r_o}{2} \left(\frac{P_1 - P_2}{\Delta x} \right) \quad (3a)$$

Ovvero:

$$(P_1 - P_2) = -\frac{4\Delta x \tau_p}{D} \quad (3b)$$

Profilo degli sforzi tangenziali -3

Dalla (7.3b) si ottiene allora che:

$$\therefore \frac{\tau}{\tau_p} = \frac{r}{r_o} \quad \text{or} \quad \tau = \tau_p \frac{r}{r_o} \quad (4)$$

Lo sforzo tangenziale è funzione della coordinata radiale r .

Nota che questo risultato è indipendente dal regime del fluido (vale quindi sia per regime laminare che turbolento)

Caso 1: Regime laminare

(il regime laminare è dominante nel definire le caratteristiche dei campi di moto nelle falde)

❖ Legge di Newton sulla viscosità

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \quad (5)$$

μ [=N/m² · s=Pa · s]: Viscosità

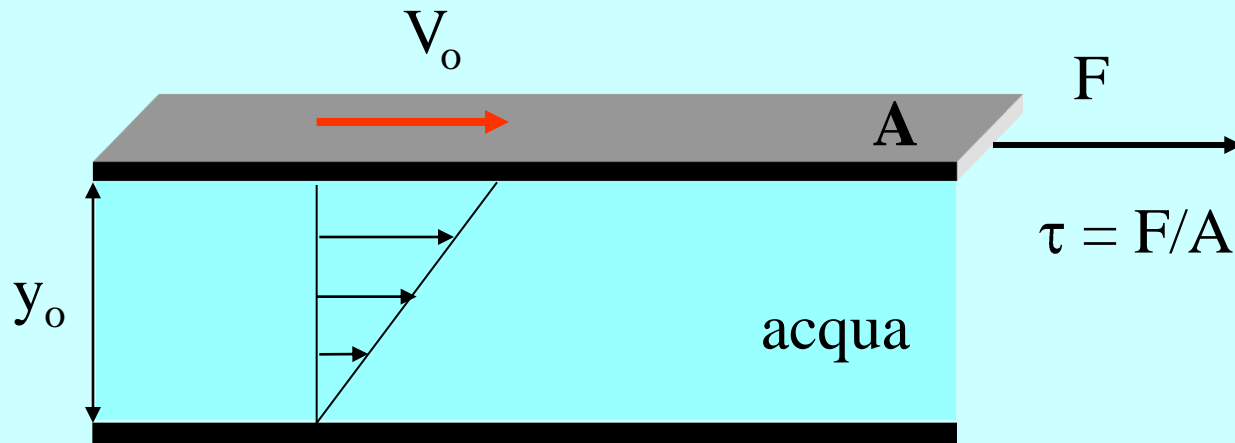
$\nu = \mu/\rho$: viscosità cinematica [=m²/s]

Fluidi newtoniani: Fluidi che si comportano coerentemente con la legge di Newton: lo sforzo tangenziale è funzione lineare del gradiente di velocità.

➤ **La viscosità di un fluido misura la sua resistenza al flusso a fronte di una assegnata forza applicata.**

Esempio: sforzi tangenziali

Lo spazio fra due piastre è riempito con acqua. Determinare lo sforzo tangenziale e la forza richiesta per muovere la piastra superiore ad una velocità costante pari a 10 m/s (rispetto alla piastra inferiore). Lo spazio y_0 misura 0.1mm e l'area delle piastre è pari a 0.2 m². La viscosità dell'acqua è 0.001 Pa.s.



Regime laminare: profilo di velocità - 1

La legge di Newton espressa in coordinate radiali può essere scritta nel modo seguente

$$\tau = \mu \frac{dV}{dr} \quad (6)$$

Combinando le equazioni (2) e (6), ed integrando, si ottiene:

$$V(r) = \frac{r_o^2 - r^2}{4\mu} \frac{(P_1 - P_2)}{\Delta x} \quad [7 (a)]$$

$$V(r) = \frac{(P_1 - P_2) r_o^2}{4\mu \Delta x} \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right] \quad [7 (b)]$$

Il profilo di velocità è parabolico

Regime laminare: profilo di velocità - 2

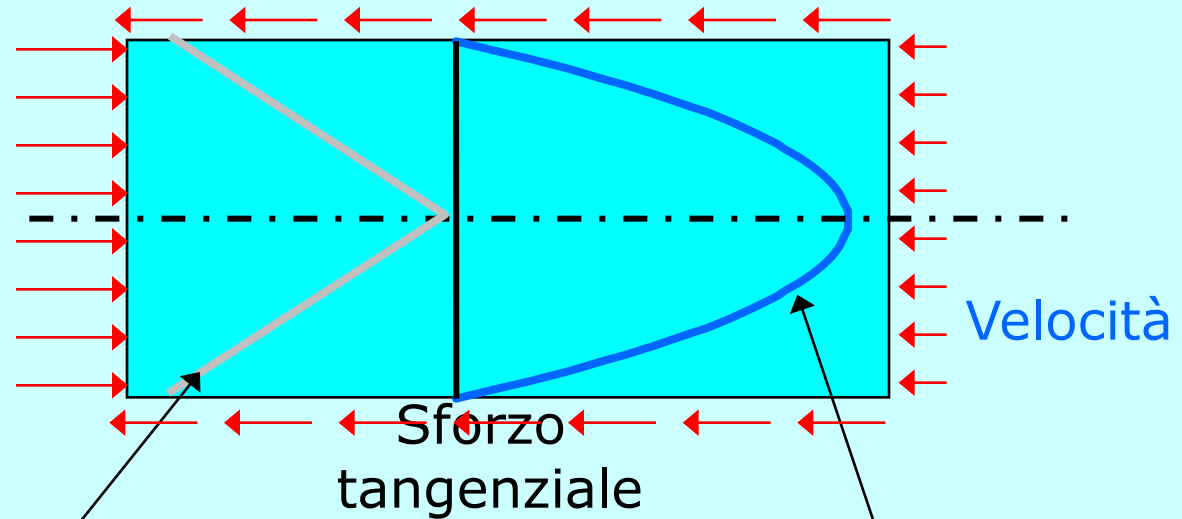
- Velocità minima, $V=0$ sulla parete
- Velocità massima V_{\max} al centro della condotta (ovvero: ad $r=0$):

$$V_{\max} = \frac{(P_1 - P_2) r_o^2}{4\mu\Delta x} \quad (7.8)$$

Il profilo di velocità si può scrivere pertanto come:

$$V(r) = V_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right] \quad [7.7 (c)]$$

Regime laminare nelle condotte circolari: profilo di sforzo e di velocità



Vero sia per regime laminare che turbolento

Vero per regime laminare

Legge di Hagen-Poiseuille

La portata attraverso la condotta è:

$$Q = \int V(r) dA$$

$$Q = \frac{\pi r_o^4 (P_1 - P_2)}{8\mu\Delta x} = \frac{\pi D_o^4 (P_1 - P_2)}{128\mu\Delta x} \quad (9)$$

Energia persa a causa dell'attrito (forze viscosse)

L'applicazione dell'equazione dell'energia fra le sezioni 1 e 2 porge

$$\left(\frac{P_2}{\rho g} - \frac{P_1}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + (z_2 - z_1) = -\frac{F}{g}$$

Per flusso in una condotta orizzontale, in condizioni di moto permanente e senza variazioni di diametro, si ha:

$$F = \frac{P_1 - P_2}{\rho}$$

➤ In ragione della (9) :

$$\therefore F = Q \Delta x \frac{\mu}{\rho} \frac{128}{\pi D_o^4}$$

(12)

➤ In ragione della (3b):

$$F = -\frac{4\Delta x \tau_p}{\rho D}$$

(13)

Lo sforzo tangenziale sulla parete è responsabile delle perdite di energia

Perdita di energia

La perdita di energia si sviluppa in maniera continua lungo la condotta, e può quindi essere espressa come perdita per unità di percorso e di peso, $J=(P_1-P_2)/\gamma$, da cui si ottiene:

$$V(r) = \frac{r_o^2 - r^2}{4\mu} \gamma J$$

La figura rappresenta l'evoluzione delle perdite di energia nel moto lungo una condotta che collega due serbatoi posti a quota diversa. Le linee A-B e C-D descrivono rispettivamente l'andamento dei carichi totali (valore dato dalla somma dei tre termini energetici: posizione, pressione e cinetico) e della pressione (valore dato dalla somma dei termini di energia di posizione e di pressione) nel caso di fluido ideale, mentre le linee A-E e F-D rappresentano i corrispondenti andamenti nel caso di fluido reale.

La velocità è uniforme nella condotta, e quindi le due linee (quella dei carichi totali A-E e quella dei carichi di pressione) sono parallele di eguale pendenza (J).

Tutta l'energia cinetica viene persa nel momento in cui la condotta si versa nel serbatoio a valle.

