Idraulica e Idrologia: Lezione 19
Agenda del giorno

- Il regime turbolento
- Distribuzione di velocità e leggi di resistenza: diagramma di Moody
- Equazione di Gauckler Strickler per il moto uniforme in canali

Regime turbolento - 1

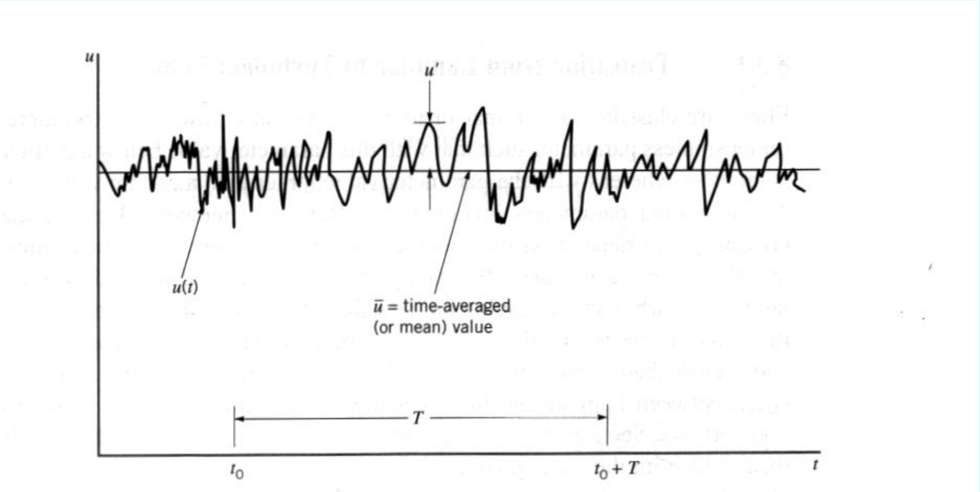
In presenza di regime turbolento, velocità e pressione fluttuano molto rapidamente. In particolare, si può assumere che le componenti della velocità e pressioni, in corrispondenza di un punto, fluttuino attorno ad un valore medio (vedi Figura, dove viene rappresentata la serie temporale della velocità in corrispondenza di un punto del campo di moto, ed il valore medio corrispondente).

$$u = \bar{u} + u'$$

Velocità istantanea

Velocità media

Fluttuazione di velocità



Regime turbolento - 2

Se nel regime laminare è possibile determinare in modo rigoroso il valore di velocità per ogni punto della condotta, nel caso del regime turbolento questo non è più possibile, in quanto le fluttuazioni casuali, appunto perchè casuali, inibiscono una determinazione delle caratteristiche istantanee del campo di moto. Tuttavia, una determinazione siffatta può non essere necessaria per gli scopi applicativi; è sufficiente una valutazione delle caratteristiche medie del campo di moto.

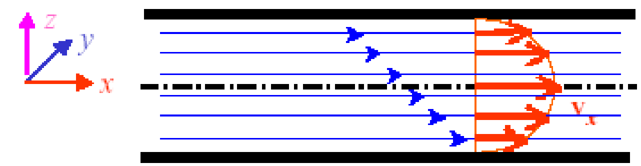
Vedi lezione per l'equazione della velocità nel caso di moto laminare.

$$v_x = \frac{\gamma J}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right)$$

$$v_y \equiv 0$$

$$v_z \equiv 0$$

Moto laminare

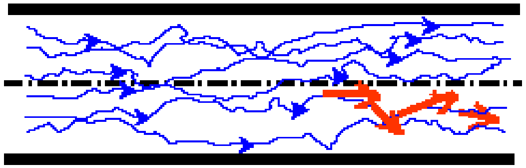


$$v_x(x, y, z, t) = ???$$

$$v_y(x, y, z, t) = ???$$

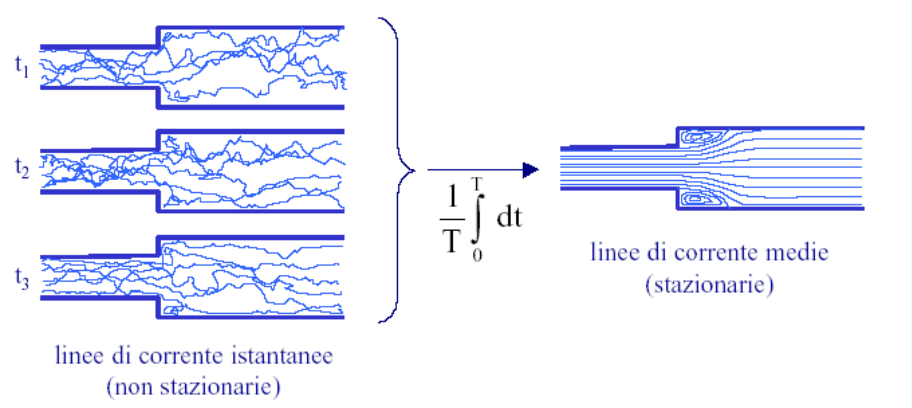
$$v_z(x, y, z, t) = ???$$

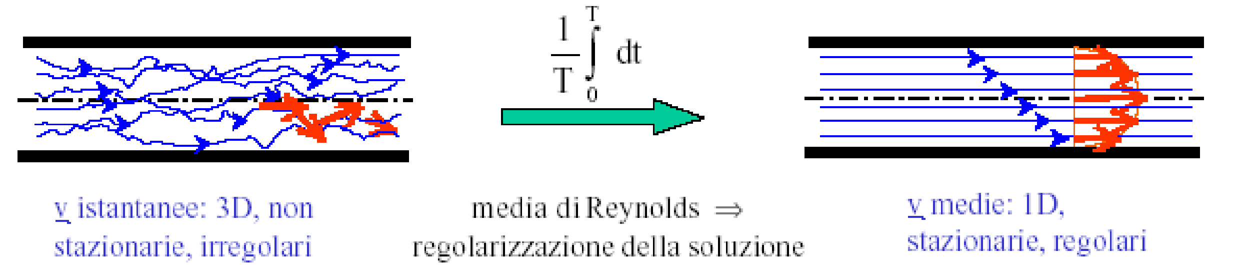
Moto turbolento



Regime turbolento - 3

In molte applicazioni non è richiesta la conoscenza dei valori istantanei del campo di moto, bensì dei corrispondenti valori medi (temporali).





La soluzione che così si ottiene non è rigorosa, è basata su indagini sperimentali, e differisce in questo rispetto al modello laminare.

Sforzi indotti dal moto turbolento

Sebbene, per quanto riguarda gli aspetti globali del movimento, siano di preminente importanza le velocità medie, le componenti fluttuanti non sono peraltro prive di effetto. Esse tendono infatti a rendere assai più uniforme che nel moto laminare la distribuzione delle velocità, dato il continuo trasporto di massa da uno strato all'altro.
Le fluttuazioni di velocità, inoltre, determinano l'insorgere di sforzi tangenziali turbolenti che vanno a sovrapporsi a quelli viscosi; quando il moto diventa decisamente turbolento, anzi, gli sforzi viscosi sono addirittura trascurabili rispetto a quelli dovuti alle fluttuazioni.

Possiamo dire che:

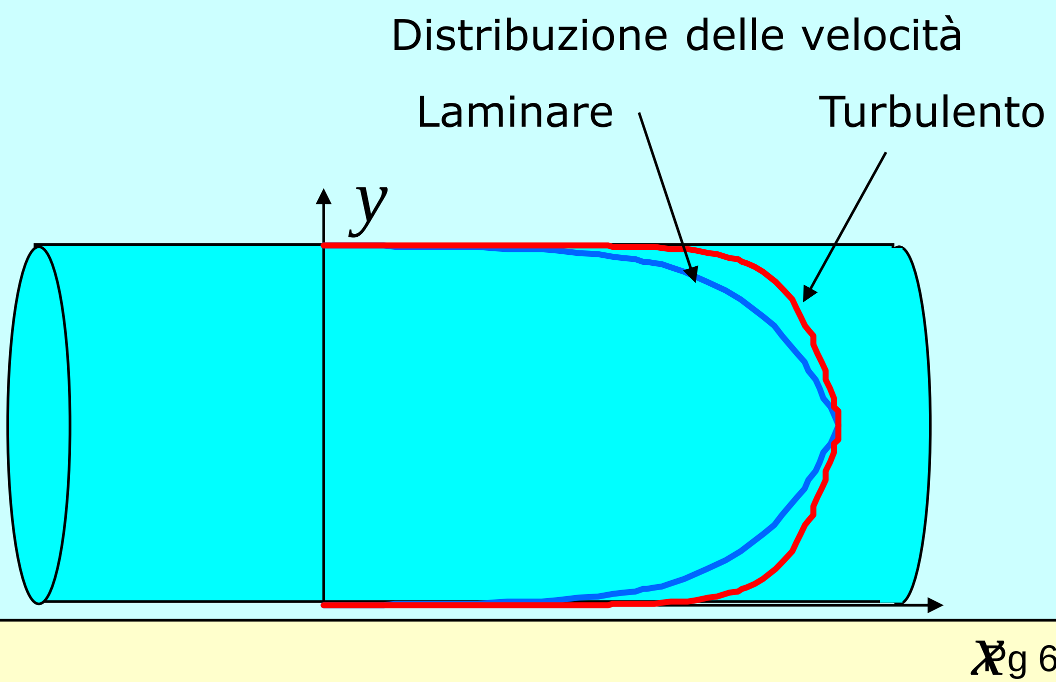
- La turbolenza determina un trasporto di quantità di moto dal centro della condotta verso le pareti;
- La dimensione delle fluttuazioni è proporzionale a:

  i) distanza dalla parete (vicino alla parete le fluttuazioni sono forzatamente contenute);

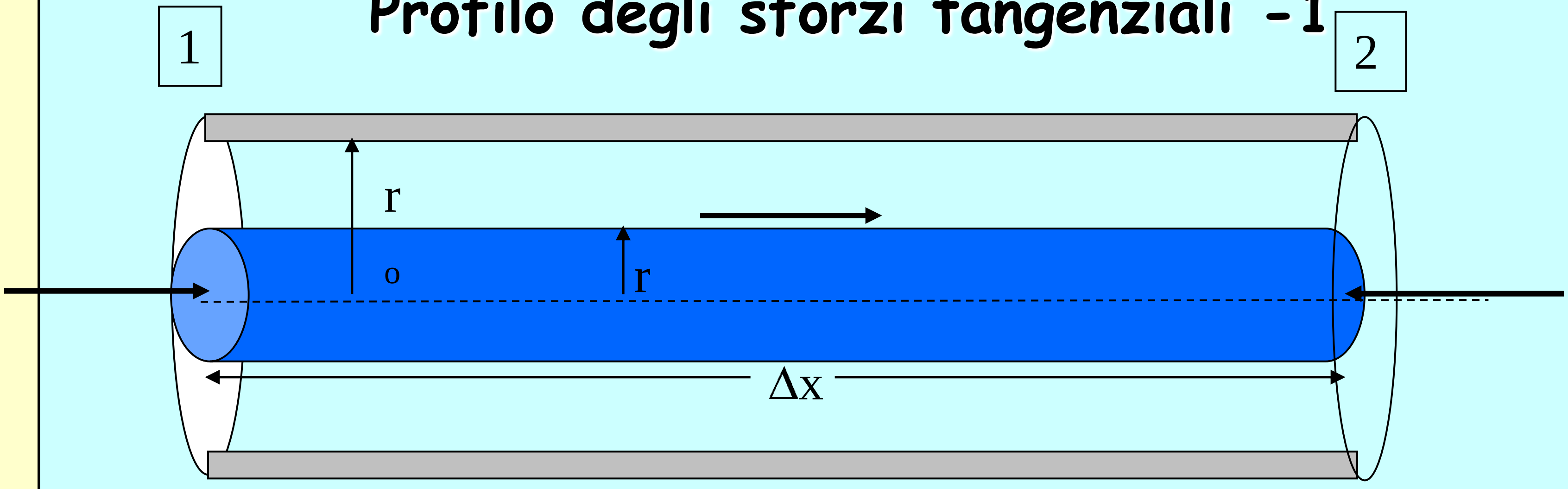
  ii) al gradiente della velocità con la distanza dalla parete: maggiore è la variazione di velocità, maggiormente intense ed estese saranno le fluttuazioni.

Legge logaritimica di distribuzione delle velocità

Nel caso di moto turbolento, la distribuzione di velocità non è più parabolica, come nel caso laminare, ma pouò essere approssimata con una distribuzione logaritmica



(Da lezione 20.05.2014)
Profilo degli sforzi tangenziali -1



Bilancio delle forze sull’elemento cilindrico, di lunghezza Δx.
Le forze sono:
-pressione su superficie 1;
-pressione su superficie 2;
-Sforzi tangenziali sul perimetro.
Ovvero:

$$\left(P_1\right)\pi r^2 - \left(P_2\right)\pi r^2 + \tau\left(2\pi r \Delta x\right) = 0$$

$$\therefore -\frac{(P_1 - P_2)}{\Delta x} = \frac{2\tau}{r} \qquad (1)$$

Profilo degli sforzi tangenziali -2

Dalla (1) si ha che gli sforzi tangenziali variano linearmente con r:

$$\boxed{\tau = -\frac{r}{2}\left(\frac{P_1 - P_2}{\Delta x}\right)} \qquad (2)$$

In corrispondenza della parete ($r=r_o$):

$$\boxed{\tau_p = -\frac{r_o}{2}\left(\frac{P_1 - P_2}{\Delta x}\right)} \qquad (3a)$$

Ovvero:

$$\boxed{(P_1 - P_2) = -\frac{4\Delta x \tau_p}{D}} \qquad (3b)$$

Ricorda: questo risultato vale sia per regime laminare che turbolento.

Equazione di Darcy-Weisbach - 1

Dalla (3b) si può ricavare direttamente l'espressione per le perdite di carico

$$\boxed{J = \frac{(P_1 - P_2)}{\gamma \Delta x}}$$

Conviene ora esprimere lo sforzo tangenziale alla parete τ_p (ovvero: τ_0) in funzione della velocità media V:

$$\boxed{\tau_0 = \frac{f}{4}\frac{\rho V^2}{2}}$$

Il fattore f, detto 'numero di resistenza', è funzione del numero di Reynolds Re e della scabrezza della superficie.

La combinazione delle due espressioni porge la formula di Darcy-Weisbach :

$$\boxed{J = \frac{f}{D}\frac{V^2}{2g}}$$

Equazione di Darcy-Weisbach - 2

L'equazione di Darcy-Weisbach

$$\boxed{J = \frac{f}{D}\frac{V^2}{2g}}$$

consente pertanto di determinare le **perdite di energia** (per una condotta di diametro D; ma il problema per un canale si pone in maniera molto simile), una volta che sia definito il valore di f.

Le determinazione di f, numero di resistenza (funzione di Re e della scabrezza), rimanda al problema di definire in modo univoco la scabrezza.

PROBLEMA

Come definire la scabrezza di una superficie?

Scabrezza e scabrezza equivalente

La scabrezza è, in condizioni naturali, l'effetto di un varietà apparentemente casuale di sporgenze e rientranze da valutarsi solo con metodi statistici.
Allo scopo di agevolare lo studio, è stata indagata (da Nikuradse, 1930), con celebri misure sperimentali, una scabrezza artificiale in sabbia applicata alla parete dei tubi.

La scabrezza in sabbia di Nikuradse consisteva in un rivestimento della parete con granelli accostati di sabbia naturale, vagliati così da avere diametro ε praticamente costante.

Attesi i risultati sperimentali di Nikuradse, si è poi convenuto che ogni scabrezza naturale possa essere ricondotta ad un'equivalente scabrezza in sabbia, ove essa comporti le stesse condizioni di moto lungo la parete.
Pertanto, ad ogni condizioni di parete si può applicare una corrispondente misura ε di 'scabrezza in sabbia', che riflette il comportamento statistico della scabrezza naturale.

Il numero di resistenza

- Regime laminare
- Regime turbolento
- Diagramma di Moody

Il numero di resistenza per regime laminare

La determinazione del numero di resistenza per il caso di regime laminare è diretta. Si consideri l'equazione di Hagen-Poiseuille (HP), che esprime la velocità media in funzione della viscosità e della geometria della sezione.

$$Q = \frac{\pi\, \mathrm{r_o}^4 (P_1 - P_2)}{8\mu\Delta x} = \frac{\pi\, \mathrm{D_o}^4 (P_1 - P_2)}{128\mu\Delta x}$$

$$V_{media} = V = \frac{\mathrm{D_o}^2 (P_1 - P_2)}{32\mu\Delta x} = \frac{\gamma\, \mathrm{D_o}^2}{32\mu} J$$

Si consideri poi l'equazione di Darcy-Weisbach (DW).

$$Eq.DW: \quad J = \frac{f}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Il numero di resistenza per regime laminare

Se si esprime la cadente piezometrica nelle due equazioni e si eguaglia, si ottiene:

$$\frac{32\mu V}{\gamma D^2} = \frac{f}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Si trova per tale via che f=64/Re (Re=numero di Reynolds).

$$\mathrm{f} = \frac{64\mu}{\rho V D} = \frac{64}{R_e}$$

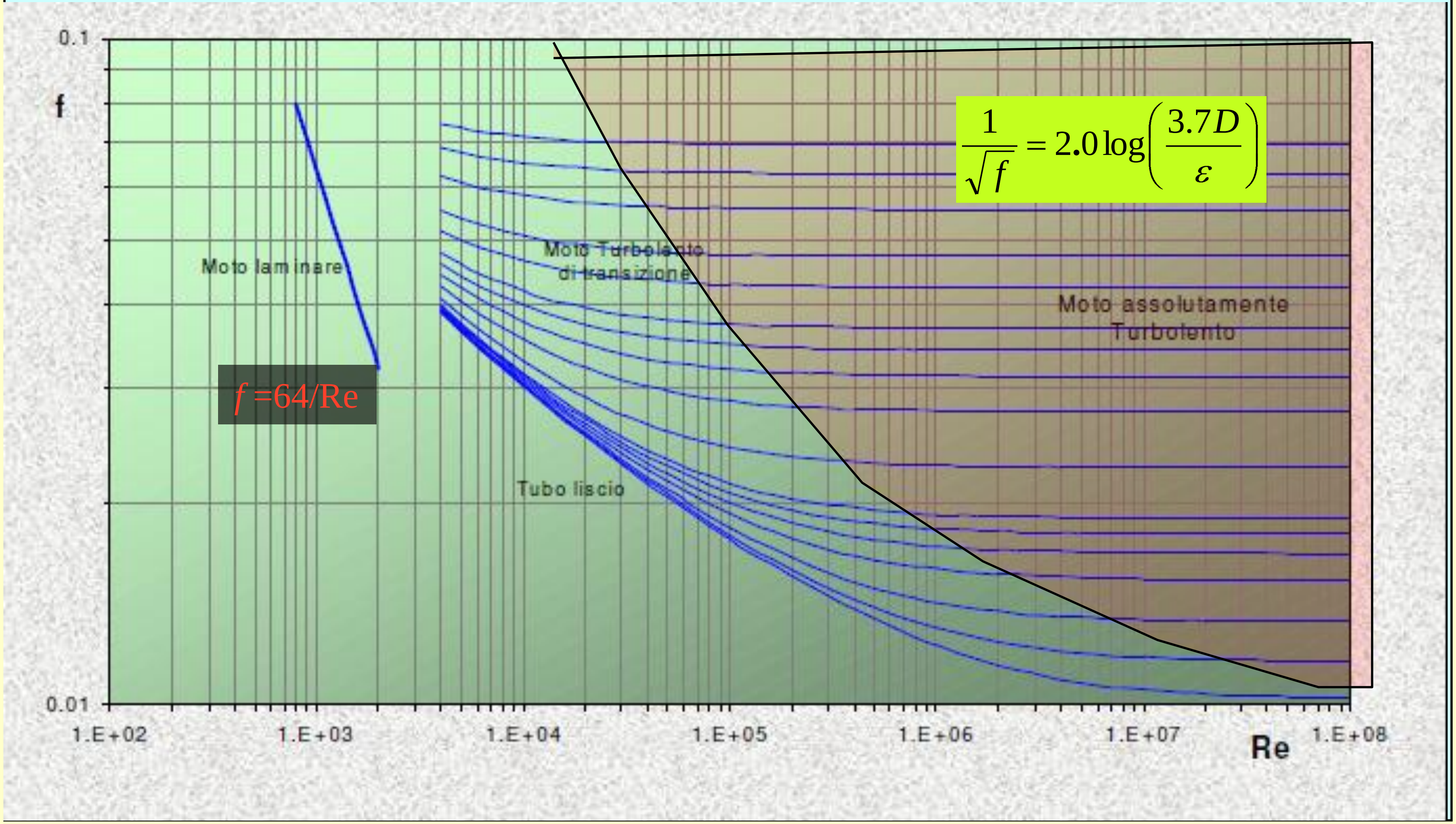
Poichè questa relazione si può scrivere come log(f)=log(64)-log(Re), si può affermare che il regime laminare viene descritto come una retta a pendenza -1 in un diagramma bilogaritmico di f e Re.

Il numero di resistenza per regime turbolento

- Nel caso del regime turbolento, il numero di resistenza invece dipende esclusivamente dal rapporto fra la scabrezza ε e la dimensione della condotta D:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{3.7D}{\varepsilon}\right)$$

Diagramma di Moody: in questo diagramma vengono visualizzate i tre regimi (laminare, di transizione e turbolento).
Nota: D=diametro; e=scabrezza equivalente; f=numero di resistenza.
Permette di determinare il numero di resistenza, e quindi di valutare le perdite di carico, per ogni tipo di regime.



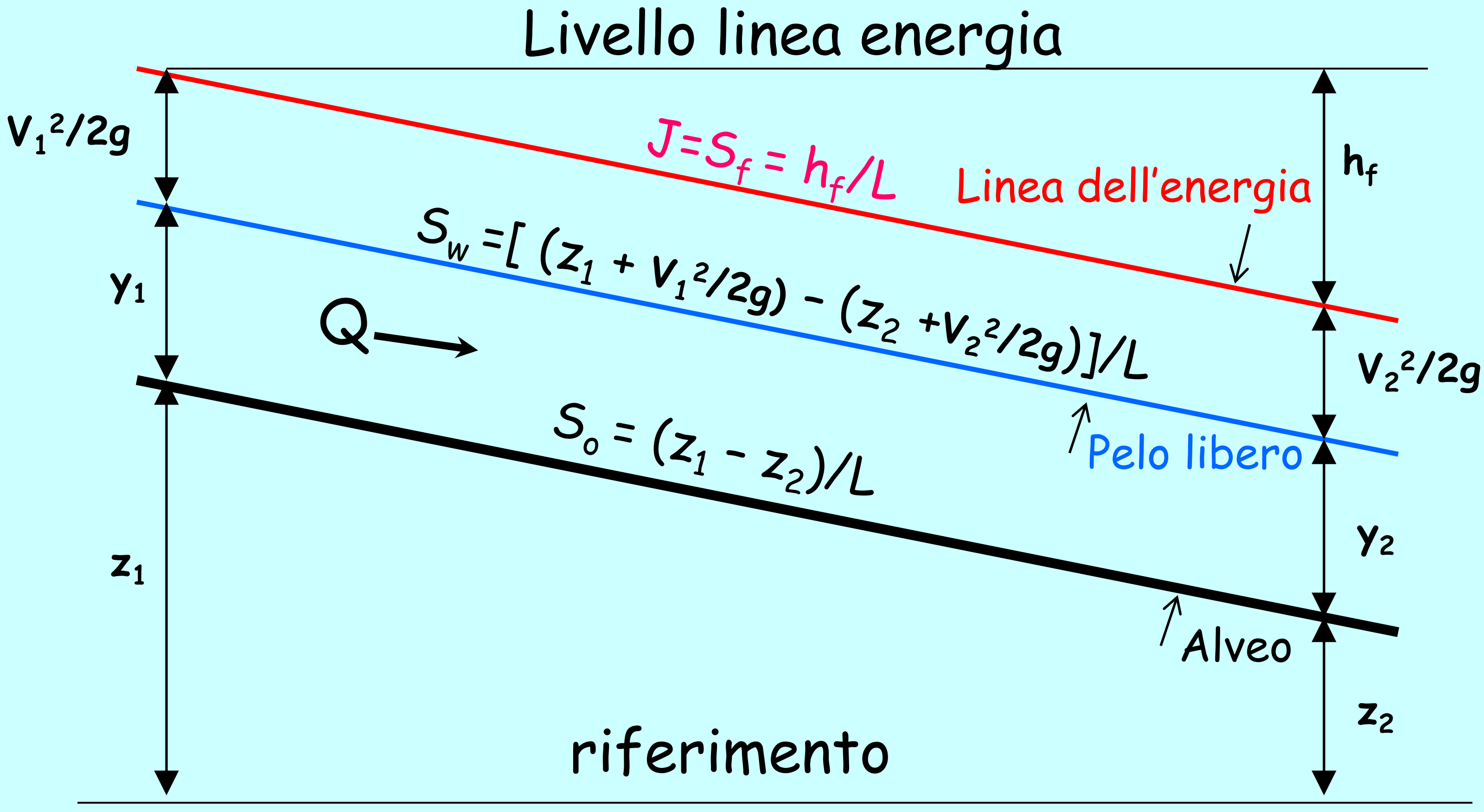
Il diagramma di Moody permette di valutare, con l'espressione di Darcy-Weisbach, la velocità media V (e quindi anche la portata Q) in un tubo di scabrezza nota, conosciuta che sia la cedente piezometrica J.

Di converso, consente di calcolare la cedente J necessaria a convogliare una assegnata portata.

Mentre il secondo problema può essere risolto direttamente, il primo deve essere risolto per tentativi (infatti, l'incognito valore della velocità media compare anche nel numero di Reynolds).

- **Idraulica dei canali:**
- **Geometria (raggio idraulico);**
- **Equazione di Chezy;**
- **Equazione di Manning;**

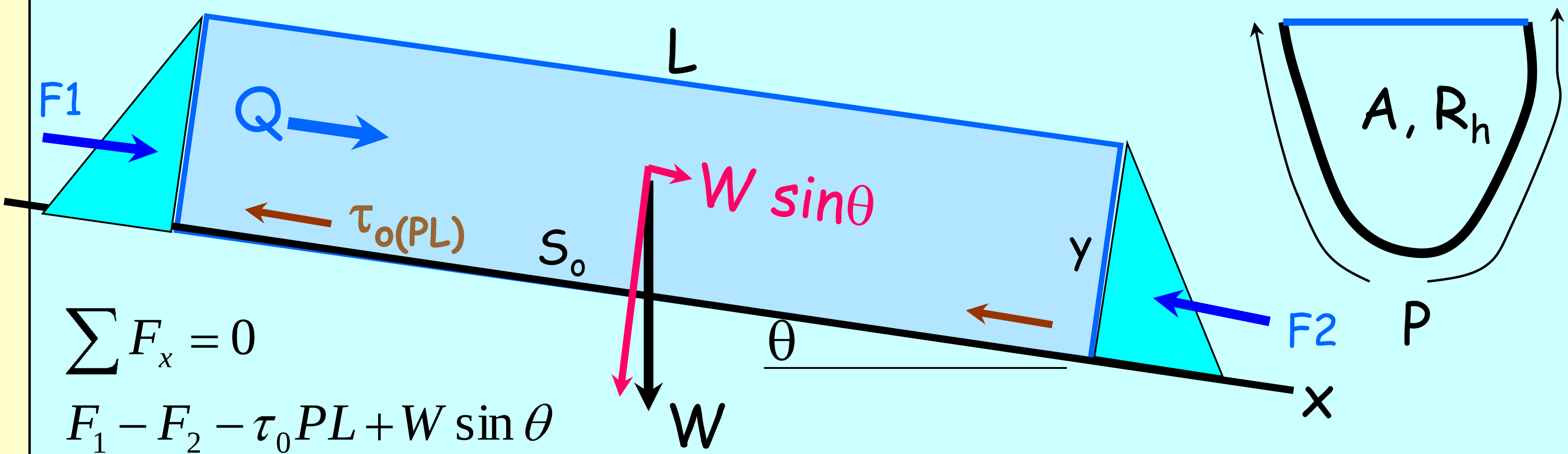
Termini e definizioni per analisi idraulica del moto in canale



Per *moto uniforme*: $y_1 = y_2$ and $S_o = S_w = S_f$; Ovvero: pendenza del fondo= =pendenza dei carichi idrostatici= =pendenza della linea dell'energia (J)

Da Bernoulli (generalizzato): $z_1 + y_1 + V_1^2/2g = z_2 + y_2 + V_2^2/2g + h_f$

Bilancio delle forze in direzione parallela al moto



$$\sum F_x = 0$$

$$F_1 - F_2 - \tau_0 PL + W \sin\theta$$

$$F_1 - F_2 \quad moto\ uniforme$$

$$\tau_0 PL = W \sin\theta = (AL\gamma) S_0$$

$$\tau_0 = \left(\frac{A}{P}\gamma\right) S_0 = R_H \gamma S_0$$

$$R_H = \frac{A\,(area\ sez\ liquida)}{P\,(perimetro\ bagnato)}$$

dove:
A=area della sezione liquida;
P=perimetro bagnato;
τ_0= tensione tangenziale alla parete
γ=peso specifico acqua;
R_h=raggio idraulico;
S_0=pendenza del fondo.

Raggio Idraulico: (Area Liquida)/(Perimetro bagnato)

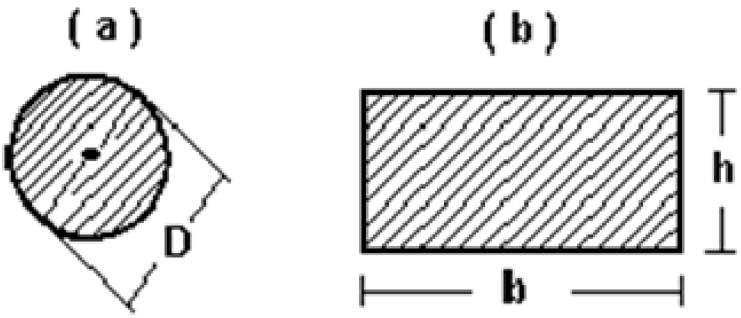
Esempio di calcolo per figure semplici

Per sezione circolare

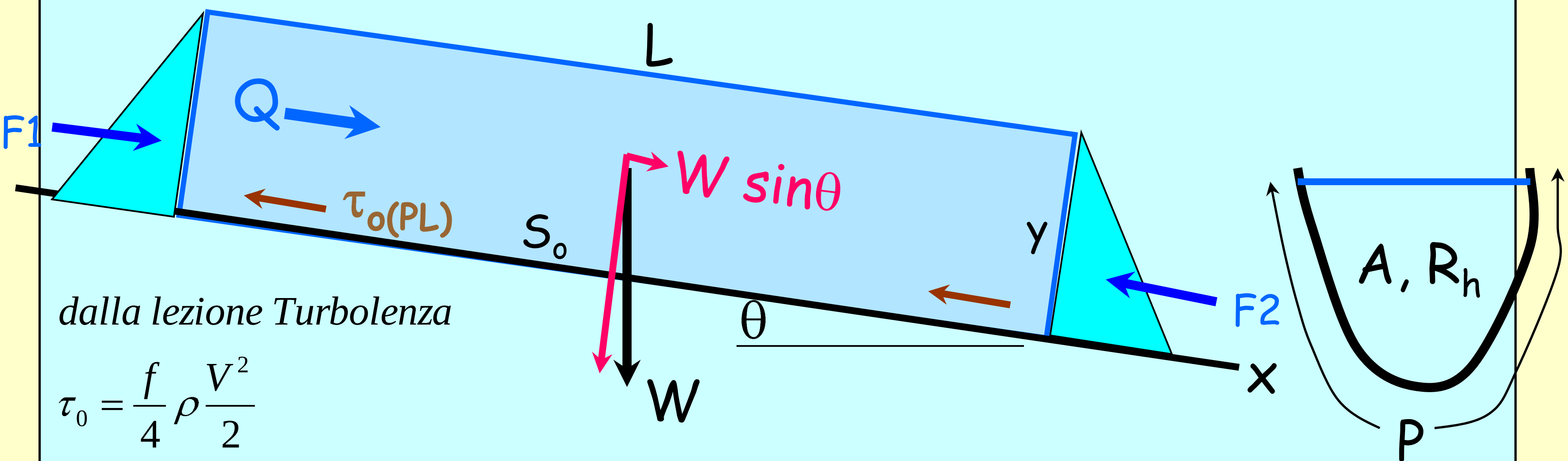
$$R = \frac{A}{C} = \frac{\pi \frac{D^2}{4}}{\pi D} = \frac{D}{4}$$

Per sezione rettangolare

$$R = \frac{A}{C} = \frac{b\,h}{b + 2h}$$



Equazioni di moto uniforme



dalla lezione Turbolenza

$$\tau_0 = \frac{f}{4}\rho\frac{V^2}{2}$$

da equilibrio

$$\tau_0 = R_H \gamma S_0$$

uguagliando le 2 definizioni

$$\tau_0 = \frac{f}{4}\rho\frac{V^2}{2} = R_H \gamma S_0$$

$$V = \sqrt{\frac{8}{f} g R_H S_0} = C_0 R_H^{0.5} S_0^{0.5}$$

Richiamando la relazione fra tensione tangenziale e caratteristiche del moto come descritta nella lezione sulla Turbolenza ed uguagliandola a quella ottenuta tramite l'esame della condizione di equilibrio si ottiene la relazione significativa che consente di calcolare la velocità MEDIA sulla base di: 1) scabrezza, 2) raggio idraulico, 3) pendenza del fondo.

Equazione di Gauckler-Strickler per moto uniforme

Gli sviluppi precedenti quindi mostrano come la velocità media in canale possa essere espressa come segue:

$$V = C_0 R_H^{1/2} S_0^{1/2} \quad (eq.\, Chezy)$$

dove C dipende dalla scabrezza, dal tirante e dalla velocità.

L'equazione di Gauckler-Strickler (GS) consente di scindere i fattori di controllo sul parametro moltiplicativo, introducendo il parametro k che dipende dalla scabrezza relativa:

$$V = k R_H^{2/3} S_0^{1/2} \quad (eq.\, GS\ per\ velocità)$$

$$Q = k A R_H^{2/3} S_0^{1/2} \quad (eq.\, GS\ per\ portata)$$

Equazione di Gauckler-Strickler per moto uniforme

$$V = kR_H^{2/3}S_0^{1/2}$$

$$Q = kAR_H^{2/3}S_0^{1/2}$$

dove Q = portata (m^3/s)
V = velocità (m/s)
k = coeffic scabrezza ($m^{1/3}/s$)
A = area liquida (m^2)
R_h = raggio idraulico (m) = A/P
S_0 = pendenza del fondo (m/m)

(dimensioni SI)

L'eq. di Gauckler-Strickler è anche riportata come Eq. di Manning, dove il parametro K è sostituito da n (K=1/n)