Idraulica e Idrologia: Lezione 20
Agenda del giorno

- **Equazione di Gauckler-Strickler;**
- **Problemi per moto uniforme:**

Problema diretto ed inverso in:

Sezione rettangolare;

Sezione trapezia.

Equazione di Gauckler-Strickler per moto uniforme

$$V = kR_H^{2/3}S_0^{1/2}$$

$$Q = kAR_H^{2/3}S_0^{1/2}$$

dove Q = portata (m^3/s)
V = velocità (m/s)
k = coeffic scabrezza ($m^{1/3}/s$)
A = area liquida (m^2)
R_h = raggio idraulico (m) = A/P
S_0 = pendenza del fondo (m/m)

(dimensioni SI)

L'eq. di Gauckler-Strickler è anche riportata come Eq. di Manning, dove il parametro K è sostituito da n (K=1/n)

I fattori che influenzano la scabrezza (K)

- Scabrezza del fondo – granulometria del sedimento, tipologia del rivestimento
- Grado & tipologia di vegetazione (cespugli, alberi, etc.)
- Stagione (presenza di foglie)
- Morfologia del canale
- Alluvionamenti ed erosioni
- Presenza di trasporto solido
- Ostruzioni locali
- Tirante idrico

Metodi di stima della scabrezza k

- Foto pubblicate (vedi nel seguito)
- Tabelle
- Conversione da espressioni disponibili per Chezy e Darcy-Weisbach
- Relazioni fra il parametro di scabrezza e distribuzione granulometrica (Strickler)

Relazione fra indici di scabrezza e natura della superficie

Si deve a Strickler (1923) la seguente relazione fra il valore di n ed il parametro di granulometria d_{50}, che rappresenta il diametro del vaglio che consente il passaggio del 50%del materiale:

$$\frac{1}{k} = \frac{{d_{50}}^{1/6}}{21.2}$$

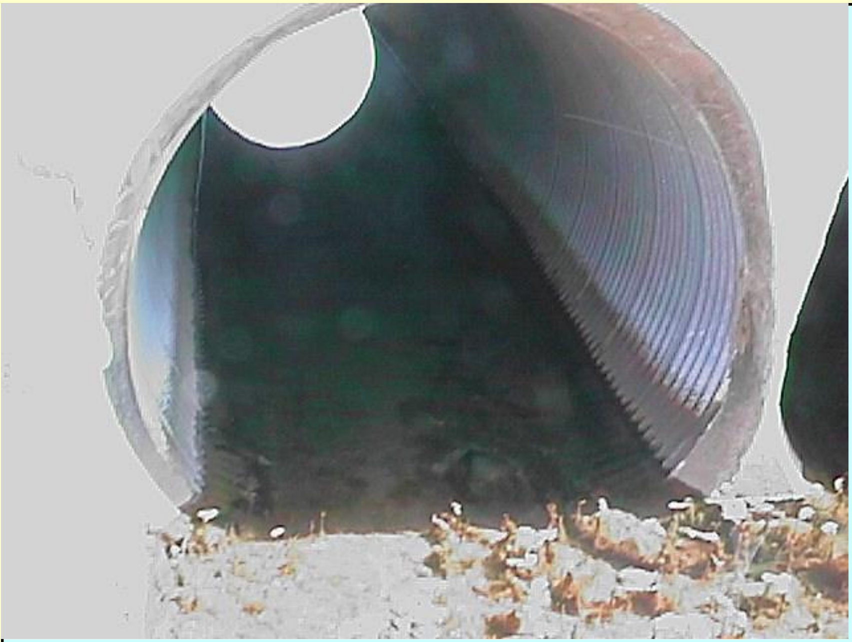
$$d_{50}(m)$$

Valori indicativi di scabrezza per diverse superfici.

Natura superficie	K
Alveo in terra, rettilineo	40-50
Alveo in terra, meandriforme	20-33
Alveo in ghiaia (75-150mm) rettilineo	25-33
Canali non rivestiti, in terra, rettilinei	40-55
Canali non rivestiti, in roccia	22-40
Canali rivestiti (intonaco cementizio)	60-83

Canale trapezoidale con pareti rivestite in cemento:
$K \approx 77$

Canali a sezione trapezoidale con rivestimento in cemento
$K \approx 77.0$



$K \approx 42$

$K \approx 71$

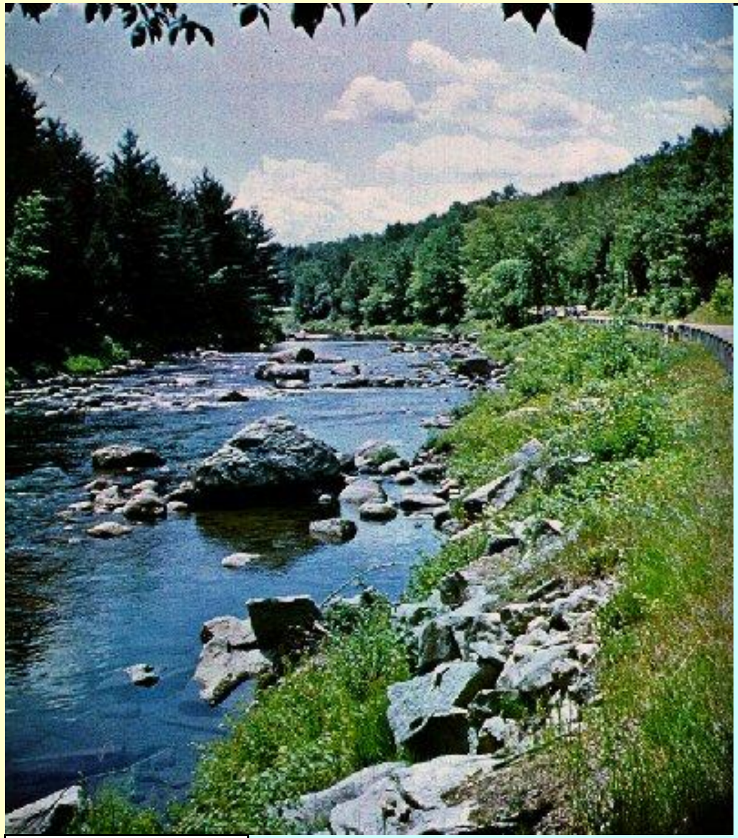
Condotte in rivestimento cementizio e condotte in rivestimento di acciaio corrugato

Canalette di forma diversa con pareti in cemento:

$K \approx 67$

$K \approx 16.7$

Piccoli canali con fondo e sponde caratterizzati da macroscabrezze



$K \approx 18.2$

Alvei torrentizi con macroscabrezze (la scabrezza del contorno bagnato ha una dimensione media significativa rispetto al tirante idrico).
In tali situazioni l'elevata scabrezza del fondo disturba notevolmente la corrente che presenta, soprattutto nelle fasi di piena, intense agitazioni, salti, cascatelle, macrovorticità, forti aerazioni ed emulsionamenti, in sintesi fenomeni dissipativi assai intensi.

fondo
$K \approx 20.0$
Sponde
$K \approx 15.4$

Alvei torrentizi caratterizzati da perimetro bagnato composto da segmenti a scabrezza differenziata

Tipologia di problemi per il moto uniforme

$$v = K R_h^{2/3} s_0^{1/2}; \quad Q = K A R_h^{2/3} s_0^{1/2}$$

$$v\ [m s^{-1}];$$

$$Q\ [m^3 s^{-1}];$$

$$A\ [m^2];$$

$$R_h\ [m].$$

$$s_0\ [-]$$

1. Soluzione diretta – dato n, geometria, tirante e pendenza
   Trovare Q

2. Soluzione indiretta – data la portata, n, geometria e pendenza
   Trovare l'altezza di moto uniforme

1. Problema diretto – dato n, geometria, tirante e pendenza

   Trovare Q

   Sezione rettangolare

Problema 1.1

Per un canale rettangolare largo 5 m con coefficiente di scabrezza ks= 20 $m^{1/3}/s$ (ks=1/n Manning), pendenza del fondo i=0.001, e tirante pari ad 1.6 m, calcolare la portata Q.

Determinare successivamente:

-la pressione agente sul fondo;

-la spinta sulle pareti laterali;

-la tensione tangenziale agente sul contorno bagnato.

Soluzione

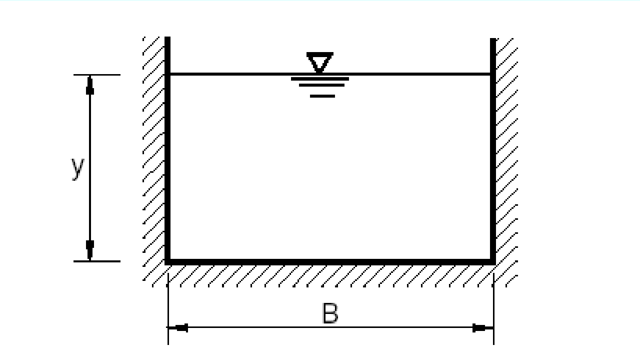
B=5m

Ks=20 $m^{1/3}/s$

i=0.001

y=1.6 m

In questo caso di problema diretto,
si determina il raggio idraulico Rh, pari a



$$Rh = \frac{By}{B+2y} = \frac{5\cdot 1.6}{5+2\cdot 1.6} = \frac{8}{8.2} = 0.98\text{m}$$

Problema 1.2

Soluzione

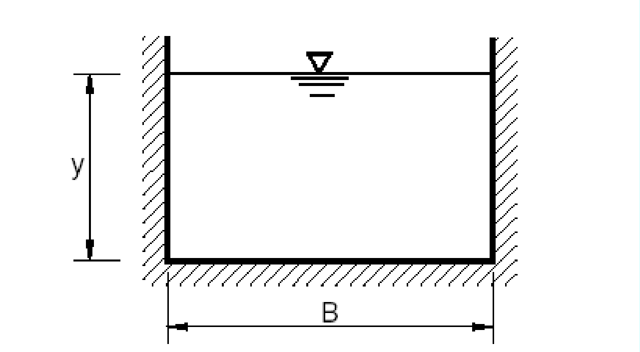
B=5m
Ks=20 $m^{1/3}/s$
i=0.001
y=1.6 m

Si determina quindi direttamente la portata, tramite l'equazione

$$Q = k \cdot Rh^{2/3} A \cdot i^{0.5} =$$

$$20 \cdot 0.98^{2/3} \cdot 8 \cdot 0.001^{0.5} =$$

$$5 m^3 / s$$



Problema 1.3

La pressione agente sul fondo dipende da y, e si determina mediante le consuete relazioni dell'idrostatica.

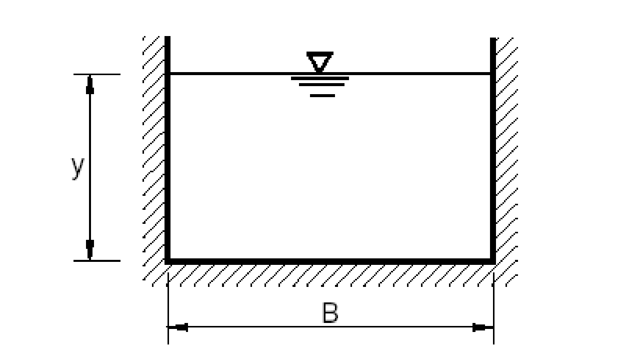
$$p = \gamma h = 1000 \cdot 9.8 \cdot 1.6 = 15.6\ KPa$$

La tensione media agente sul profilo bagnato si determina sulla base dell'equazione seguente

$$\tau_0 = \gamma \cdot \mathrm{Rh} \cdot \mathrm{i} =$$

$$1000 \cdot 9.8 \cdot 0.98 \cdot 0.001 =$$

$$9.6\ \mathrm{Pa}$$



Problema – 2.1

Calcolare la profondità di moto uniforme di un canale rettangolare largo 5 m con coefficiente di scabrezza ks= 20 $m^{1/3}/s$ (ks=1/n Manning), e pendenza del fondo i=0.001, per una portata Q=6 m^3/s.

Soluzione:

B=5m

Ks=20 $m^{1/3}/s$

i=0.001

Q=6 m^3/s

2. Problema inverso – dato Q, geometria e pendenza

Trovare tirante y

Sezione rettangolare

Problema – 2.2

In questo caso la relazione che consente di determinare la profondità di moto uniforme è la seguente:

$$Q = k \cdot Rh^{2/3} A \cdot i^{0.5} =$$

$$= k \cdot \left(\frac{By}{B+2y} \right)^{2/3} By \cdot i^{0.5}$$

L'equazione è non lineare, e viene risolta per tentativi successivi, nel modo seguente.

Si ipotizza inizialmente che il raggio idraulico possa essere considerato pari a quello di una sezione rettangolare infinitamente larga, e quindi pari ad y.

Allora:

$$Q = k \cdot B \cdot y^{2/3+1} \cdot i^{0.5} = k \cdot B \cdot y^{5/3} \cdot i^{0.5}$$

$$\rightarrow y^{5/3} = \frac{Q}{k \cdot B \cdot i^{0.5}}$$

$$\rightarrow y = \left(\frac{Q}{k \cdot B \cdot i^{0.5}} \right)^{3/5} = \left(\frac{6}{20 \cdot 5 \cdot 0.001^{0.5}} \right)^{3/5} = 1.468 m$$

Problema – 2.3

Il valore di y così ottenuto viene considerato di primo tentativo. Si calcola il valore del corrispondente raggio idraulico:

$$\mathrm{Rh} = \frac{\mathrm{B}\cdot\mathrm{y}}{\mathrm{B}+2\cdot\mathrm{y}} = \frac{5\cdot 1.46}{5+2\cdot 1.46} = 0.92\mathrm{m}$$

Questo valore viene utilizzato per il calcolo della profondità y di moto uniforme. Il calcolo include: i) calcolo della velocità V corrispondente al raggio idraulico di tentativo, ii) calcolo dell'area liquida A, ottenuta come Q/V, e iii) calcolo del tirante y, ottenuto come A/B. In sintesi, si ha:

$$\rightarrow y = \frac{Q}{B\cdot k\cdot Rh^{2/3}\cdot i^{0.5}} = \frac{6}{5\cdot 20\cdot 0.92^{2/3}\cdot 0.001^{0.5}} = 1.998m$$

La differenza percentuale fra i due valori così ottenuti (1.46 m e 1.998 m) è superiore a 2% e quindi il calcolo iterativo deve proseguire nel modo seguente.

Problema – 2.4

Il valore di y pari a 1.998 m viene considerato di secondo tentativo. Si calcola il valore del corrispondente raggio idraulico:

$$Rh = \frac{B \cdot y}{B + 2 \cdot y} = \frac{5 \cdot 1.998}{5 + 2 \cdot 1.998} = 1.11m$$

Questo valore viene utilizzato per il calcolo della profondità y di moto uniforme, ottenendo:

$$\rightarrow y = \frac{Q}{B \cdot k \cdot Rh^{2/3} \cdot i^{0.5}} = \frac{6}{5 \cdot 20 \cdot 1.11^{2/3} \cdot 0.001^{0.5}} = 1.769m$$

La differenza percentuale fra i due valori così ottenuti (1.998 e 1.769 m) è pari al 10 %, e quindi il calcolo iterativo deve proseguire, nel modo indicato fino ad ottenere una differenza percentuale inferiore al 2% (indicativo).

Problema – 2.5

Il valore di y pari a 1.769 m viene considerato di terzo tentativo. Si calcola il valore del corrispondente raggio idraulico:

$$Rh = \frac{B \cdot y}{B + 2 \cdot y} = \frac{5 \cdot 1.769}{5 + 2 \cdot 1.769} = 1.04m$$

Questo valore viene utilizzato per il calcolo della profondità y di moto uniforme, ottenendo:

$$\rightarrow y = \frac{Q}{B \cdot k \cdot Rh \cdot i^{0.5}} = \frac{6}{5 \cdot 20 \cdot 1.04^{2/3} \cdot 0.001^{0.5}} = 1.853m$$

La differenza percentuale fra i due valori così ottenuti (1.769 e 1.853 m) è pari al 5. %, e quindi il calcolo iterativo deve proseguire.

Problema – 2.6

Il valore di y pari a 1.853 m viene considerato di quarto tentativo. Si calcola il valore del corrispondente raggio idraulico:

$$Rh = \frac{B \cdot y}{B + 2 \cdot y} = \frac{5 \cdot 1.853}{5 + 2 \cdot 1.853} = 1.07m$$

Questo valore viene utilizzato per il calcolo della profondità y di moto uniforme, ottenendo:

$$\rightarrow y = \frac{Q}{B \cdot k \cdot Rh \cdot i^{0.5}} = \frac{6}{5 \cdot 20 \cdot 1.07^{2/3} \cdot 0.001^{0.5}} = 1.82m$$

La differenza percentuale fra i due valori così ottenuti (1.853 m e 1.82 m) è pari al 2.08 %, e quindi il calcolo iterativo deve proseguire.

Problema – 2.7

Il valore di y pari a 1.82 m viene considerato di quinto tentativo. Si calcola il valore del corrispondente raggio idraulico:

$$Rh = \frac{B \cdot y}{B + 2 \cdot y} = \frac{5 \cdot 1.82}{5 + 2 \cdot 1.82} = 1.05m$$

Questo valore viene utilizzato per il calcolo della profondità y di moto uniforme, ottenendo:

$$\rightarrow y = \frac{Q}{B \cdot k \cdot Rh^{2/3} \cdot i^{0.5}} = \frac{6}{5 \cdot 20 \cdot 1.05^{2/3} \cdot 0.001^{0.5}} = 1.833m$$

La differenza percentuale fra i due valori così ottenuti (1.833 m e 1.82 m) è inferiore a 2 %, e quindi il calcolo iterativo può terminare. La soluzione è quindi: y=1.826 (valore medio fra i due ultimi valori).

Problema – 2.8

E' possibile verificare che il valore di tirante y pari a 1.826m (che è un valore approssimato) riproduce bene il valore di portata di ingresso (6 m3/s):

$$Q = k \cdot Rh^{2/3} A \cdot i^{0.5} =$$

$$= k \cdot \left(\frac{By}{B + 2y} \right)^{2/3} By \cdot i^{0.5} =$$

$$= 20 \cdot \left(\frac{5 \cdot 1.826}{5 + 2 \cdot 1.826} \right)^{2/3} 5 \cdot 1.826 \cdot 0.001^{0.5} = 5.99\ m^3 s^{-1}$$

Problema – 2.8 organizzazione flusso di calcolo

Il flusso di calcolo che permette l'efficace risoluzione del problema può essere impostato in una tabella come segue:

y (m)	Rh=(By)/(B+2y) (m^2)	V=k*$Rh^{2/3}i^{0.5}$(ms^{-1})	y=Q/(B*v) (m)	variazione %
1.468	0.92	0.600	1.998	
1.998	1.11	0.678	1.769	10.29
1.769	1.04	0.647	1.853	-4.87
1.853	1.07	0.659	1.820	2.08
1.820	1.05	0.654	1.833	-0.93

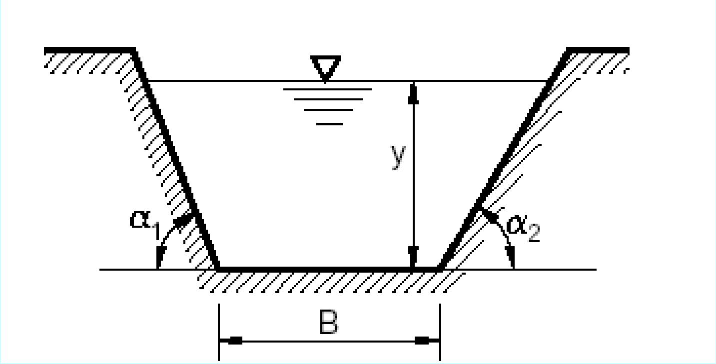
3. Problema inverso – dato Q, geometria e pendenza

Trovare tirante y

Sezione trapezia

Problema sezione trapezia

Si abbia un canale di sezione trapezia con le pareti ed il fondo in terra ($K=40\ m^{1/3}/s$), ed avente una pendenza del fondo pari a $i=0.0002$. Si determini la profondità dell'acqua nel canale quando in esso fluisce una portata di 25 m^3/s, in condizioni di moto uniforme. Determinare inoltre la spinta sulle pareti laterali



Soluzione:
$B=20.0m$
$Ks=40\ m^{1/3}/s$
$i=0.0002$
Pendenza pareti=3:1 (quindi n=3)

Nota:
Per un canale a sezione trapezia si indica con la scarpa n la cotangente dell'angolo α. (cotan α=(cos α/sen α)). Allora l'area della sezione triangolare è data da: $0.5y^2n$.
Allora, ipotizzando due pendenze diverse per le pareti (n1 ed n2):
$A= By+0.5y^2(n1+n2)$ (se n1=n2=n allora: $A= By+ny^2$)
$P=B+y((1+n_1^2)^{0.5}+(1+n_2^2)^{0.5})$ (se n1=n2=n allora: $P= B+2y(1+n^2)^{0.5}$

soluzione – calcolo area e raggio idraulico

Per la geometria proposta è:

$$A = 20.0 \cdot y + 3.0 \cdot y^2$$

$$P = 20.0 + 2 \cdot y \cdot 10^{0.5} = 20 + 6.32 \cdot y$$

$$Rh = \frac{20.0 \cdot y + 3.0 \cdot y^2}{20 + 6.32 \cdot y}$$

soluzione iterativa

Il problema può essere risolto in modo analogo a quanto fatto per la sezione rettangolare, ovvero per tentativi successivi ed imponendo che la soluzione di primo tentativo sia ottenuta facendo riferimento ad una sezione infinitamente larga. La soluzione di primo tentativo è come segue:

1. ipotesi: Rh=y ed A=By;
2. da cui si ottiene la velocità tramite equazione Gauckler – Strickler

$$v = k \cdot R_h^{2/3} i^{1/2}$$

3. si ottiene quindi un valore di area liquida $A = Q / v$
4. da cui si ottiene il valore di secondo tentativo per y, risolvendo l'equazione di secondo grado dell'area (scritta qui per n1=n2=n). Si seleziona solo il valore positivo fra le due radici dell'eq. di secondo grado.

$$B \cdot y + n \cdot y^2 = A \quad riordinando \quad n \cdot y^2 + B \cdot y - A = 0$$

$$y = \frac{-B + \left(B^2 + 4 \cdot A \cdot n\right)^{0.5}}{2 \cdot n}$$

5. Si torna al punto 1, utilizzando il nuovo valore di y per calcolare Area e Raggio idraulico, e si itera finchè la differenza relativa fra due soluzioni iterative successive è minore del 2%.

soluzione del caso di studio

Q=25m3/s
B=20.0m
Ks=40 $m^{1/3}$/s
i=0.0002
Pendenza pareti=3:1 (quindi scarpa n=3)

$$Q = A \cdot k \cdot Rh^{2/3} i^{0.5}$$

$$A = (20 + 3y)y$$

$$Rh = \frac{(20+3y)\cdot y}{20 + 6.32 \cdot y}$$

Soluzione di primo tentativo (ipotesi: sezione infinitamente larga)

$$R_h = y; \quad A = B \cdot y$$

da cui

$$Q = k \cdot B \cdot y \cdot y^{2/3} \cdot i^{1/2} = B \cdot y^{5/3} \cdot i^{1/2}$$

$$y = \left(\frac{Q}{k \cdot B \cdot i^{1/2}} \right)^{3/5}$$

ovvero

$$y = \left(\frac{25}{40 \cdot 20 \cdot 0.0002^{1/2}} \right)^{3/5} = 1.609m$$

soluzione per tentativi

L'equazione sopra scritta può essere risolta per tentativi. Procedendo in tal modo si perviene ad un valore di 1.52 m.

y (m)	Area (m^2)	Perimetro bagnato (m)	Raggio idraulico (m)	Velocità (m/s)	Area (m^2)	y da soluzione equazione di 2° grado (m)	Differenza percentuale (valore assoluto)
1.61	39.95	30.18	1.32	0.68	36.65	1.50	5.6%
1.50	36.65	29.47	1.24	0.65	38.21	1.55	3.33%
1.55	38.21	29.80	1.28	0.67	37.45	1.52	1.9%

Verifica della soluzione

Il valore di tirante pari a 1.52 m porta al seguente valore di portata

$$Q = A \cdot k \cdot Rh^{2/3} i^{0.5}$$

$$A = (20 + 3y)y = 37.45 m^2$$

$$Rh = \frac{(20 + 3y) \cdot y}{20 + 6.32 \cdot y} = 1.26 m$$

$$Q = 24.76 m^3 s^{-1}$$

valore assai prossimo al valore di progetto (25 m3/s).
Si possono ovviamente conseguire valori più accurati di tirante riducendo la tolleranza di errore (2%), per esempio utilizzando una tolleranza di 1%.