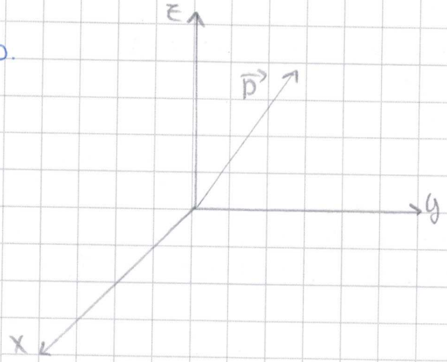
$$\vec{u_a} = \frac{10}{\sqrt{129}}\vec{u_x} - \frac{5}{\sqrt{129}}\vec{u_y} - \frac{2}{\sqrt{129}}\vec{u_z}$$

prova $u_a = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{129}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{129}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{129}}\right)^2} = 1$

CINEMATICA

Descrive moto degli oggetti. Non spiega il xk (v. dinamica), descrive solo come si muovono.
Inizialmente è solo cinematica puntiforme.
Il significato ~~nel tem~~ del tempo sta nel mutare delle cose, esso è il parametro del spostamento.



$\vec{p}(t)$ vettore posizione

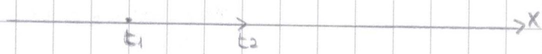
T periodo di rotazione terrestre = 24h
$$\delta = \frac{T}{24 \cdot 3600}$$

ogni secolo Terra rallenta di 2 millesimi per azione combinata di Sole e Luna sulle maree terrestri. Secondo si basa su oscillazioni di atomo di Cesio-133.

$$\vec{p}(t) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$ posizioni descritte al variare del tempo: legge oraria

Moto rettilineo uniforme:

legge oraria: $x(t)$



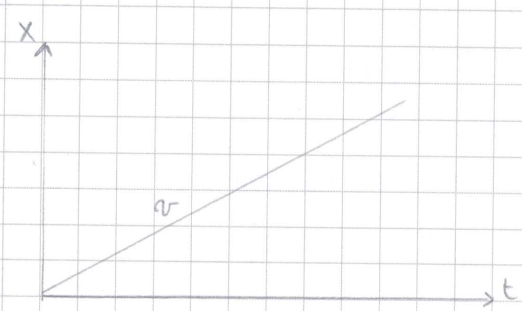
$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{\Delta t}$$

es. $t_1 = 17.45$
$t_2 = 19.30$
$x_f = 85\,km$

$$v_m = \frac{(85-0)\,km}{19h\,30min - 17h\,45min} = \frac{85.000\,m}{(19 \cdot 3600 + 30 \cdot 60) - (17 \cdot 3600 + 45 \cdot 60)} = 13{,}5\,m/s$$

$13{,}5\,m/s \cdot 3{,}6 = 48{,}6\,km/h$

Grafico della legge oraria:
v costante (grafico è retta)

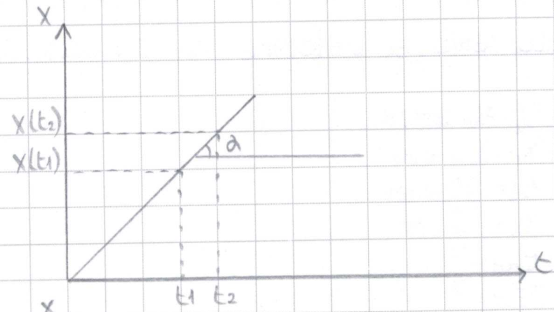


velocità istantanea:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

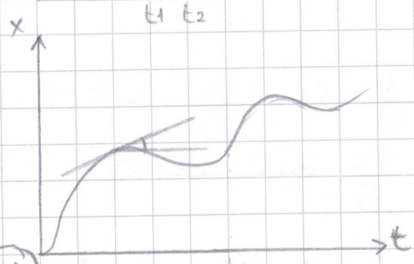
Velocità istantanea è derivata di funzione rispetto al tempo

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ coefficiente angolare retta



la velocità istantanea è la tan(α) in tal punto
Retta tanto più ripida se + veloce, orizzontale è nulla, se neg. sta tornando indietro.

$x(t) \to v(t)$ tramite legge oraria
e la velocità istantanea mi dà
tan(α) dell'angolo della tangente
alla curva in quel punto/istante



$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

se v è costante
ho legge oraria

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + x_0$$

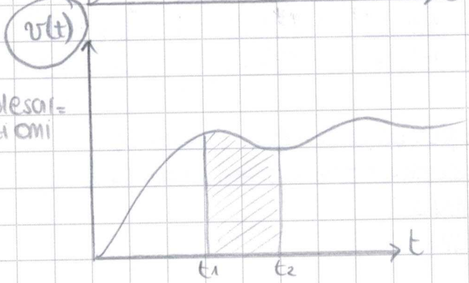


grafico descrive variazioni di v(t).

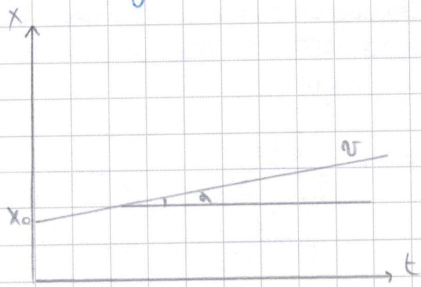
$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

Se ho solo velocità posso det. la mia posizione a meno che abbia la mia posizione in un dato istante. Con legge oraria invece posso dedurre tutto, anche la velocità.
Area sotto curva sottesa è spazio percorso (calcolabile con integrale)

Moto rettilineo uniforme: $x(t) = x_0 + vt$

$\tan(\alpha) = v$

Se orizzontale $v = 0\,m/s$, se neg. v neg. nel verso



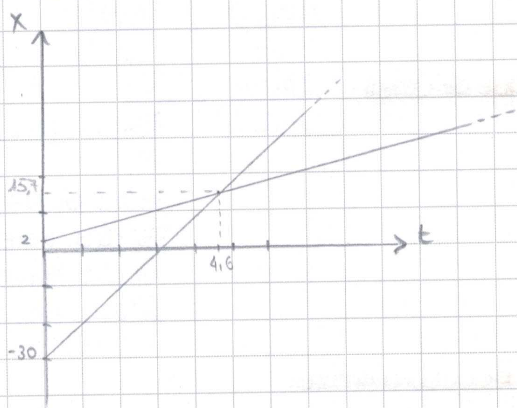
es.

$x_A(t) = x_{0A} + v_A t = -30 + 10t$
$x_B(t) = x_{0B} + v_B t = 2 + 3t$

$x_{0A} = -30\,m$
$v_A = 10\,m/s$
$x_{0B} = 2\,m$
$v_B = 3\,m/s$

$\begin{cases} x_A = -30 + 10t \\ x_B = 2 + 3t \end{cases}$ trovo quando si incontrano

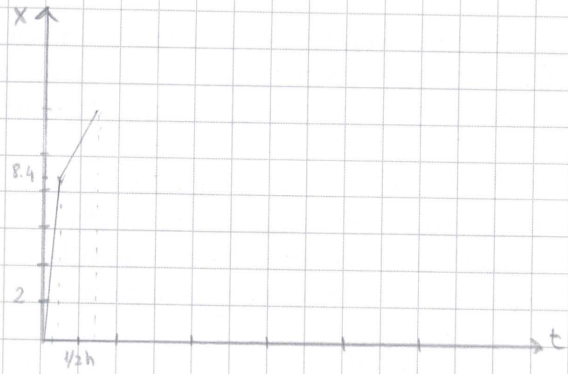
$-30 + 10t = 2 + 3t$
$7t = 32$
$t = \frac{32}{7} \sim 4,6\,s$



$x_A(4,6\,s) = -30 + 10(4,6) \sim 15,7\,m$ dove si incontrano

Moto rettilineo uniforme ha v = costante e $\tan(\alpha)$ in grafico = v

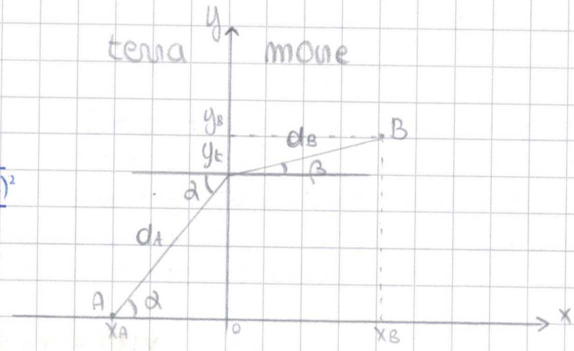
es. $v_1 = 70\ km/h$
$x_1 = 8.4\ km$
$t_2 = 30\ min$
$x_2 = 2\ km$
$t_{tot} = ?$
$v_m = ?$



$$t_{tot} = \frac{x_1}{v_1} + t_2 = \left(\frac{8.4}{70} + 0,5\right) h =$$
$$= \frac{8.4}{70} \cdot 3600 + 30 \cdot 60 = 2.232\ s$$

$$v_m = \frac{x_{tot}}{t_{tot}} = \frac{x_1 + x_2}{t_{tot}} = \frac{8.4 + 2}{2.232} = 4,66\ m/s$$

es. In che punto cambiare elemento per minimizzare il tempo tra A e B.
$v_t = 7\ m/s$
$v_m = 1\ m/s$



$$t_{tot} = \frac{d_A}{v_t} + \frac{d_B}{v_m} = \frac{\sqrt{x_A^2 + y_t^2}}{v_t} + \frac{\sqrt{x_B^2 + (y_B - y_t)^2}}{v_m}$$

Problema di minimo tale che $t(y_t)_{min}$
allora $\frac{dt}{dy_t} = 0$ in quel punto

$$t'_{tot} = \frac{\cancel{2} y_t}{\cancel{2}\sqrt{\ } \cdot v_t} - \frac{\cancel{2}(\ )}{\cancel{2}\sqrt{\ } \cdot v_m} = 0$$
$$\frac{y_t}{\sqrt{\ } \cdot v_t} = \frac{(\ )}{\sqrt{\ } \cdot v_m}$$
$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{v_t} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{v_m}$$

$\frac{y_t}{\sqrt{\ }}$ cateto diviso ipotenusa = $\operatorname{sen}(\alpha)$

$\frac{(\ )}{\sqrt{\ }}$ cateto diviso ipotenusa = $\operatorname{sen}(\beta)$

Legge di Snell: $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{v_t}{v_m}$ (calcolando ciò bisogna sa dove cambiare elemento)

↑
indice di rifrazione dell'aria fratto in. rifr. nel mezzo
(v luce in mezzo fratto v luce in aria)
Si può riscrivere l'ottica dicendo che la luce nel percorso tra la sorgente e pozzo sceglie sempre percorso che le minimizza il tempo
Nel nostro caso $\operatorname{sen}(\alpha) = 7 \operatorname{sen}(\beta)$ per minimizzare tempo

Accelerazione:

$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$ misurata in m/s^2, $[L][T]^{-2}$

Parametro che descrive variazione di velocità

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$ derivata (accelerazione istantanea)

$$= \frac{d^2x}{dt^2}$$ è la derivata seconda

Moto uniformemente accelerato: $a =$ costante

$$v = v_0 + \int_0^t a \, dt$$ in generale

se $a =$ costante: $v = v_0 + at$ poiché tiro fuori a dall'integrale

rispetto a $x(t) = x_0 + \int_0^t v \, dt = x_0 + \int_0^t (v_0 + at) \, dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

↑ legge oraria in tale moto

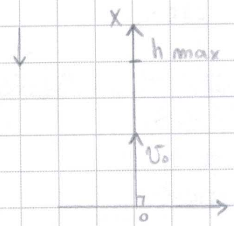
es. $t = 6.20\,s$
da 0 a 100 km/h
$a_m = ?$

$$a_m = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{100 - 0}{6,2} = 6,61\ m/s$$

es. da 0 a 100 km/h
$t = 3,23\,s$
$a_m = ?$

$$a_m = \frac{100}{3,23} = 8,6\ m/s^2$$

es. Analizziamo il moto di caduta:
$a = -g$
$x_0 = 0$
$v_0 = v_0$



$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$ legge oraria scritta in tal sistema di riferimento

Quale è h_{max}? Quanto t occorre?
↳ max quando derivata di $x(t)$ rispetto a $t = 0$ (problema di max) => $v = 0$ (inversione moto)

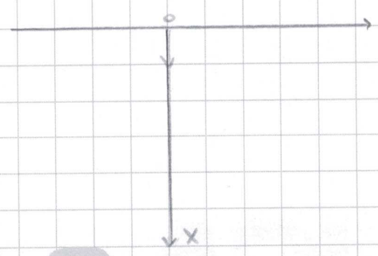
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 - gt = 0$$ perché s'inverte il moto

$$v_0 = gt \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Se derivo rispetto a t la legge oraria trovo v che è uguale 0, così facendo trovo max (min) del t (variabile) oppure so che nell'inversione del moto $v = 0$ e la inserisco in $v = v_0 + at$

h_{max} $$x(t_{max}) = v_0 \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right) + \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

es. $a = g$, $x_f = h$
$x_0 = 0$
$v_0 = 0$



$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$v_f = v_0 + a t_f = 0 + a t_f = a t_f = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\overset{!}{=} \sqrt{\frac{2h \cdot g^2}{g}} = \sqrt{2hg}$

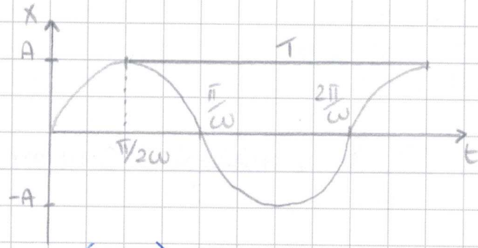
anche qui o derivo $x(t) \rightarrow v(t)$ e inserisco $t = t_f$ o prendo direttamente $v = v_0 + at$

Moto armonico:

$x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ legge oraria
punto che oscilla intorno a sua origine

estremi A, $-A$
A = ampiezza
ω = pulsazione

$\theta(t) = \omega t$ velocità angolare



$A_{max} = \omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2\omega}$

misura: rad/s

T periodo $= \frac{2\pi}{\omega}$ moto periodico oscillatorio

$\left(T = \frac{1}{\nu}\right)$

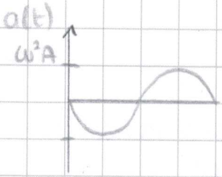
f frequenza $= \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \nu$ misurata in Hertz (numero di oscillazioni nel secondo)

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\cos(\omega t) \cdot \omega$

A e ω costanti

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 x(t)$

(max agli ext
nulla al centro)



v istantanea $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow$

$dx = v(t)\, dt$

$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$

l'integrale è $x - x_0$
(segno neg. $\Rightarrow$ cambio segno)

se v è costante

$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^{t} dt$

$\overset{!}{=} x_0 + v(t - t_0)$

legge oraria: $\overset{!}{=} x_0 + vt$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$dv = a(t)\,dt$$

$$\Delta v = \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ se $t_0 = 0$ $v(t) = v_0 + at$

- $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,d(t)$ legge oraria

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(t-t_0))\,dt$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\,dt + \int_{t_0}^{t} a(t-t_0)\,dt$$

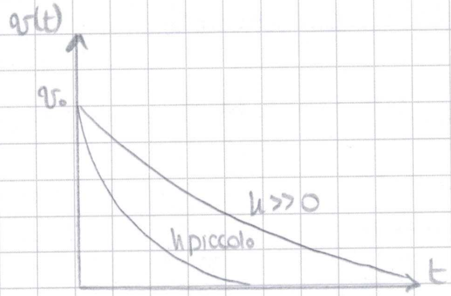
$= x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)$ se $t_0 = 0$ $x(t) = v_0t + x_0 + \frac{1}{2}at$

velocità proporzionale alla ω pulsazione (dunque alla frequenza)

Moto smorzato:

Descritto da a opposta alla velocità (decelerazione opposta a ~~gravità~~ velocità)

$a = -hv$ dove $a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = -hv$ eq. differenziale variabili separabili



$$\frac{dv}{v} = -h\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v}\,dv = \int_{t_0}^{t} -h\,dt$$

$\ln(v) - \ln(v_0) = -h(t - t_0)$ se $t_0 = 0$ s

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -ht$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-ht}$$

$$v(t) = v_0 e^{-ht}$$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$ se $x_0 = 0$

$$= \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$= \int_{t_0}^{t} v_0 e^{-ht}\,dt$ v_0 costante

$= v_0 \left[-\frac{e^{-ht}}{h}\right]_{t_0}^{t}$ se $t_0 = 0$

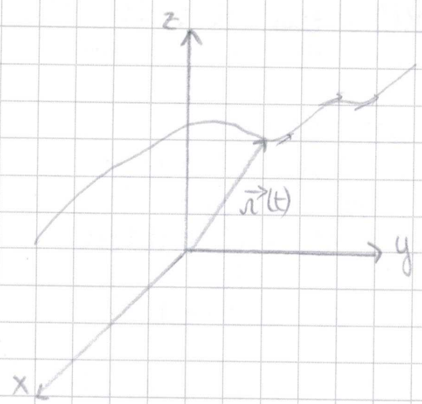
$$= v_0 \left(-\frac{e^{-ht}}{h} + \frac{1}{h}\right)$$

$$= \frac{v_0}{h}\left(1 - e^{-ht}\right)$$

All' infinito moto tende asintoticamente a distanza $x_f = \frac{v_0}{h}$

Moto in più dimensioni:

Raggio vettore determina punto che nel tempo descrive una traiettoria cambiando posizione

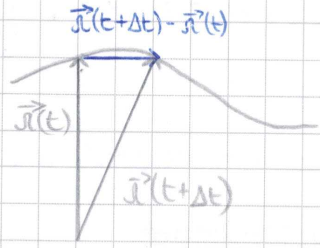


$\vec{r}(t) = r_x \vec{u_x} + r_y \vec{u_y} + r_z \vec{u_z}$

$\begin{cases} r_x = r_x(t) \\ r_y = r_y(t) \\ r_z = r_z(t) \end{cases}$ la conoscenza contemporanea delle tre coordinate mi dà descrizione totale di $\vec r(t)$ che è la legge oraria

$\vec v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)}{\Delta t}$ sopra la Δ di vettori descrive Δ di spostamento (nel complesso il tutto è ancora un vettore)

Se Δt è piccolo, vettore differenza è tangente a traiettoria, e il vettore velocità è parallelo ad esso. (variazione di posizione rispetto al tempo)



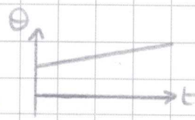
$\vec v = \frac{d\vec r}{dt}$

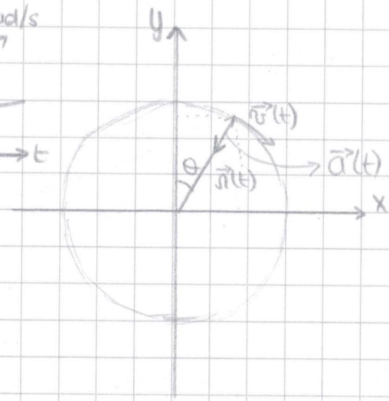
$\vec a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec v(t+\Delta t) - \vec v(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec v}{dt}$

$\vec a = 0$ se $\vec v$ è costante (in moto 1 direzione: il suo valore scalare non cambia nel tempo, in + direzioni: non basta modulo costante serve anche direzione e verso costanti, costante in senso vettoriale).

Moto circolare uniforme: $x = vt \Rightarrow \alpha = \omega t$ rad/s

$\vec r = r\sin(\theta)\,\vec{u_x} + r\cos(\theta)\,\vec{u_y}$





$\theta(t) = \omega t$ velocità angolare ~~(uniforme se θ~~

funzione che def. come cambia θ nel tempo (θ cresce unifor.)
in gen. $v_{ang.}(t) = \frac{d\theta}{dt}$

$\vec r(t) = r\sin(\omega t)\,\vec{u_x} + r\cos(\omega t)\,\vec{u_y}$

legge oraria: descrive variazione di posizione di punto nel tempo con velocità angolare ~~cost~~ ω

$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = r\omega\cos(\omega t)\,\hat{x} - r\omega\sin(\omega t)\,\vec{u_y}$ $\vec v$ ortogonale alla direzione tangente alla traiettoria

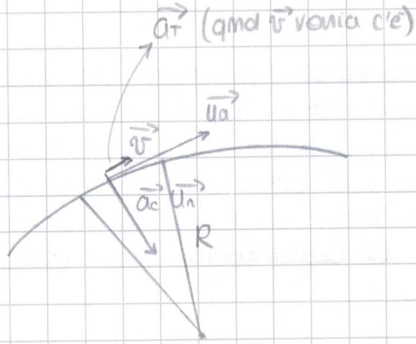
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2(\omega t) + r^2\omega^2\cos^2(\omega t)} = r\omega$

$\vec a(t) = \frac{d\vec v}{dt} = -r\omega^2\sin(\omega t)\,\vec{u_x} - r\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{u_y}$ accelerazione centripeta (diretta verso il centro)

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$

$\Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$

$\Rightarrow a = r\omega^2 = \cancel{r}\frac{v^2}{r^{\cancel{2}}} = \frac{v^2}{r}$



Ho direzione radiale R verso il centro della mia curva. R è raggio di curvatura di curva.

$\vec{a_c} = \frac{v^2}{R}\vec{u_n}$ accelerazione centripeta (componente centripeto/radiale)

Percorrendo moto circolare $\vec{a}$ ha 2 componenti: quella radiale e quella tangente (se la mia velocità non è costante sennò ho solo la radiale)

$\vec{a} = \vec{a_c} + \vec{a_T}$ stessa direzione di velocità

$= \frac{v^2}{R}\vec{u_n} + \frac{dv}{dt}\vec{u_a}$

es. $D = 8m$
$a_c = 2g$

$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v_{tangenziale} = \sqrt{a \cdot r} = 31,8\ km/h$

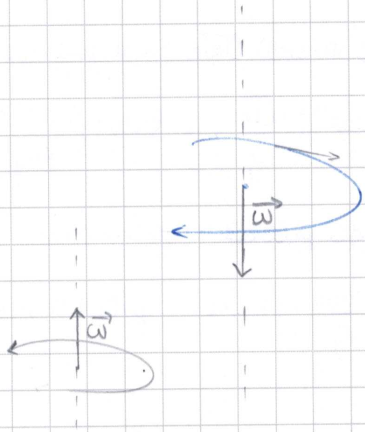
$v = r \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = 2.2\ rad/s$

ν (frequenza) $= \frac{\omega}{2\pi} = 0,35\ Hz$

Moto circolare unif. (2)

ω = velocità angolare

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

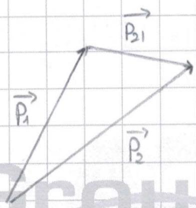


vettore $\vec{\omega}$ concorde col senso della vite lungo la perpendicolare che passa per il centro.

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ prodotto vettoriale

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\vec{a_T}} + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega}}_{\vec{a_c}}$$

Moto relativo:



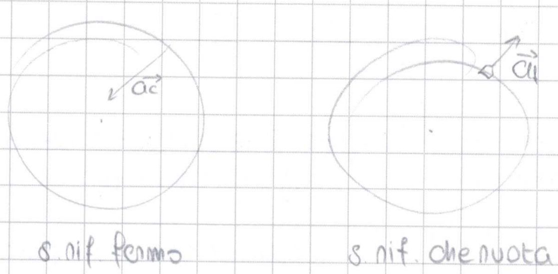
Per descrivere vettori posso scegliere se partire dall'origine o rispetto al P_1: $\vec{P_{21}} = \vec{P_2} - \vec{P_1}$

$\vec{v_{21}} = \frac{d\vec{P_{21}}}{dt} = \frac{d\vec{P_2}}{dt} - \frac{d\vec{P_1}}{dt} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$

la v è la v che ho meno quella che osservo.

$\vec{a_{21}} = \vec{a_2} - \vec{a_1}$

In un sistema di riferimento che ruota trovo che io non mi sto muovendo, ma è solo un sistema di riferimento relativo e per avere $\vec{a}$ devo tener conto di rotazioni e dalla mia $\vec{a}$ sottraggo quella centripeta $\Rightarrow$ ho $\vec{a}$ centrifuga che è quella che avverto.

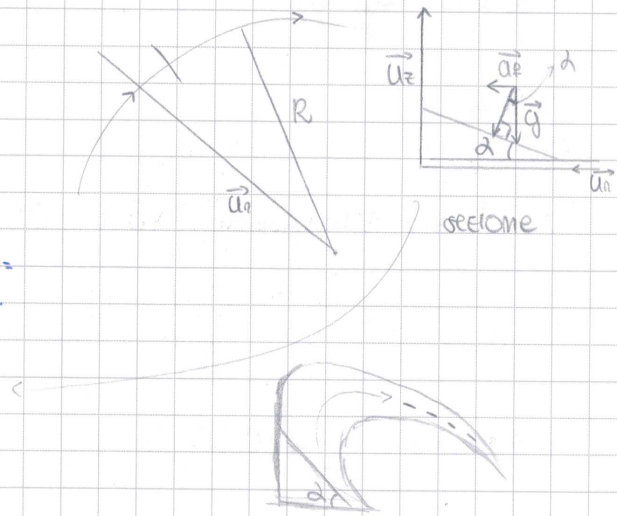


$\vec{a_{tot}} = \vec{a_2} - \vec{a_1} = -\vec{a}$ (a. centrifuga)

$\vec{a_2}$: $\vec{a}$ degli oggetti che vedo che sono fermi

$\vec{a_1}$: $\vec{a}$ del sistema che sta ruotando anche se a me non sembra

es. $R = 100\ m$, $v = 60\ km/h : 3{,}6 = 16{,}\bar{6}\ m/s$
$\vec{a} \perp$ sup. della strada
$\alpha = ?$



- Ho sempre componente di accelerazione centrifuga e componente gravitazionale così che la risultante sia $\perp$ alla strada (sono bene ancorato a terra e con la macchina non subisco accelerazioni laterali).

$$\vec{a_{tot}} = \vec{a_f} + \vec{g} = a_f \vec{u_n} - g\,\vec{u_z} \overset{!}{=} \frac{v^2}{R}\vec{u_n} - g\,\vec{u_z}$$

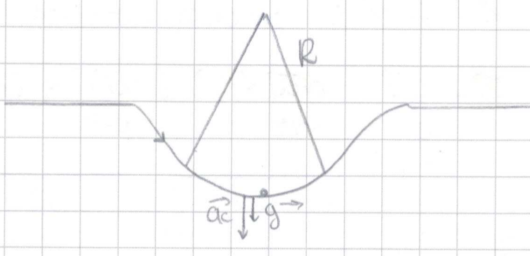
a_f mi dà $\vec{a_{tot}}$ risultante scostata da g di angolo α

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a_f}{g}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{Rg}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(60:3{,}6)^2}{100 \cdot 9{,}81}\right) = 15{,}8°$$

- Peso pilota: trovo $\vec{a_{tot}}$, $a_{tot} = \sqrt{a_f^2 \vec{u_n} + g^2 \vec{u_z}} = 10{,}1\ m/s^2$

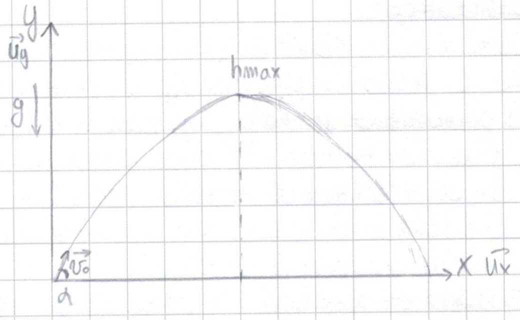
$\frac{a_{tot}}{g} = 1{,}03$ pilota si ~~tiene~~ sente 3% più pesante

es. $\vec{a} = \frac{v^2}{R}$ $\quad R = 10 m$
$v = 60 km/h = 16{,}\bar{6}\ m/s$
$\vec{a_c} \parallel \vec{g}$ $\quad a_{tot} = ?$
parallele solo in un punto



$$|\vec{a_{tot}}| = |\vec{a_f}| + |\vec{g}| = \frac{v^2}{R} + g = \frac{(16{,}\bar{6})^2}{10} + 9{,}81 = 37{,}58\ m/s^2 = 3.83\ g$$

Moto parabolico



$\vec{v_0} = v_{0_x} \vec{u_x} + v_{0_y} \vec{u_y}$

Le componenti hanno moti indipendenti:

$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0_x} t & \text{moto rettilineo unif., } a=0 \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 & \text{m. unif. acc. , } a=-g \end{cases}$

$x_0 = 0$
$y_0 = 0$

$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

hmax: $v_y = v_{0y} - gt = 0$ perché nel punto max si annulla

$t_{max} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g}$

$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

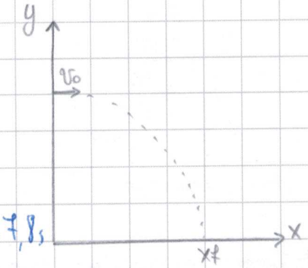
$h_{max} = v_{0y} \left(\frac{v_{0y}}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g} \right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{2g}$

h max , α = 90°

gittata: $x(2 \cdot t_{max}) = v_{0x} \cdot \left(\frac{v_{0y}}{g} \cdot 2 \right) = \frac{2 v_0 \cos(\alpha) v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g}$

gittata max , α = 45°

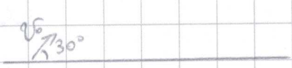
es. $|\vec{v_0}| = 130 \text{ km/h} : 3{,}6 = 36{,}1 \text{ m/s}$
300 m = h
$x_f = ?$
$v_{0y} = 0 \text{ m/s}$



$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$
$0 = 300 + 0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{9{,}81}} = 7{,}8 \text{ s}$

$x_f = x_0 + v_0 t = 0 + 130 \cdot 7{,}8 = 281{,}6 \text{ m}$

es. $v_0 = 300 \text{ m/s}$
α = 30°
D (gittata) = ?



$D = \frac{v_0 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g} = \frac{300 \operatorname{sen}(60°)}{9{,}81} = \frac{\sqrt{3} \cdot 300}{2 \cdot 9{,}81} = 26{,}5 \text{ m}$