VETTORI

6/03/2012

molte grandezze fisiche sono rappresentate da vettori

Sono grandezze fisiche molto importanti.

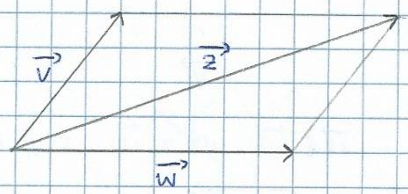
sommare i vettori tra di loro

Una proprietà molto importante è quella che posso confrontarli tra di loro:

$\vec{v}$

$\vec{w}$

$$\vec{z} = \vec{v} + \vec{w}$$



Se, però, ho molti vettori, il metodo grafico non è molto pratico. Per sommare i vettori in modo numerico, prima devo conoscere il **PRODOTTO 1 SCALARE** e il **PRODOTTO SCALARE**.

prodotto per uno scalare

PRODOTTO 1 SCALARE

(moltiplico **UN VETTORE** per **UN NUMERO** e ottengo **UN ALTRO VETTORE**)

è la moltiplicazione di un vettore per un numero reale e ne modifica il modulo, ed il verso se è negativo

$\vec{v}$

$a \in \mathbb{R}$

$$\vec{w} = a \cdot \vec{v} \Rightarrow \boxed{|\vec{w}| = a \cdot v}$$

$a > 0 \rightarrow$ ottengo un vettore PIÙ LUNGO
$a < 0 \rightarrow$ ottengo un vettore DI VERSO OPPOSTO
$a = 0 \rightarrow$ ottengo un vettore NULLO $(= 0)$

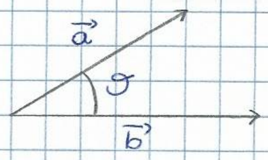
PRODOTTO SCALARE

(moltiplico **DUE VETTORI** e ottengo **UN NUMERO**)

$\vec{a}$

$\vec{b}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\theta}$$



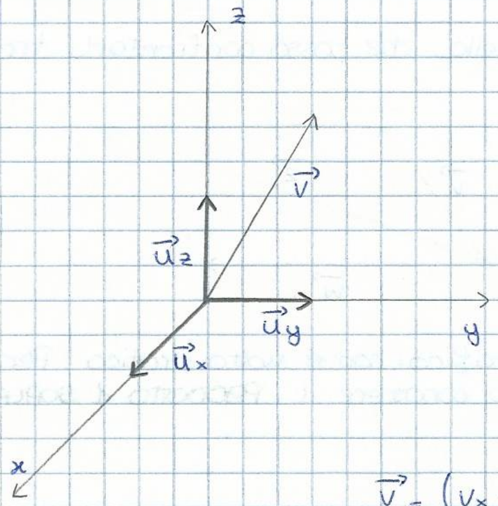
il numero ottenuto = la proiezione di $\vec{a}$ su $\vec{b}$ per il modulo di $\vec{b}$

= la proiezione di $\vec{b}$ su $\vec{a}$ per il modulo di $\vec{a}$

si definisce VERSORE un vettore di lunghezza unitaria, di modulo=1

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$
- $|\vec{b}| = 1$ (VERSORE) $\Rightarrow a \cdot b \cdot \cos\theta$
  $= a \cdot \cos\theta \rightarrow$ = la proiezione di $\vec{a}$ su $\vec{b}$

LE COMPONENTI DI UN VETTORE



$\vec{u}_x$ = VERSORE ASSE x

$\vec{u}_y$ = VERSORE ASSE y

$\vec{u}_z$ = VERSORE ASSE z

Se il sistema di riferimento è ortonormale i versori che lo rappresentano sono ortogonali tra di loro

$\vec{v} = (v_x ; v_y ; v_z)$

↳ **COMPONENTI** = proiezioni del vettore sugli assi

V_x = proiezione di $\vec{v}$ sull'asse x

$\Rightarrow \boxed{V_x = \vec{v} \cdot \vec{u}_x = \vec{v} \cdot \cos\theta_x}$ PRODOTTO SCALARE

V_y = proiezione di $\vec{v}$ sull'asse y

$\Rightarrow \boxed{V_y = \vec{v} \cdot \vec{u}_y = \vec{v} \cdot \cos\theta_y}$ PRODOTTO SCALARE

$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = V_x \cdot \vec{u}_x + V_y \cdot \vec{u}_y + V_z \cdot \vec{u}_z}$

Vettore scomposto nelle sue componenti

V_z = proiezione di $\vec{v}$ sull'asse z

$\Rightarrow \boxed{V_z = \vec{v} \cdot \vec{u}_z = \vec{v} \cdot \cos\theta_z}$ PRODOTTO SCALARE

si può sempre scomporre il vettore in componenti rispetto ad un sistema di riferimento: le componenti del vettore sono il prodotto scalare del vettore con i VERSORI lungo gli assi coordinati

Possiamo identificare il vettore attraverso le sue componenti ovvero tre numeri reali

PRODOTTO SCALARE IN COMPONENTI

Presi due vettori

$\vec{a} = a_x \cdot \vec{u}_x + a_y \cdot \vec{u}_y + a_z \cdot \vec{u}_z$

$\vec{b} = b_x \cdot \vec{u}_x + b_y \cdot \vec{u}_y + b_z \cdot \vec{u}_z$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$ come si scrive il loro prodotto scalare?

se moltiplico i due vettori scritti in componenti e ricordo che i versori diversi sono ortogonali

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \cdot \vec{u}_x \cdot b_x \cdot u_x) + \cancel{(a_x \cdot \vec{u}_x \cdot b_y \cdot \vec{u}_y)} + \ldots$$

sono vettori ortogonali, quindi il prodotto scalare è nullo!

ottengo

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}$$ PRODOTTO SCALARE IN COMPONENTI

Esercizi

- $\vec{v} = 5\vec{u}_x + 2\vec{u}_y - 7\vec{u}_z$ $\quad \vec{v} = (5; 2; -7)$

  $\vec{w} = 4\vec{u}_x + 7\vec{u}_y + 3\vec{u}_z$ $\quad \vec{w} = (4; 7; 3)$

1) Proiezione di $\vec{v}$ lungo $\vec{u}_y$?

$= \vec{v} \cdot \vec{u}_y = 2$

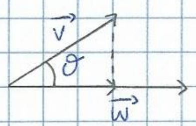
Proiezione di $\vec{v}$ lungo $\vec{u}_x$?

$= \vec{v} \cdot \vec{u}_x = 5$

Proiezione di $\vec{v}$ lungo $\vec{u}_z$?

$= \vec{v} \cdot \vec{u}_z = -7$

2) Proiezione di $\vec{v}$ lungo $\vec{w}$?



$= v \cdot w \cdot \cos\theta = \boxed{v \cdot \cos\theta}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z$ = PRODOTTO SCALARE

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ = MODULO DI $\vec{v}$

$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$ = MODULO DI $\vec{w}$

$$v \cdot \cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{w} = \frac{v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$$

3) Angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v \cdot w \cdot \cos\vartheta$$

$$\rightarrow \cos\vartheta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{v \cdot w} = \frac{v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_y^2}}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + (-7) \cdot 3}{\sqrt{5^2+2^2+7^2} \cdot \sqrt{4^2+7^2+3^2}} = 0{,}172$$

$$\rightarrow \vartheta = \arccos(0{,}172) = 80{,}10\,g$$

$$\vec{z} = \vec{v} + \vec{w} \qquad \vec{z} = (5+4)\,\vec{u}_x + (2+7)\,\vec{u}_y + (-7+3)\,\vec{u}_z$$

4) Trovare la proiezione del vettore somma $\vec{z}$ sul vettore $\vec{a}$

$$\vec{a} = 1\,\vec{u}_x + 1\,\vec{u}_y + 4\,\vec{u}_z \qquad \vec{a} = (1;1;4)$$

$$\vec{z} = 9\,\vec{u}_x + 9\,\vec{u}_y - 4\,\vec{u}_z \qquad \vec{z} = (9;9;-4)$$

$$\vec{z}\cdot\vec{a} = z_x a_x + z_y a_y + z_z a_z = 9 \cdot 1 + 9 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = 2$$

$$z = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + z_z^2} = \sqrt{9^2+9^2+4^2} = 13{,}34$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2+1^2+4^2} = 4{,}24$$

PROIEZIONE $\rightarrow z \cdot a \cdot \cos\vartheta = \boxed{z \cdot \cos\vartheta}$

$$z \cdot \cos\vartheta = \frac{\vec{z}\cdot\vec{a}}{a} = \frac{2}{4{,}24} = 0{,}47$$

ANGOLO $\rightarrow \cos\vartheta = \frac{\vec{z}\cdot\vec{a}}{z \cdot a} = \frac{2}{13{,}34 \cdot 4{,}24} = 0{,}035$

$$\vartheta = \arccos(0{,}035) = 87{,}97^\circ$$

7/03/2012

COME TROVO IL VERSORE CHE STÀ SULLA DIREZIONE DI $\vec{a}$?

indica la direzione di

Per trovare un versore prendo il vettore e lo divido per il suo modulo

$$\boxed{\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{a}}$$

$$= \frac{1\vec{u}_x + 1\vec{u}_y + 4\vec{u}_z}{4,24} = \frac{1}{4,24}\vec{u}_x + \frac{1}{4,24}\vec{u}_y + \frac{4}{4,24}\vec{u}_z$$

$$= 0,236\,\vec{u}_x + 0,236\,\vec{u}_y + 0,943\,\vec{u}_z$$

Verifico che abbia modulo 1:

$$\vec{u}_a = \sqrt{0,236^2 + 0,236^2 + 0,943^2} = 1,000$$

X CASA: IMPORTANTE!

$\vec{F_1} = 10,1\,\vec{u}_x + 4,1\,\vec{u}_y$

$\vec{F_2} = 2,3\,\vec{u}_x - 3,1\,\vec{u}_y$

$\vec{F_3} = -8,2\,\vec{u}_x - 1,9\,\vec{u}_y$

- Modulo del vettore somma
- Angolo della risultante rispetto all'asse y
- Componente della risultante rispetto all'asse x

1) Modulo del vettore somma

$$\vec{F} = (10,1 + 2,3 - 8,2)\,\vec{u}_x + (4,1 - 3,1 - 1,9)\,\vec{u}_y$$

$$= 4,2\,\vec{u}_x - 0,9\,\vec{u}_y$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{4,2^2 + 0,9^2} = 4,29$$

2) Angolo della risultante rispetto all'asse y

$$F_y = F \cdot \cos\vartheta \rightarrow \cos\vartheta = \frac{F_y}{F} = \frac{-0,9}{4,29} = -0,209$$

$$\vartheta = \arccos(-0,209) = 102,063^\circ$$

3) Componente della risultante rispetto all'asse x

componente = proiezione del vettore sull'asse

Proiezione di $\vec{F}$ lungo $\vec{u}_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x = 4,2\,\vec{u}_x$

PRODOTTO VETTORIALE
(moltiplico **DUE VETTORI** e ottengo **UN ALTRO VETTORE**)

$\vec{v}$

$\vec{w}$

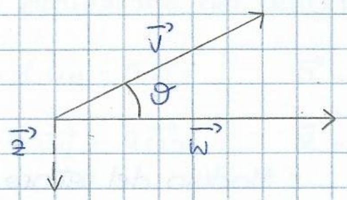
$$\boxed{\vec{z} = \vec{v} \times \vec{w}}$$

In certi casi, posso trovare scritto

$$\vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{w}$$

MODULO: $|z| = v \cdot w \cdot \text{sen}\,\vartheta$

DIREZIONE: ortogonale al piano descritto dai 2 vettori con la regola "della mano destra"



- vettori $\perp$ $\rightarrow$ $|z|$ massimo
- vettori $//$ $\rightarrow$ $|z|$ nullo
- $\vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{w} \times \vec{v}$

PRODOTTO VETTORIALE IN COMPONENTI

Si esegue con una matrice

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{u_x}\,(v_y w_z - v_z w_y) - \vec{u_y}\,(v_x w_z - v_z w_x) + \vec{u_z}\,(v_x w_y - v_y w_x)$$

Esercizio

Dati 2 vettori $\vec{a} = (1;2;0)$ e $\vec{b} = (3;4;5)$, costruire un vettore ortogonale al piano determinato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{u_x}(2 \cdot 5 - 0 \cdot 4) - \vec{u_y}(1 \cdot 5 - 0 \cdot 3) + \vec{u_z}(1 \cdot 4 - 2 \cdot 3)$$

$$= \vec{u_x}(10) - \vec{u_y}(5) + \vec{u_z}(4-6)$$

$$= 10\,\vec{u_x} - 5\,\vec{u_y} - 2\,\vec{u_z}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (10; -5; -2)$$

Da questo vettore, ora troviamo il versore

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{z}$$

$$|z| = \sqrt{10^2 + 5^2 + 2^2} = 11{,}35$$

$$\vec{u_z} = \frac{\vec{z}}{z} = \frac{10}{11{,}35}\,\vec{u_x} - \frac{5}{11{,}35}\,\vec{u_y} - \frac{2}{11{,}35}\,\vec{u_z}$$

$$= 0{,}881\,\vec{u_x} - 0{,}440\,\vec{u_y} - 0{,}176\,\vec{u_z}$$