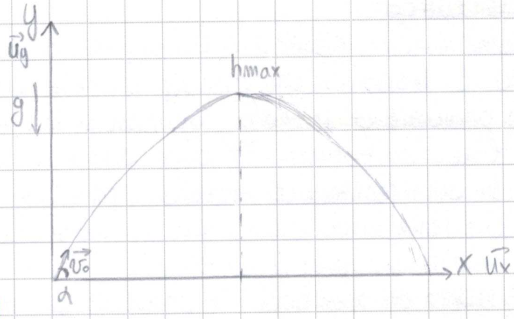
Moto parabolico



$\vec{v_0} = v_{0_x} \vec{u_x} + v_{0_y} \vec{u_y}$

le componenti hanno moti indipendenti:

$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0_x} t & \text{moto rettilineo unif., } a=0 \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 & \text{m. unif. acc. , } a=-g \end{cases}$

$x_0 = 0$
$y_0 = 0$

$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

hmax: $v_y = v_{0y} - gt = 0$ perchè nel punto max si annulla

$t_{max} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g}$

$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

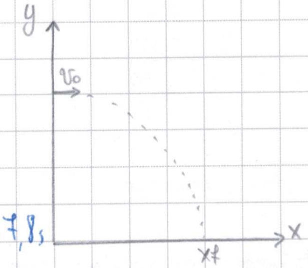
$h_{max} = v_{0y} \left(\frac{v_{0y}}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g} \right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{2g}$

h max , $\alpha = 90°$

gittata: $x(2 \cdot t_{max}) = v_{0x} \cdot \left(\frac{v_{0y}}{g} \cdot 2 \right) = \frac{2 v_0 \cos(\alpha)\, v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g}$

gittata max , $\alpha = 45°$

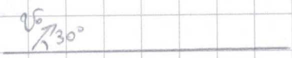
es. $|\vec{v_0}| = 130$ km/h : 3,6 = 36,1 m/s
300 m = h
$x_f = ?$
$v_{0y} = 0$ m/s



$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$
$0 = 300 + 0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{9,81}} = 7,8\,s$

$x_f = x_0 + v_0 t = 0 + 130 \cdot 7,8 = 281,6$ m

es. $v_0 = 300$ m/s
$\alpha = 30°$
D (gittata) = ?



$D = \frac{v_0 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g} = \frac{300 \operatorname{sen}(60°)}{9,81} = \frac{\sqrt{3} \cdot 300}{2 \cdot 9,81} = 26,5$ m

Dinamica

Come sistema fisico è influenzato dalle forze. Si chiede perchè moto avviene in determinato modo. Si basa sui tre principi di Newton:

1) principio d'inerzia: se non si interviene su un corpo, qst o sta fermo o si muove di moto rettilineo uniforme. In ogni caso la velocità $v = k$ (costante). Principio che vale solo in sistemi di riferimento inerziali, privilegiati (un sistema di riferimento inerziale, un altro sistema di riferimento è esso stesso inerziale se riferito al primo). Se l'oggetto non è soggetto a forze esterne allora $a = 0$ m/s.

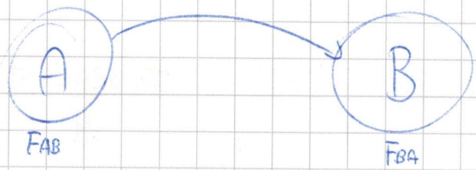
2) legge di Newton: in presenza di influenze esterne, l'accelerazione è soggetta a delle forze, e l'accelerazione è tanto più grande quanto più piccolo un parametro fondamentale del corpo, la massa. $\vec{F} = m\vec{a}$. $\vec{F}$ descrive come varia $\vec{a}$. Nel sistema internazionale l'unità di massa è kg (massa di un centimetro cubo di acqua distillata a 4°C). Forza unitaria: è quella che applicata a un kg di massa produce un accelerazione unitaria ($1 m/s^2$), misurata in Newton (N)

Misurare massa di qualunque corpo: $a_1 = m_1 F$, $a_2 = m_2 F$ $\Rightarrow$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{m_2}$

Accelerazione privilegiata: g, $F_{peso} = m \cdot g$, 1 kg di massa $\vec{F_{peso}} = 1 \cdot 9{,}81 = 9{,}81$ N

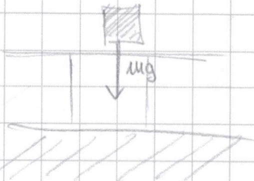
$\vec{F} = m\vec{a}$ eq. vettoriale
$$\begin{cases} F_x = m a_x = m\, dx^2/dt^2 = x(t) \\ F_y = m a_y = m\, dy^2/dt^2 = y(t) \\ F_z = m a_z = m\, dz^2/dt^2 = z(t) \end{cases}$$

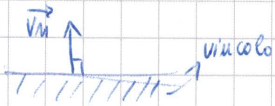
3).



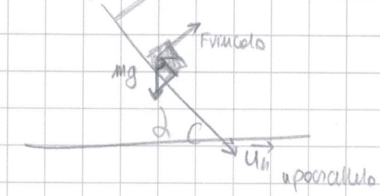
F_{AB} azione di A su B, F_{BA} reazione di B a A.
Principio di azione-reazione: $F_{AB} = -F_{BA}$
Compiere azione su sistema, qst fa reazione uguale e contraria.

es. se $\vec{F} = 0$ N $= \sum \vec{F_i} = \vec{0}$





Vincolo liscio: reazione lungo la normale al vincolo



$\vec{F} = m\vec{a} = \sum_i \vec{F_i} = \vec{F_{peso}} + \vec{F_{vincolo}} = \cancel{mg\cos(\alpha)\vec{u_n}} + mg\,\text{sen}(\alpha)\vec{u_\parallel} + \cancel{F_{vin}\vec{u_n}}$

Il vincolo sostiene oggetto poichè cancella componente normale di forza, facendo reazione contraria a quella componente.

$= mg\,\text{sen}(\alpha)\,\vec{u_\parallel}$ (rimane solo qst)

$\cancel{m}a = \cancel{m}g\,\text{sen}(\alpha)$ moto unif. accelerato
$a = g\,\text{sen}(\alpha)$

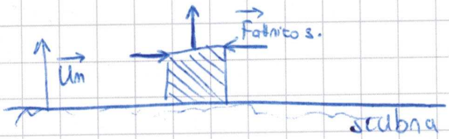
Attrito

$\vec{F}_{attrito}$ diviso tra statico e dinamico. Statico: forza limite che devo dare perchè oggetto si ~~mov~~ muova è pari alla forza esterna. (segno opposto). Parallelo alla sup. del vincolo.

$$F_{attrito} = \mu_n \cdot \overset{mg\ di\ solito}{N}\ (\text{componente normale}) = \mu_s \cdot \vec{F}_{tot} \cdot \vec{u}_n$$

μ coefficiente frutto di accoppiamento di due sup.

se $F_{appl.} > F_{att.}$ allora corpo si muove



Dinamico: si manifesta qnd corpo si muove, sempre opposta alla velocità

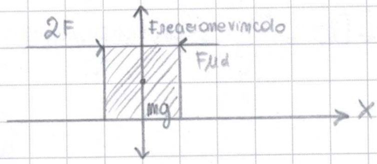
$$F_{att.d} = \mu d \cdot N = \mu d \cdot \vec{F}_{tot} \cdot \vec{u}_n = \mu d \cdot F_{tot}\vec{u}_n \left(\frac{\vec{v}}{v}\right)$$

versore velocità

$$\mu d < \mu s$$

Il vincolo scabro ($\neq$ liscio) ha sia la reazione normale che attrito.

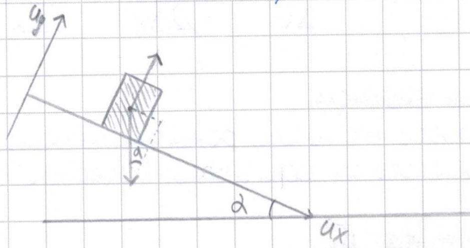
es. $\mu_s = 0.8$
$\mu_d = 0.5$
$F_{applicata} = ?$
a se $2F = ?$
$m = 2kg$



$$F_{appl.} = \mu s \cdot N = \mu s \cdot mg = 0{,}8 \cdot 2 \cdot 9{,}81 = 15{,}7\,N$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\cancel{F_{peso} + F_{reazione\ vincolo}} + 2F_{appl.} + F\mu d}{m} = \frac{2F - F\mu d}{m} = \frac{2\mu s \cancel{m} g - \mu d \cancel{m} g}{\cancel{m}} = 10{,}8\,m/s^2$$

es. $\alpha\ lim = ?$



$$\vec{F}_{//} = \underbrace{-mg\,\vec{u}_y \cdot \vec{u}_x}_{prodotto\ scalare}\ \vec{u}_x$$

$$= mg\,sen(\alpha)$$

$$F\mu s = \mu s \cdot N = \mu s \cdot \cancel{m}g\cos(\alpha) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{limite prima che blocco si muova}}}{=} F_{//} = \cancel{m}g\,sen(\alpha)$$

$$\mu s = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha) = \mu s$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\mu s) = 38{,}7°$$

Forza media / impulso / quantità di moto

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

funzione stessa incrementata nei due estremi

$$\int_{t_1}^{t_2} F\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}dt = m\int_{t_1}^{t^2}\frac{d\vec{v}}{dt}dt = m(\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)) = m\Delta\vec{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = m \Delta v = m v_2 - m v_1 = \vec{p_2} - \vec{p_1} \quad \text{impulso}$$

impulso

$mv = p$ quantità di moto

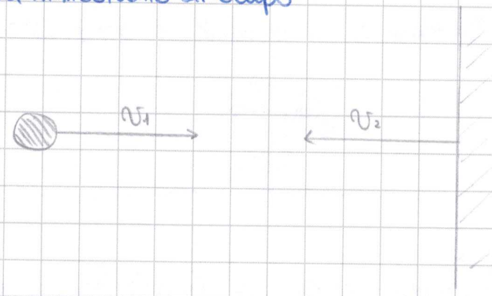
l'impulso (l'impressione di una forza in det. tempo) mi fa variare la quantità di moto.

se F costante $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = F$

ad ogni modo $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \vec{F_m}\, \Delta t$ forza media in intervallo di tempo

es (urto perfettamente elastico = non perde energia = urto persiste v costante)

$v = 10\, m/s$
$m = 0{,}02\, kg$



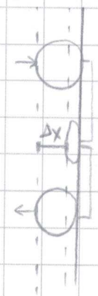
$\Delta p = m(v_2 - v_1) \quad v_1 = -v_2$
$\stackrel{!}{=} 2mv$

$F_m \Delta t = 2mv$

$2\Delta t = \frac{2x}{v} = \frac{2\,\text{deformazione}}{v} = \frac{2\Delta x}{v}$

in pratica spazio in cui agisce la forza (rapportato al tempo in cui agisce la forza => per qst spazio è doppio)

t_1 comincia ad agire la forza, arriva al max, poi torna normale e F finisce.



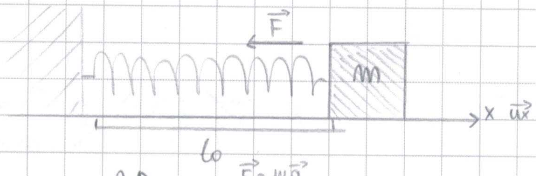
$\Delta t = 2t$

$$F_m = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{\cancel{2}mv^2}{\cancel{2}\Delta x} = \frac{mv^2}{\Delta x} = \frac{0{,}02 \cdot 10^2}{0{,}002\, mm} = 1000\, N$$

Forza elastica

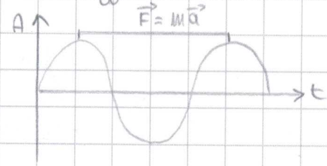
Se sposto molla da posizione di equilibrio, agisce una forza che tenderà a riportare molla in posizione di equilibrio. Forza che si oppone allo spostamento.

$\vec{F} = -kx\, \vec{u_x}$



k costante elastica

$[k] = \frac{F}{l} = \frac{N}{m}$



$\vec{F} = m\vec{a} = -kx\, \vec{u_x} = m \frac{d^2x}{d^2t} \vec{u_x}$

$-kx \stackrel{!}{=} m \frac{d^2x}{d^2t}$ eq. differenziale per trovare legge oraria $x(t)$

$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ derivo
$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$
$\frac{d^2x(t)}{dt} = a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$

$-k \cancel{A} \cancel{\sin(\omega t + \phi)} = -m \cancel{A} \omega^2 \cancel{\sin(\omega t + \phi)}$
$k \stackrel{!}{=} m\omega^2$
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsazione

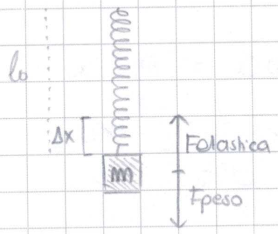
$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ frequenza $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ se massa è piccola, oscilla velocemente

$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ periodo $= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$x(t) = A \,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{\omega}}\, t + \phi\right)$ legge oraria

Impostati A e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali, (ϕ fase, numero adimensionale, dipende dalla funzione seno quando $t = 0s$)

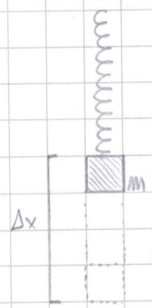
es. $\Delta x = ?$, $m = ?$



$$F_{el.} = F_{pe.}$$
$$k\Delta x = mg$$
$$\Delta x = \frac{mg}{k}$$

$$T = \frac{t_{tot}}{n° \text{oscillazioni}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$\frac{T^2}{2\pi^2} = \frac{m}{k}$$
$$m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$

es. $m = 14\,kg$
$\Delta x = 0.5\,m$
$\nu = ?$
$T = ?$

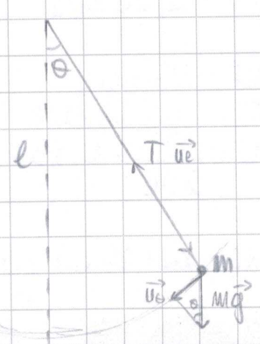


$$F_p = F_{el.}$$
$$mg = k\Delta x$$
$$k = \frac{mg}{\Delta x}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{m}g}{\cancel{m}\Delta x}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta x}} = 0{,}7\ Hz$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{\nu} = 1{,}42\ s$$

Pendolo

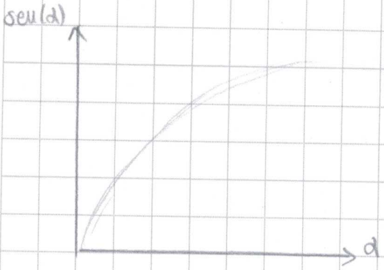
Tensione: coppia di forze abbraccio lungo che si trova in ogni punto della nostra funzione



$\vec{F} = T\,\vec{u_e}$

$\vec{F_{tot}} = m\vec{g} + T\vec{u_e} = mg\,\text{sen}(\theta)\,\vec{u_\theta}$ componenti tangenziali

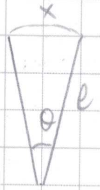
Considero solo piccole oscillazioni (θ piccolo) allora $\text{sen}(\theta) \simeq \theta$ stesso



$\Rightarrow \quad F = mg\,\text{sen}(\theta) = mg\,\theta$

Per det. F=ma, mi serve legge oraria per cui passo a descrivere da coordinate angolari a lineari

$x_{\text{arco}} = \theta \cdot \ell$ (raggio) $\Rightarrow \quad \theta = \frac{x}{\ell}$



$\Rightarrow \quad F = mg\,\theta = \frac{mg}{\ell}\,x$ x coordinata di spostamento lungo arco

$F = ma = \frac{mg}{\ell}\,x$

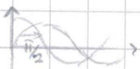
$\cancel{m}\frac{d^2x}{d^2t} = \frac{\cancel{m}g}{\ell}\,x$ eq. differenziale

stessi passaggi di prima perché il pendolo descrive moto armonico $\Rightarrow$ $x(t) = A\cos(\omega t + \theta) = A\,\text{sen}(\omega t + \theta)$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

↑ non specifico fase perché...

perché: $\text{sen}(t) = \cos(t - \pi/2)$



ma la fase non è specificata

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

es. $m = 50\,kg$
$F = 22\,N$
$\alpha = 60°$
$\mu_d = 0.2$
$\vec{a_x} = ?$
$v_0 = 2\,m/s$
$t_f = ?$
$x_f = ?$

$F = ma = -F\cos(\alpha) - \mu_d N$

$a = \frac{-F\cos(\alpha) - \mu_d N}{m} = \frac{-F\cos(\alpha) - \mu_d(mg + F\,\text{sen}(\alpha))}{m} = -\frac{22/2 + 0.2\,(50 \cdot 9{,}81 + 22\sqrt{3}/2)}{50}$

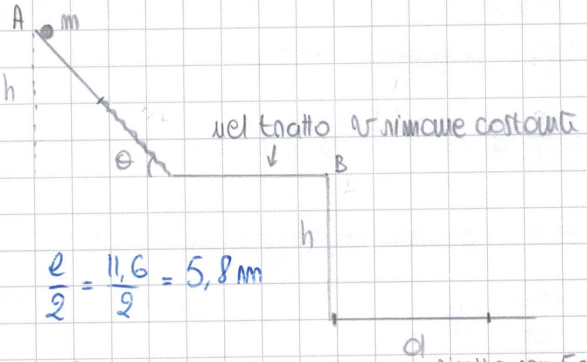
$= -2{,}26\,m/s^2$

$v_f = v_0 + at$
$0 = 2 - 2{,}26\,t$
$t = \frac{2}{2{,}26} = 0{,}89\,s$

$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 2 \cdot 0{,}89 - \frac{1}{2} \cdot 2{,}26 \cdot (0{,}89)^2 = 0{,}88\,m$

(es)

$m = 1kg$
$h = 10\,m$
$\mu d = 0.2$ comincia dal $h/2$
$\theta = 60°$
$d = ?$



$$l = \frac{h}{sen(\theta)} = \frac{10}{sen(60°)} = \frac{20}{\sqrt{3}} \sim 11{,}6\,m \qquad \frac{l}{2} = \frac{11{,}6}{2} = 5{,}8\,m$$

$$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}g\,sen(\theta)t^2 = \frac{1}{2}g\,sen(\theta)t^2$$

$$5{,}8 = \frac{1}{2}\,9.81\,\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 \implies t = \sqrt{\frac{5{,}8\cdot 4}{9{,}81\cdot\sqrt{3}}} = 1{,}17\,s$$

$$v_f = v_0 + at = 0 + g\,sen(\theta)t = 9{,}81\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1{,}17 = 9{,}93\,m/s$$

$F = ma$
$mg\,sen(\theta) - \mu d N = ma$
$\cancel{m}g\,sen(\theta) - \mu d\,\cancel{m}g\cos(\alpha) = \cancel{m}a$
$a = g(sen(\theta) - \mu d\cos(\alpha)) = 9{,}81\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.2\cdot\frac{1}{2}\right) = 7{,}51\,m/s^2$

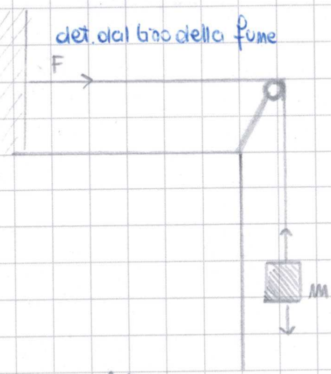
risolto con Ec

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \mathcal{L}_{Fpeso} + \mathcal{L}_{Fatt.} = mgh - \mu d N\frac{l}{2} =$$
$$= mgh - \mu d\, mg\cos(\theta)\frac{l}{2} = \Delta E_c$$
$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 = \cancel{m}gh - \mu d\,\cancel{m}g\cos(\theta)\frac{l}{2}$$
$$v_f = \sqrt{(9{,}81\cdot 10) - (0{,}2\cdot 9{,}81\cdot\frac{1}{2}\cdot 5{,}8)}$$
$$= 13{,}7\,m/s$$

$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$5{,}8 = 0 + 9{,}93t + \frac{1}{2}\cdot 7{,}51t^2$
$3{,}75t^2 + 9{,}93t - 5{,}8 = 0$
$$t_{1/2} = \frac{-9{,}93 + \sqrt{9{,}93^2 + 4\cdot 5{,}8\cdot 3{,}75}}{2\cdot 3{,}75} = 0{,}5\,s$$

$v_f = v_0 + at = 9{,}93 + 0{,}5\cdot 7{,}51 = 13{,}7\,m/s$
$y = y_0 + v_0 + \frac{1}{2}at^2$
$0 = 10 + 0\cdot t - \frac{1}{2}9{,}81t^2$
$t = \sqrt{\frac{10}{4{,}905}} = 1{,}42\,s$

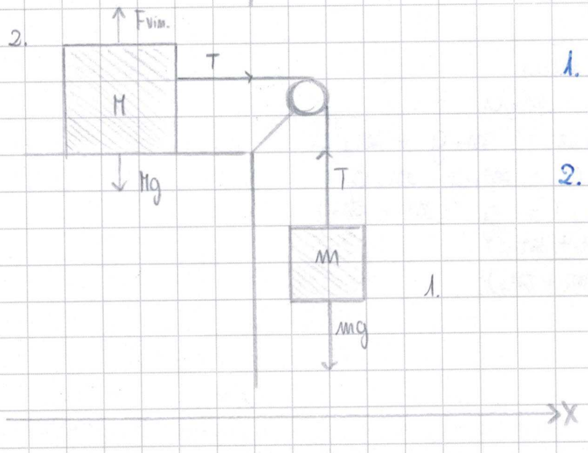
$v_f = v_0 t + x_0 =$
$= 13{,}7\cdot 1{,}42 + 0 =$
$= 19{,}6\,m$



Se la massa è ferma, forza peso bilanciato da tensione

$T = mg$

(es.)



1. $\vec{F} = m\vec{a_1}$
$mg - T = ma_1$

2. $\vec{F} = M\vec{a_2}$
$\cancel{Mg} - \cancel{F_{vin}} + T = Ma_2$
$T = Ma_2$

Poiché la fune è inestensibile, l tra corpi è la stessa e poiché $a = d^2x/d^2t$, $a_1 = a_2 = a$

$$\begin{cases} ma = mg - T \\ Ma = T \end{cases}$$
$ma = mg - Ma$
$a = \frac{mg}{m+M}$ $\implies$ m. unif. accelerato

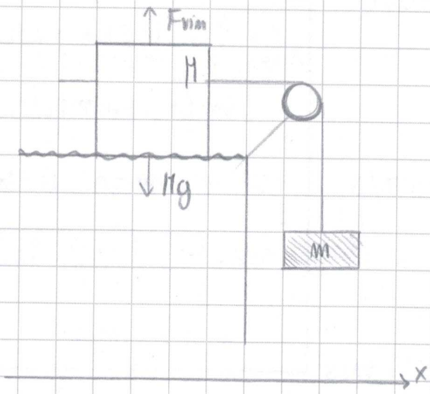
se $M >> m$, a si avvicina a zero

$$a = \frac{m}{M} g \Rightarrow Ma = mg$$

se $m >> M$, a sarà molto grande

$$a = \frac{mg}{m} = g$$

es.



$$F_{att.s} = -\mu_s N = -\mu_s \cdot Mg$$

se $T > F_{att.s}$ corpo si muove

se $T < F_{att.s}$ corpo sta fermo

$T < \mu_s Mg$ ma $T = mg$

$mg < \mu_s Mg$

$m < \mu_s M$

entro anche μ_d:

$T = Ma$ per il corpo grande

$T - F_{att.d} = Ma$

$T - \mu_d N = Ma$

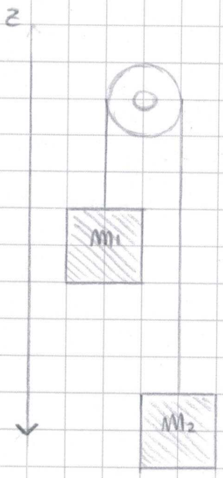
$T - \mu_d Mg = Ma$

$T = Ma + \mu_d Mg$ ma $mg - T = ma$

$$mg - Ma - \mu_d Mg = ma$$

$$a = \frac{mg - \mu_d Mg}{M + m}$$ => m. unif. accelerato

es.



1. $F = ma$

$m_1 g - T = m_1 a_1 = m_1 a$

2. $F = ma$

$m_2 g - T = m_2 a_2 = -m_2 a$

$|a_1| = |a_2|$ ma verso opposto

$a_1 = -a_2 = a$

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ m_2 g - T = -m_2 a \end{cases}$$

$m_1 g - m_1 a = m_2 g + m_2 a$

$m_2 a + m_1 a = m_1 g - m_2 g$

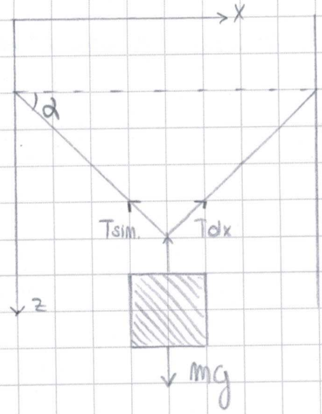
$a(m_1 + m_2) = g(m_1 - m_2)$

$$a = g \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

se $m_1 = m_2$, $a = 0$

se $m_1 << m_2$ o viceversa, $a = g$

es.

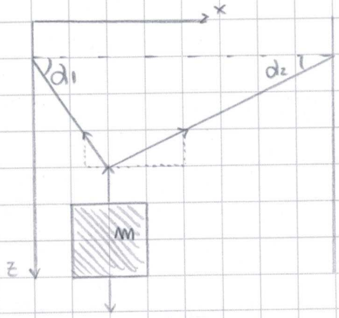


$m = 20\,kg$
$\alpha = 15°$

$\vec{T}_{sn} = -(\text{sen}(\alpha)T)\hat{z}\ (\cos(\alpha)T)\hat{x}$
$\vec{T}_{dx} = -(\text{sen}(\alpha)T)\hat{z}\ (\cos(\alpha)T)\hat{x}$

$F = 0$
$mg - \text{sen}(\alpha)T - \text{sen}(\alpha)T = 0$
$T = \dfrac{mg}{2\,\text{sen}(\alpha)} = \dfrac{20 \cdot 9{,}81}{\text{sen}(15°)} = 378\ N$

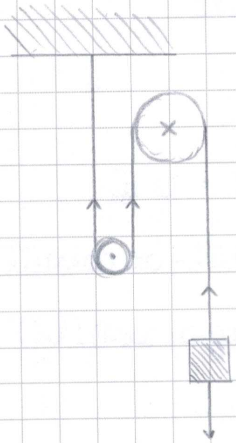
es.



$m = 74\,kg$
$\alpha_1 = 60°$
$\alpha_2 = 30°$

$\vec{F} = 0$
$$\begin{cases} mg - \text{sen}(\alpha_1)T_1 - \text{sen}(\alpha_2)T_2 = 0 \\ -T_1\cos(\alpha_1) + T_2\cos(\alpha_2) = 0 \end{cases}$$
$T_2 = \dfrac{T_1\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)}$
$mg - \text{sen}(\alpha_1)T_1 - \dfrac{T_1\,\text{sen}(\alpha_2)\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)} = 0$
$T_1 = mg \Big/ \left(\text{sen}(\alpha_1) + \dfrac{\text{sen}(\alpha_2)\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)}\right) = 628{,}7\ N$
$T_2 = 362{,}9\ N$

es.



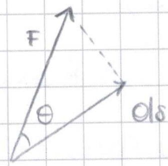
$gM = 2T$
$mg = T$

Le carrucole amplificano effetto delle forze. Angoli che fregano xò sullo spazio spostato

$Mg = 2mg$
$M = 2m$

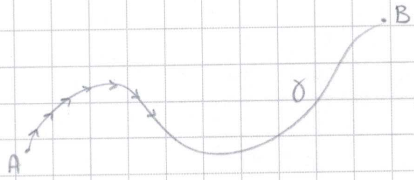
Lavoro

$\mathcal{L} = F \cdot x = \vec{F} \cdot \vec{ds}$



~~forza~~ lavoro elementare $d\mathcal{L} = F\cos(\theta)\,ds = \vec{F} \cdot \vec{ds}$
↑
ci spostiamo poco così la F è costante

$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{ds}$



$\mathcal{L}_{A \xrightarrow{\gamma} B}$: suddivido spostamento in spostamenti elementari poi in ogni spostamento elementare calcolo il lavoro elementare e poi faccio la somma

si misura in $[N] \cdot [m] = [J]$ Joule

$\mathcal{L}_{A \xrightarrow{\gamma} B} = \int_{A,\gamma}^{B} d\mathcal{L} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}\,\vec{ds}$ integrale di cammino