FIS.

prof. Mariotti
prof.ssa Pramolini, esercitazioni

Fisica nasce con Galileo e il metodo sperimentale (cose giuste e vere sono solo quelle che si possono riprodurre in laboratorio)

cause $\xrightarrow{\text{esperimento}}$ effetti ⟹ legge fisica dedotta e descritta con linguaggio matematico (x qst è scienza)

Le grandezze fisiche sono il linguaggio della fisica (velocità spazio tempo massa forza ecc.) sono misurabili, non tutte sono fondamentali
energia quantità di moto

Quelle fondamentali riconosciute dal Sistema Internazionale S.I.: m k s
(metro chilo secondo)
↓ ↓ ↓
lunghezza massa tempo

misurare: verificare quante volte l'unità campione è contenuta nel soggetto
confronto oggetto di misura con campione della stessa grandezza fisica

es. 1,03 m dovuti alla precisione, è giusto 1,03 ± Δ di errore di misura di precisione

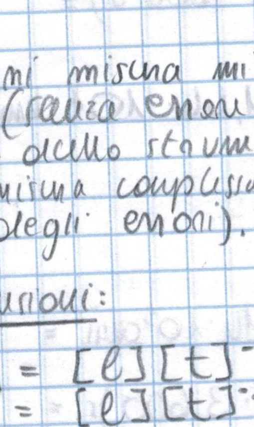
Ogni misura mi dà come risultato un numero e un errore
(senza errore misura non ha significato) dipende da errore sistematico (umano) o dallo strumento usato o dalla imprecisione intrinseca dell'oggetto (misura complessa). Errori sulle cause si propagano sugli effetti (teoria degli errori).

Dimensioni:

$[v] = [l][t]^{-1}$
$[a] = [l][t]^{-2}$
> analisi dimensionale (controllare le grandezze fisiche)

Per sommare grandezze fisiche devono essere uguali

es.



Sistema oscilla ha periodo caratteristico (piccole oscillazioni isocrone, stesso arco in stesso tempo sempre). Ha T periodo di oscillazione

$[T] = [t]$
$[h] = [l]$
$[m] = [m]$
$[g] = [l][t]^{-2}$

$$T = \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{\frac{[l]}{[l][t]^{-2}}} = [t]$$

$$T \propto \sqrt{\frac{h}{g}}$$

proporzionale

numeri puri: non hanno grandezza fisica   es. $\frac{3m}{1,5m} = 2$ n.° puro

$[v] = m/s$

es. $36\ km/h = 36 \cdot \frac{\overbrace{1000\ m}^{km}}{\underbrace{3600\ s}_{h}} = 10\ m/s$ diviso

$= 36 \cdot \frac{1}{3,6}\ m/s$

es. distanza Terra-Sole 8 min luce

$c = 300\,000\ km/s$

$x = v \cdot t = 3 \cdot 10^5\ km/s \cdot 8 min = 3 \cdot 10^5\ km/s \cdot (60 s \cdot 8) =$

$= 3 \cdot 10^5\ km/s \cdot 480\ s = 144 \cdot 10^6\ km = 1,44 \cdot 10^8\ km$

$= 1,44 \cdot 10^8 \cdot 10^3 = 1,44 \cdot 10^{11}\ m$

es. l'Universo ha $14 \cdot 10^9$ anni

diametro dell'Universo $= c\,\Delta t = 3 \cdot 10^5\ km/s \cdot 14 \cdot 10^9$ anni $=$

$= 3 \cdot 10^5\ km/s \cdot 14 \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3600)s =$

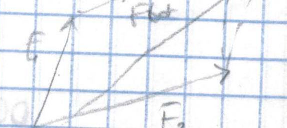
$= 1,32 \cdot 10^{23}\ km$

(i secondi in 1 anni x 1% $\sim \pi \cdot 10^7\ s$)

Alcune grandezze necessitano di più di un semplice numero per essere descritta v. forza accelerazione velocità necessitano di vettori (la tensione usa i tensori/matrici). 3x3

Vettori: { direzione, verso, intensità }   { componenti x, y, z }   { modulo, 2 angoli → azimutale, zenitale }

somma $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ $F_{tot} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

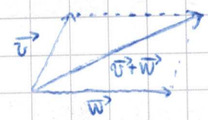


Tempo, grandezza semplice descrivibile da numeri

Altre grandezze più complesse descritte da vettori ($\vec{v}, \vec{a}, \vec{F}, ..$)

VETTORI

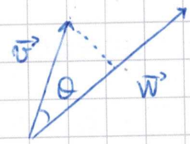
Componenti di vettori su asse è la sua proiezione
somma: $\vec{v}, \vec{w}$ $\quad \vec{v}+\vec{w}$ vettore somma, regola del parallelogramma



Moltiplicazione per uno scalare: $\vec{v}$, $a \in \mathbb{R}$, $\vec{w} = a\cdot\vec{v}$
$\vec{w}$ ha stessa direzione di $\vec{v}$, $|\vec{w}| = w = a|\vec{v}| = a\cdot v$

se $a>0$ $\quad \vec{w}$ ha anche stesso verso di $\vec{v}$
se $a<0$ $\quad \vec{w}$ ha verso opposto di $\vec{v}$
se $a=0$ $\quad w = 0$

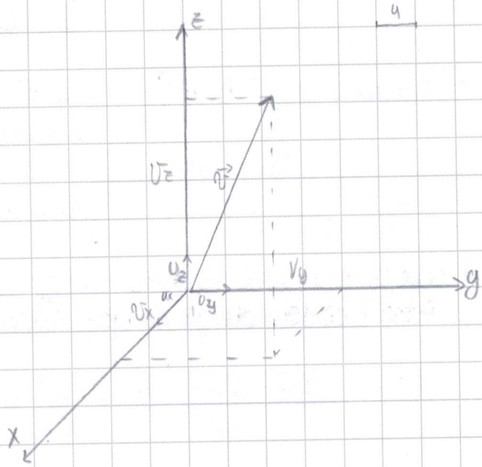
Prodotto scalare: (grandezza scalare, descrivibile con un numero)
$\vec{v}, \vec{w}$, $\quad \vec{v}\cdot\vec{w} = v\cdot w\cdot\cos(\theta)$ corrisponde alla proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$ moltiplicato il modulo di $\vec{w}$ = proiezione di $\vec{w}$ su $\vec{v}$ per il modulo di $\vec{v}$.



Se i due vettori sono ortogonali, prodotto scalare è 0
Se giacciono sulla stessa retta prodotto è prodotto dei moduli.

Con vettore di modulo unitario $w=1$ (versore), allora $\vec{v}\cdot\vec{w} = v\cdot w\cos(\theta) = v\cos(\theta)$, prodotto scalare di vettore con versore è la proiezione del vettore lungo quella direzione.

Sistema di riferimento cartesiano:



$\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$

$\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z}$, $\quad u_x = u_y = u_z = 1$ versori

$$\begin{cases} v_x = \vec{v}\cdot\vec{u_x} \\ v_y = \vec{v}\cdot\vec{u_y} \\ v_z = \vec{v}\cdot\vec{u_z} \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{u_x} + v_y\vec{u_y} + v_z\vec{u_z} = \overset{!}{=} (\vec{v}\cdot\vec{u_x})\vec{u_x} + (\vec{v}\cdot\vec{u_y})\vec{u_y} + (\vec{v}\cdot\vec{u_z})\vec{u_z}$$

$$\vec{w} = w_x\vec{u_x} + w_y\vec{u_y} + w_z\vec{u_z}$$

$$\vec{v}+\vec{w} = (v_x+w_x)\vec{u_x} + (v_y+w_y)\vec{u_y} + (v_z+w_z)\vec{u_z}$$

vettore somma ha per componenti la somma delle componenti lungo le direzioni $\vec{u_x}, \vec{u_y}$ e $\vec{u_z}$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v\cdot v\cdot\cos(0) = v\cdot v\cdot 1 = v^2$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (v_x\cdot\vec{u_x}\cdot w_x\cdot\vec{u_x}) + (v_x\cdot\vec{u_x}\cdot w_y\cdot\vec{u_y}) + \ldots$$
$$\overset{!}{=} (v_x\cdot w_x\cdot 1^2) + 0 + 0 + 0 + (v_y\cdot w_y\cdot 1^2) + 0 + 0 + 0 + (v_z\cdot w_z\cdot 1^2)$$

perché ortogonali e così per tutti gli altri termini misti

$$= v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

es. $\vec{v} = 7\vec{u_x} - 1\vec{u_y} + 4\vec{u_z}$, $\vec{w} = 3\vec{u_x} + 2\vec{u_y} - \vec{u_z}$

- $v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{7^2+1^2+4^2} = \sqrt{66} \sim 8{,}12$

- $v_x = 7$

- α con asse z? $\vec{v}\cdot\vec{u_z} = v \cdot u_z \cdot \cos(\alpha)$

$$v_z = v \cdot 1 \cdot \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \frac{v_z}{v} = \frac{4}{\sqrt{66}} = 0{,}49$$
$$\alpha = \cos^{-1}(0{,}49) = 60{,}5°$$

- $\vec{z} = \vec{v} + \vec{w} = (7+3)\vec{u_x} + (2-1)\vec{u_y} + (4-1)\vec{u_z} = 10\vec{u_x} + \vec{u_y} + 3\vec{u_z}$

- $z_y = 1$

- proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$? $= v \cdot \cos(\Theta)$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = v \cdot w \cdot \cos(\Theta) \Rightarrow v\cos(\Theta) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{w} = \frac{(v_x w_x) + (v_y w_y) + (v_z w_z)}{\sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w}}} = \frac{(7\cdot 3) + (-1\cdot 2) + (-1\cdot 4)}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} =$$
$$= \frac{15}{\sqrt{14}} \sim 4{,}008$$

- α tra $\vec{z}$ e asse y? $\vec{z}\cdot\vec{u_y} = z \cdot u_y \cdot \cos(\alpha)$

$$z_y = z \cdot 1 \cdot \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \frac{z_y}{z} = \frac{z_y}{\sqrt{\vec{z}\cdot\vec{z}}} = \frac{1}{\sqrt{110}} = 0{,}095$$
$$\alpha = \cos^{-1}(0{,}095) = 84{,}5°$$

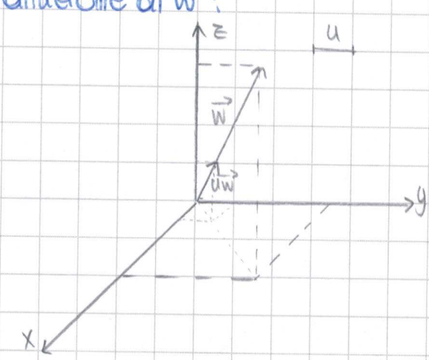
- angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$? $\vec{v}\cdot\vec{w} = v \cdot w \cdot \cos(\alpha)$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{v \cdot w} = \frac{15}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{14}} = 0{,}493$$
$$\alpha = \cos^{-1}(0{,}493) = 60{,}4°$$

- componenti del versore lungo $\vec{w}$ (lunghezza unitaria) direzione di $\vec{w}$?
Sono i coseni degli angoli rispetto alle direzioni di $\vec{w}$

$$\vec{u_w} = \frac{3\vec{u_x} + 2\vec{u_y} - \vec{u_z}}{w} = \frac{\vec{w}}{w} = \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{u_x} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{u_y} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{u_z}$$

$$u_w = 1 = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2}$$



es. $\vec{F_1} = 10{,}1\vec{u_x} + 4{,}1\vec{u_y}$
$\vec{F_2} = 2{,}3\vec{u_x} - 3{,}1\vec{u_y}$
$\vec{F_3} = -8{,}2\vec{u_x} - 1{,}9\vec{u_y}$

- $|\vec{F_{tot}}|$

- α tra $\vec{F_{tot}}$ e asse x

- componenti di $\vec{F_{tot}}$ rispetto a asse x (F_x)

- $\vec{F_{tot}} = (10{,}1+2{,}3-8{,}2)\vec{u_x} + (4{,}1-3{,}1-1{,}9)\vec{u_y} = 4{,}2\,\vec{u_x} - 0{,}9\,\vec{u_y}$

- $\vec{F_{tot}} \cdot \vec{u_x} = F_{tot} \cdot u_x \cdot \cos(\alpha)$

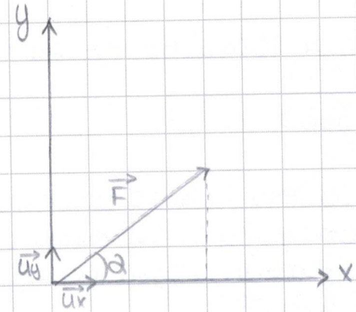
  $F_{tot\,x} = \sqrt{\vec{F_{tot}} \cdot \vec{F_{tot}}} \cdot 1 \cdot \cos(\alpha)$

  $\cos(\alpha) = \dfrac{F_{tot\,x}}{\sqrt{F_{tot\,x}^2 + F_{tot\,y}^2}} = \dfrac{4{,}2}{\sqrt{4{,}2^2 + 0{,}9^2}} = 0{,}97$

  $\alpha = \cos^{-1}(0{,}97) = 12{,}1°$

- $F_{tot} = \sqrt{4{,}2^2 + 0{,}9^2} = 4{,}3$

asse y visto come vettore: $(0,1,0)$
asse x $(1,0,0)$
asse z $(0,0,1)$

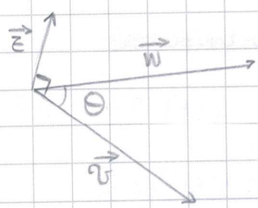


$\vec{F}\,(F\cos(\alpha), F\sin(\alpha), 0)$
$\vec{F} = F\cos(\alpha)\,\vec{u_x} + F\sin(\alpha)\,\vec{u_y} + 0\,\vec{u_z}$

Principio di sovrapposizione: gli effetti di due forze si limita alla loro somma

Prodotto vettoriale/esterno:

$\vec{z} = \vec{v} \times \vec{w}$ il risultato è nuovamente un vettore



$z = v \cdot w \cdot \sin(\theta)$ nullo se v e w paralleli
max se v e w ortogonali

Direzione: ~~ortog~~ ortogonale al piano det. dai due vettori
Verso: regola della mano destra

$\vec{z} = \vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{w} \times \vec{v}$ non è commutativo (cambia il verso → opposto)
(prodotto vettoriale anti commutativo)

Secondo componenti

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \vec{u_x}\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} + \vec{u_y}\begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + \vec{u_z}\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{u_x}(v_y w_z - v_z w_y) - \vec{u_y}(v_z w_x - v_x w_z) + \vec{u_z}(v_x w_y - v_y w_z)$$

es. $\vec{a}\,(1;2;0)$
$\vec{b}\,(3;4;5)$

- versore ⊥ al piano det da $\vec{a}$ e $\vec{b}$?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \vec{u_x}(2 \cdot 5 - 0 \cdot 4) - \vec{u_y}(1 \cdot 5 + 3 \cdot 0) + \vec{u_z}(1 \cdot 4 - 3 \cdot 2) =$$

$$= (10; -5; -2)$$

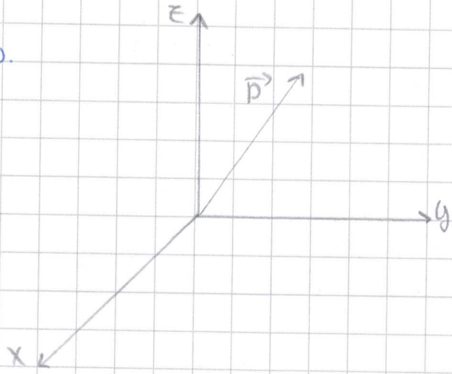
Per il versore devo normalizzare $\vec{a} \times \vec{b}$: $\vec{u_a} = \dfrac{\vec{c}}{c} = \dfrac{10\vec{u_x} - 5\vec{u_y} - 2\vec{u_z}}{\sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}}} =$

$$\vec{u_a} = \frac{10}{\sqrt{129}}\vec{u_x} - \frac{5}{\sqrt{129}}\vec{u_y} - \frac{2}{\sqrt{129}}\vec{u_z}$$

prova $u_a = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{129}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{129}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{129}}\right)^2} = 1$

CINEMATICA

Descrive moto degli oggetti. Non spiega il xk (v. dinamica), descrive solo come si muovono. Inizialmente è solo cinematica puntiforme.
Il significato ~~nel ten~~ del tempo sta nel mutare delle cose, esso è il parametro dello spostamento.



$\vec{p}(t)$ vettore posizione

T periodo di rotazione terrestre = 24h

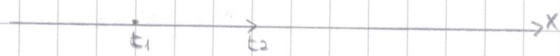
$$\delta = \frac{T}{24 \cdot 3600}$$

ogni secolo Terra rallenta di 2 millesimi per azione combinata di Sole e Luna sulle maree terrestri. Secondo si basa su oscillazioni di atomo di Cesio-133.

$$\vec{p}(t) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$ posizioni descritte al variare del tempo: legge oraria

Moto rettilineo uniforme:

legge oraria: $x(t)$



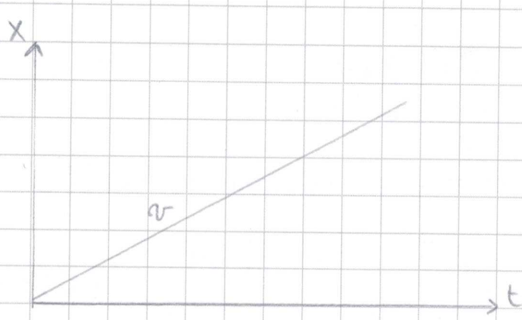
$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{\Delta t}$$

es. $t_1 = 17.45$
$t_2 = 19.30$
$x_f = 85\ km$

$$v_m = \frac{(85-0)\ km}{19h\,30min - 17h\,45min} = \frac{85.000\ m}{(19 \cdot 3600 + 30 \cdot 60) - (17 \cdot 3600 + 45 \cdot 60)} = 13{,}5\ m/s$$

$13{,}5\ m/s \cdot 3{,}6 = 48{,}6\ km/h$

Grafico della legge oraria:
v costante (grafico è retta)



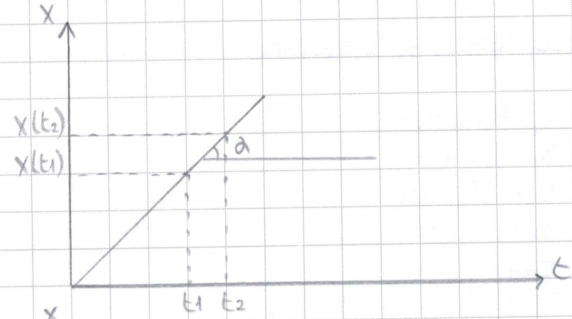
Velocità istantanea:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

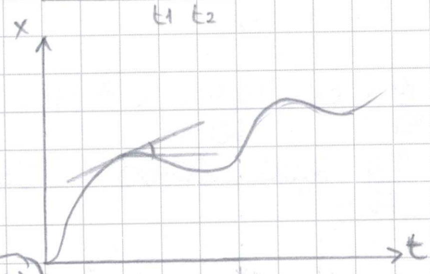
Velocità istantanea è derivata di funzione rispetto al tempo

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ coefficiente angolare retta

la velocità istantanea è la $\tan(\alpha)$ in tal punto
Retta tanto più ripida se + veloce, orizzontale è nulla, se neg. sta tornando indietro.



$x(t) \rightarrow v(t)$ tramite legge oraria
e la velocità istantanea mi dà $\tan(\alpha)$ dell'angolo della tangente alla curva in quel punto/istante



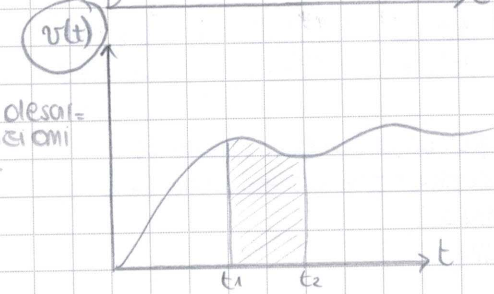
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

se v è costante ho legge oraria

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + x_0$$

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

grafico descrive variazioni di $v(t)$.

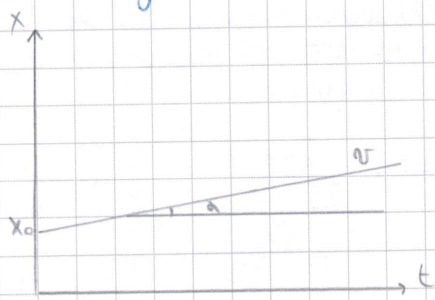


Se ho solo velocità posso det. la mia posizione a meno che abbia la mia posizione in un dato istante. Con legge oraria invece posso dedurre tutto, anche la velocità.
Area sotto curva sottesa è spazio percorso (calcolabile con integrali)

Moto rettilineo uniforme: $x(t) = x_0 + vt$

$\tan(\alpha) = v$

Se orizzontale $v = 0\,m/s$, se neg. v neg. nel verso

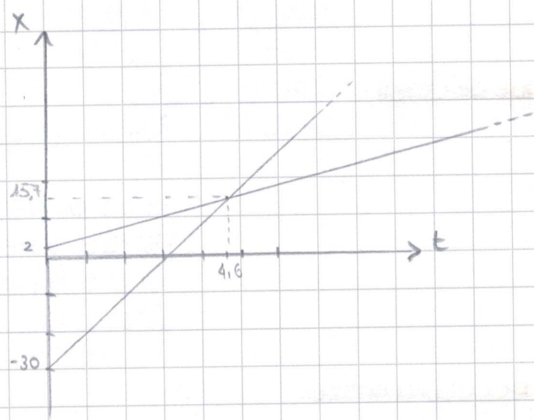


(es.) $x_A(t) = x_{0A} + v_A t = -30 + 10t$
$x_B(t) = x_{0B} + v_B t = 2 + 3t$

$x_{0A} = -30\,m$
$v_A = 10\,m/s$
$x_{0B} = 2\,m$
$v_B = 3\,m/s$

$\begin{cases} x_A = -30 + 10t \\ x_B = 2 + 3t \end{cases}$ trovo qnd si incontrano

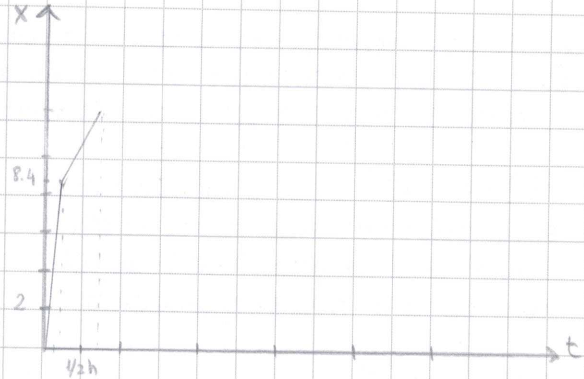
$-30 + 10t = 2 + 3t$
$7t = 32$
$t = \frac{32}{7} \sim 4{,}6\,s$



$x_A(4{,}6\,s) = -30 + 10(4{,}6) \sim 15{,}7\,m$ dove si incontrano

Moto rettilineo uniforme ha v = costante e $\tan(\alpha)$ in grafico = v

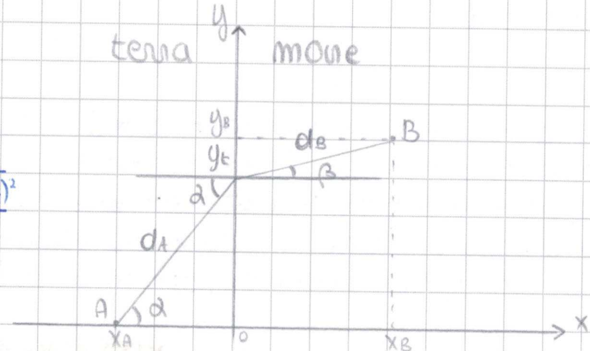
es. $v_1 = 70\ km/h$
$x_1 = 8,4\ km$
$t_2 = 30\ min$
$x_2 = 2\ km$
$t_{tot} = ?$
$v_m = ?$



$$t_{tot} = \frac{x_1}{v_1} + t_2 = \left(\frac{8,4}{70} + 0,5\right) h =$$
$$= \frac{8.4}{70} \cdot 3600 + 30 \cdot 60 = 2.232\ s$$

$$v_m = \frac{x_{tot}}{t_{tot}} = \frac{x_1 + x_2}{t_{tot}} = \frac{8.4 + 2}{2.232} = 4,66\ m/s$$

es. In che punto cambiare elemento per minimizzare il tempo tra A e B.
$v_t = 7\ m/s$
$v_m = 1\ m/s$



$$t_{tot} = \frac{d_A}{v_t} + \frac{d_B}{v_m} = \frac{\sqrt{x_A^2 + y_t^2}}{v_t} + \frac{\sqrt{x_B^2 + (y_B - y_t)^2}}{v_m}$$

Problema di minimo tale che $t(y_t)_{min}$ allora $\frac{dt}{dy_t} = 0$ in quel punto

$$t'_{tot} = \frac{2y_t}{2\sqrt{\ } \cdot v_t} - \frac{2(\ )}{2\sqrt{\ } \cdot v_m} = 0$$
$$\frac{y_t}{\sqrt{\ } \cdot v_t} = \frac{(\ )}{\sqrt{\ } \cdot v_m}$$
$$\frac{\sin(\alpha)}{v_t} = \frac{\sin(\beta)}{v_m}$$

$\frac{y_t}{\sqrt{\ }}$ cateto diviso ipotenusa = $\sin(\alpha)$

$\frac{(\ )}{\sqrt{\ }}$ cateto diviso ipotenusa = $\sin(\beta)$

Legge di Snell: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_t}{v_m}$ (calcolando ciò bisogna sa dove cambiare elemento)

indice di rifrazione dell'aria fratto in. rifr. nel mezzo
(v luce in mezzo fratto v luce in aria)
Si può riscrivere l'ottica dicendo che la luce nel percorso tra la sorgente e pozzo sceglie sempre percorso che la minimizza il tempo
Nel nostro caso $\sin(\alpha) = 7 \sin(\beta)$ per minimizzare tempo

Accelerazione:

$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$ misurata in m/s^2, $[l][t]^{-2}$

Parametro che descrive variazione di velocità

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$ derivata (accelerazione istantanea)

$\frac{d^2x}{dt^2}$ è la derivata seconda

Moto uniformemente accelerato: $a = costante$

$$v = v_0 + \int_0^t a \, dt$$ in generale

se $a = costante$: $v = v_0 + at$ poiché tiro fuori a dall'integrale

rispetto a $x(t) = x_0 + \int_0^t v \, dt = x_0 + \int_0^t (v_0 + at) \, dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

↑ legge oraria in tale moto

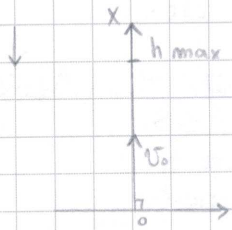
es. $t = 6.20 \, s$
da 0 a 100 km/h
$a_m = ?$

$$a_m = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{100 - 0}{6,2} = 6,61 \, m/s$$

es. da 0 a 100 km/h
$t = 3,23 \, s$
$a_m = ?$

$$a_m = \frac{100}{3,23} = 8,6 \, m/s^2$$

es. Analizziamo il moto di caduta:
$a = -g$
$x_0 = 0$
$v_0 = v_0$



$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$ legge oraria scritta in tal sistema di riferimento

Quale è' hmax? Quanto t occorre?
↳ max quando derivata $dx(t)$ rispetto a $t = 0$ (problema di max) $\Rightarrow v = 0$ (inversione moto)

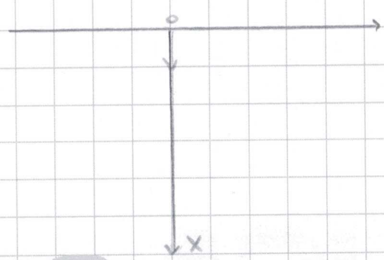
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 - gt = 0$$ perché s'inverte il moto

$$v_0 = gt \Rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Se derivo rispetto a t la legge oraria trovo v che è uguale 0, così facendo trovo max (min) del t (variabile) oppure so che nell'inversione del moto $v = 0$ e la inserisco in $v = v_0 + at$

$$h_{max} \quad x(t_{max}) = v_0 \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right) + \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

es. $a = g$, $x_f = h$
$x_0 = 0$
$v_0 = 0$



$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$v_f = v_0 + at_f = 0 + at_f = at_f = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$= \sqrt{\frac{2h \cdot g^2}{g}} = \sqrt{2hg}$

anche qui o derivo $x(t) \to v(t)$ e inserisco $t = t_f$ o prendo direttamente $v = v_0 + at$

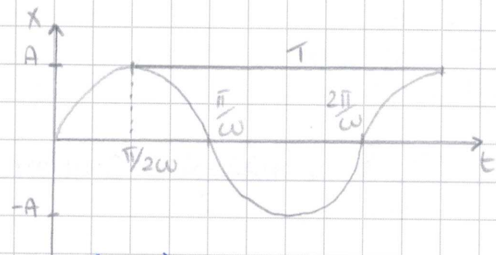
Moto armonico:

$x(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$ ← legge oraria
punto che oscilla intorno a sua origine

estremi A, $-A$
A = ampiezza
ω = pulsazione

$\theta(t) = \omega t$ velocità angolare

$A_{max} = \omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2\omega}$



misura: rad/s

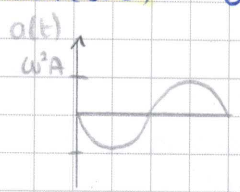
T periodo $= \frac{2\pi}{\omega}$ moto periodico oscillatorio $\left(T = \frac{1}{\nu}\right)$

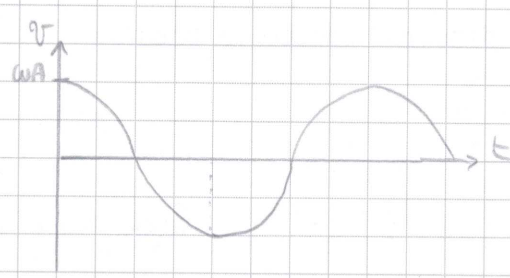
f frequenza $= \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \nu$ misurata in Hertz (numero di oscillazioni nel secondo)

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\cos(\omega t) \cdot \omega$ A e ω costanti

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) = -\omega^2 x(t)$

(max agli ext
nulla al centro)





v istantanea $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow dx = v(t)\,dt$

$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$

l'integrale è $x - x_0$
(segno neg. => cambio segno)

se v è costante

$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^{t} dt$

$= x_0 + v(t - t_0)$

legge oraria: $= x_0 + vt$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$dv = a(t)\,dt$$
$$\Delta v = \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$
$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$
$$v(t) = v_0 + a(t-t_0) \qquad \text{se } t_0 = 0 \qquad v(t) = v_0 + at$$

- $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,d(t)$ legge oraria
$= x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(t-t_0))\,dt$
$= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\,dt + \int_{t_0}^{t} a(t-t_0)\,dt$
$= x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)$ se $t_0 = 0$ $x(t) = v_0 t + x_0 + \frac{1}{2}at$

velocità proporzionale alla ω pulsazione (dunque alla frequenza)

Moto smorzato:

Descritto da a opposta alla velocità (decelerazione opposta a ~~gravità)~~ velocità)

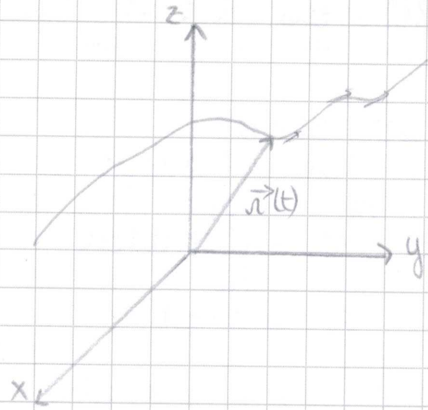
$a = -kv$ dove $a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = -kv$ eq. differenziale variabili separabili

$$\frac{dv}{v} = -k\,dt$$
$$\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v}\,dv = \int_{t_0}^{t} -k\,dt$$
$$\ln(v) - \ln(v_0) = -k(t-t_0) \qquad \text{se } t_0 = 0\text{s}$$
$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -kt$$
$$\frac{v}{v_0} = e^{-kt}$$
$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$ se $x_0 = 0$
$= \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$
$= \int_{t_0}^{t} v_0 e^{-kt}\,dt$ v_0 costante
$= v_0 \left[-\frac{e^{-kt}}{k}\right]_{t_0}^{t}$ se $t_0 = 0$
$= v_0 \left(-\frac{e^{-kt}}{k} + \frac{1}{k}\right)$
$= \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$

All' infinito moto tende asintoticamente a distanza $x_f = \frac{v_0}{k}$

Moto in più dimensioni:



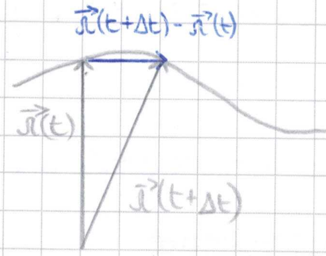
Raggio vettore determina punto che nel tempo descrive una traiettoria cambiando posizione

$\vec{r}(t) = r_x \vec{u_x} + r_y \vec{u_y} + r_z \vec{u_z}$

$\begin{cases} r_x = r_x(t) \\ r_y = r_y(t) \\ r_z = r_z(t) \end{cases}$ la conoscenza contemporanea delle tre coordinate mi dà descrizione totale di $\vec{r}(t)$ che è la legge oraria

$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ sopra la Δ di vettori descrive Δ di spostamento (nel complesso il tutto è ancora un vettore)

Se Δt è piccolo, vettore differenza è tangente a traiettoria, e il vettore velocità è parallelo ad esso. (variazione di posizione rispetto al tempo)



$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

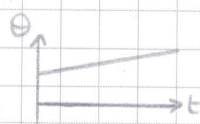
$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

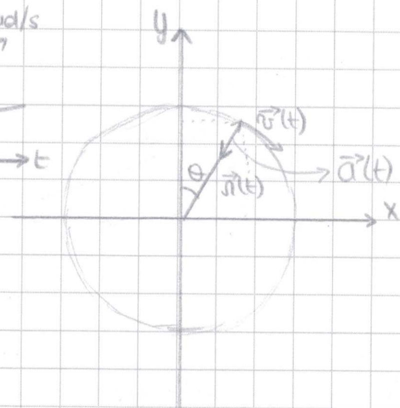
$\vec{a} = 0$ se $\vec{v}$ è costante (in moto 1 direzione: il suo valore scalare non cambia nel tempo, in + direzioni: non basta modulo costante serve anche direzione e verso costanti, costante in senso vettoriale).

Moto circolare uniforme:

$x = vt \Rightarrow \theta = \omega t$ rad/s

$\vec{r} = r\,sen(\theta)\,\vec{u_x} + r\cos(\theta)\,\vec{u_y}$





$\theta(t) = \omega t$ velocità angolare ~~(uniforme se θ~~

funzione che det. come cambia θ nel tempo (θ cresce unifor.)

in gen. $v_{ang.}(t) = \dfrac{d\theta}{dt}$

$\vec{r}(t) = r\,sen(\omega t)\,\vec{u_x} + r\cos(\omega t)\,\vec{u_y}$

legge oraria: descrive variazione di posizione di punto nel tempo con velocità angolare ~~cost~~ ω

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = r\omega\cos(\omega t)\vec{u_x} - r\omega\,sen(\omega t)\,\vec{u_y}$ $\vec{v}$ ortogonale alla direzione tangente alla traiettoria

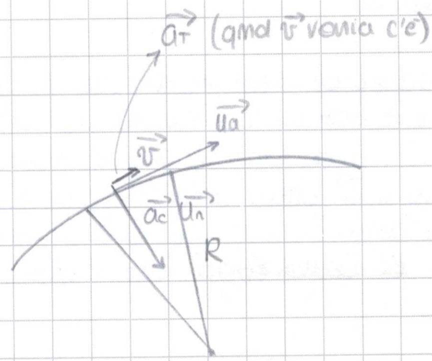
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2 sen^2(\omega t) + r^2\omega^2\cos^2(\omega t)} = r\omega$

$\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2 sen(\omega t)\,\vec{u_x} - r\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{u_y}$ accelerazione centripeta (diretta verso il centro)

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$

$\Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$

$\Rightarrow a = r\omega^2 = \cancel{r}\frac{v^2}{r^{\cancel{2}}} = \frac{v^2}{r}$



ho direzione radiale R verso il centro della mia curva. R è raggio di curvatura di curva.

$\vec{a_c} = \frac{v^2}{R}\vec{u_n}$ accelerazione centripeta (componente centripeta/radiale)

Percorrendo moto circolare $\vec{a}$ ha 2 componenti quella radiale e quella tangente (se la mia velocità non è costante sennò ho solo la radiale)

$\vec{a} = \vec{a_c} + \vec{a_T}$ stessa direzione di velocità

$= \frac{v^2}{R}\vec{u_n} + \frac{dv}{dt}\vec{u_a}$

es. $D = 8m$
$a_c = 2g$

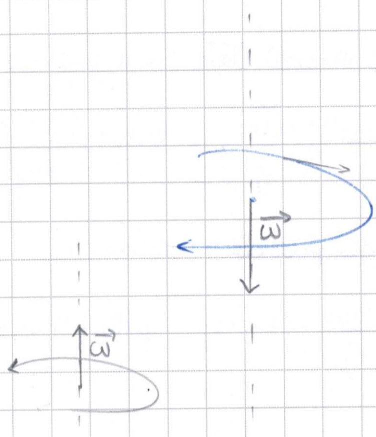
$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v_{tangenziale} = \sqrt{a \cdot r} = 31,8\ km/h$

$v = r \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = 2.2\ rad/s$

ν (frequenza) $= \frac{\omega}{2\pi} = 0,35\ Hz$

Moto circolare unif. 2

ω = velocità angolare
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

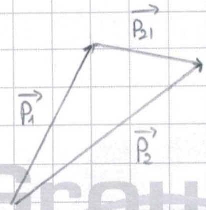


vettore $\vec{\omega}$ concorde col senso della vite lungo la perpendicolare che passa per il centro.

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ prodotto vettoriale

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\vec{a_T}} + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega}}_{\vec{a_c}}$

Moto relativo:



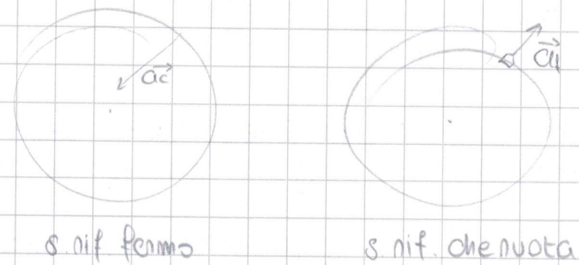
Per descrivere vettori posso scegliere se partire dall'origine o rispetto al P_1: $\vec{P_{21}} = \vec{P_2} - \vec{P_1}$

$\vec{v_{21}} = \frac{d\vec{P_{21}}}{dt} = \frac{d\vec{P_2}}{dt} - \frac{d\vec{P_1}}{dt} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$

la v è la v che ho meno quella che osservo.

$\vec{a_{21}} = \vec{a_2} - \vec{a_1}$

In un sistema di riferimento che ruota trovo che io non mi sto muovendo, ma è solo un sistema di riferimento relativo e per avere $\vec{a}$ devo tener conto di rotazione e dalla mia $\vec{a}$ sottraggo quella centripeta => ho $\vec{a}$ centrifuga che è quella che avverto.

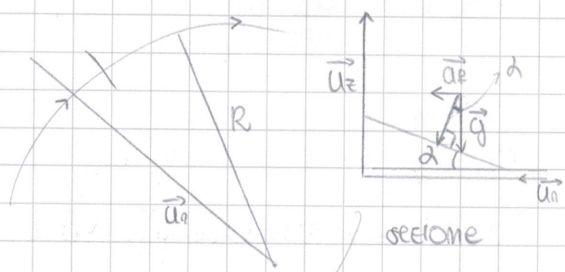


$$\vec{a_{tot}} = \vec{a_2} - \vec{a_1} = -\vec{a} \quad \text{(a. centrifuga)}$$

$\vec{a}$ degli oggetti che vedo che sono fermi

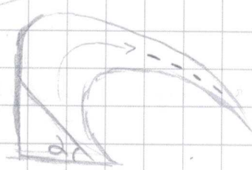
$\vec{a}$ del sistema che sta ruotando anche se a me non sembra

es. $R = 100\ m$, $v = 60\ km/h : 3{,}6 = 16{,}\bar{6}\ m/s$
$\vec{a} \perp$ sup. della strada
$\alpha = ?$



- Ho sempre componente di accelerazione centrifuga e componente gravitazionale così che la risultante sia ⊥ alla strada (sono bene ancorato a terra e con la macchina non subisco accelerazioni laterali).

$$\vec{a_{tot}} = \vec{a_f} + \vec{g} = a_f\,\vec{u_n} - g\,\vec{u_z}$$
$$= \frac{v^2}{R}\vec{u_n} - g\,\vec{u_z}$$



a_f mi dà $\vec{a_{tot}}$ risultante scostato da g di angolo α

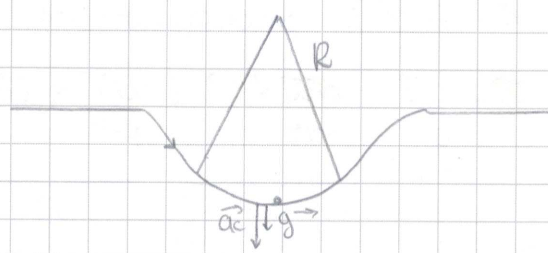
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a_f}{g}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{Rg}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(60:3{,}6)^2}{100 \cdot 9{,}81}\right) = 15{,}8°$$

- Peso pilota: trovo $\vec{a_{tot}}$, $a_{tot} = \sqrt{a_f^2\vec{u_n}^2 + g^2\vec{u_z}^2} = 10{,}1\ m/s^2$

$\frac{a_{tot}}{g} = 1{,}03$ pilota si ~~tiene~~ sente 3% più pesante

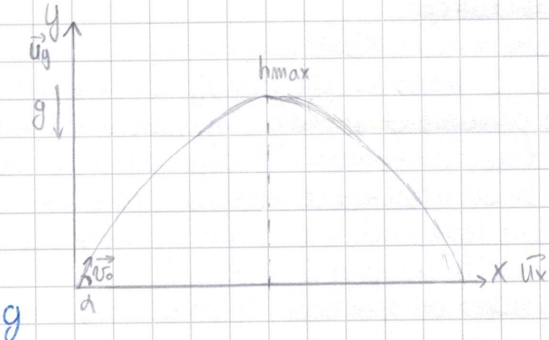
es. $\vec{a} = \frac{v^2}{R}$ $\quad R = 10\,m$
$\quad v = 60\,km/h = 16{,}\bar{6}\ m/s$
$\vec{a_f} \parallel \vec{g}$ $\quad a_{tot} = ?$

parallele solo in un punto



$$|\vec{a_{tot}}| = |\vec{a_f}| + |\vec{g}| = \frac{v^2}{R} + g = \frac{(16{,}\bar{6})^2}{10} + 9{,}81 = 37{,}58\ m/s^2 = 3.83\,g$$

Moto parabolico



$\vec{v_0} = v_{0_x}\vec{u_x} + v_{0_y}\vec{u_y}$

Le componenti hanno moti indipendenti:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0_x} t & \text{moto rettilineo unif., } a=0 \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 & \text{m. unif. acc. , } a = -g \end{cases}$$

$x_0 = 0$
$y_0 = 0$

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

hmax: $v_y = v_{0y} - gt = 0$ perché nel punto max si annulla

$t_{max} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g}$

$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

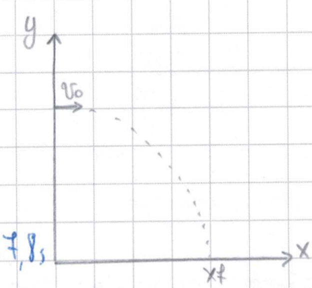
$h_{max} = v_{0y}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{2g}$

h max , $\alpha = 90°$

gittata: $x(2 \cdot t_{max}) = v_{0x} \cdot \left(\frac{v_{0y}}{g} \cdot 2\right) = \frac{2 v_0 \cos(\alpha) v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g}$

gittata max , $\alpha = 45°$

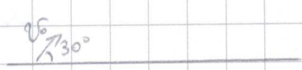
es. $|\vec{v_0}| = 130$ km/h : 3,6 = 36,1 m/s
300 m = h
$x_f = ?$
$v_{0y} = 0$ m/s



$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$
$0 = 300 + 0 \cdot t - 1/2 g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{9,81}} = 7,8 \, s$

$x_f = x_0 + v_0 t = 0 + 130 \cdot 7,8 = 281,6$ m

es. $v_0 = 300$ m/s
$\alpha = 30°$
D (gittata) = ?



$D = \frac{v_0 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g} = \frac{300 \operatorname{sen}(60°)}{9,81} = \frac{\sqrt{3} \cdot 300}{2 \cdot 9,81} = 26,5$ m

Dinamica

Come sistema fisico è influenzato dalle forze. Si chiede perchè moto avviene in determinato modo. Si basa sui tre principi di Newton:

1) principio d'inerzia: se non si interviene su un corpo, qst o sta fermo o si muove di moto rettilineo uniforme. In ogni caso la velocità $v = k$ (costante). Principio che vale solo in sistemi di riferimento inerziali, privilegiati (un sistema di riferimento inerziale, un altro sistema di riferimento è esso stesso inerziale se riferito al primo). Se l'oggetto non è soggetto a forze esterne allora $a = 0$ m/s.

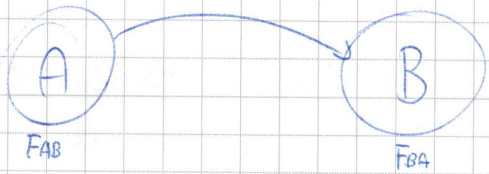
2) legge di Newton: in presenza di influenze esterne, l'accelerazione è soggetta a delle forze, e l'accelerazione è tanto più grande quanto più piccolo un parametro fondamentale del corpo, la massa. $\vec{F} = m\vec{a}$. $\vec{F}$ descrive come varia $\vec{a}$. Nel sistema internazionale l'unità di massa è kg (massa di un centimetro cubo di acqua distillata a 4°C). Forza unitaria: è quella che applicata a un kg di massa produce un accelerazione unitaria ($1 m/s^2$), misurata in Newton (N)

Misurare massa di qualunque corpo: $a_1 = m_1 F$, $a_2 = m_2 F$ $\Rightarrow$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{m_2}$

Accelerazione privilegiata: g, $\vec{F}_{peso} = m \cdot g$, 1 kg di massa $\vec{F}_{peso} = 1 \cdot 9{,}81 = 9{,}81$ N

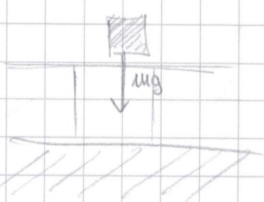
$\vec{F} = m\vec{a}$ eq. vettoriale
$$\begin{cases} F_x = ma_x = m\, dx^2/dt^2 = x(t) \\ F_y = ma_y = m\, dy^2/dt^2 = y(t) \\ F_z = ma_z = m\, dz^2/dt^2 = z(t) \end{cases}$$

3).

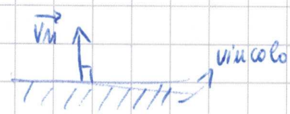


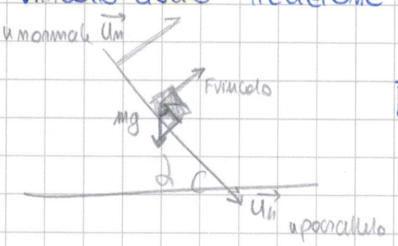
F_{AB} azione di A su B, F_{BA} reazione di B a A.
Principio di azione-reazione: $F_{AB} = -F_{BA}$
Compiere azione su sistema, qst fa azione uguale e contraria.

es. se $\vec{F} = 0$ N $= \sum \vec{F_i} = \vec{0}$



Vincolo liscio: reazione lungo la normale al vincolo





$\vec{F} = m\vec{a} = \sum \vec{F_i} = \vec{F}_{peso} + \vec{F}_{vincolo} = \cancel{mg\cos(\alpha)\vec{u_n}} + mg\,sen(\alpha)\vec{u_\parallel} + \cancel{F_{vin}\vec{u_n}}$

Il vincolo sostiene oggetto poichè cancella componente normale di forza, facendo reazione contraria a quella componente.

$= mg\,sen(\alpha)\,\vec{u_\parallel}$ (rimane solo qst)

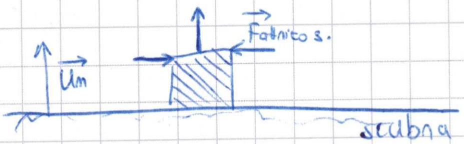
$ma = mg\,sen(\alpha)$ moto unif. accelerato
$a = g\,sen(\alpha)$

Attrito

$F_{attrito}$ diviso tra statico e dinamico. Statico: forza limite che devo dare perché oggetto si ~~mov~~ muova è pari alla forza esterna. (segno opposto). Parallelo alla sup. del vincolo.

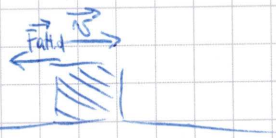
$$F_{attrito} = \mu_n \cdot \overset{mg \text{ di solito}}{N} \text{ (componente normale)} - \mu_s \cdot \vec{F}_{tot} \cdot \vec{u}_n$$

μ coefficiente frutto di accoppiamento di due sup.



se $F_{appl.} > F_{att.}$ allora corpo si muove

Dinamico: si manifesta qnd corpo si muove, sempre opposta alla velocità



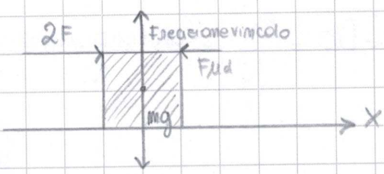
$$F_{att.d} = \mu d \cdot N = \mu d \cdot \vec{F}_{tot} \cdot \vec{u}_n = \mu d \cdot \vec{F}_{tot} \vec{u}_n \left(\frac{\vec{v}}{v}\right)$$

versore velocità

$$\mu d < \mu s$$

Il vincolo scabro ($\neq$ liscio) ha sia la reazione normale che attrito.

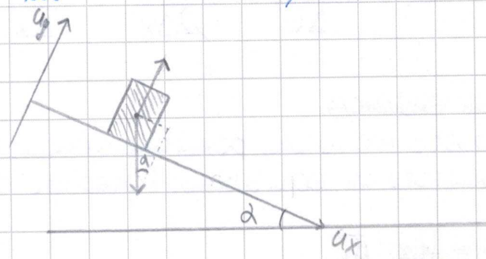
es. $\mu_s = 0.8$
$\mu_d = 0.5$
$F_{applicata} = ?$
a se $2F = ?$
$m = 2kg$



$$F_{appl.} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot mg = 0{,}8 \cdot 2 \cdot 9{,}81 = 15{,}7\ N$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\cancel{F_{peso} + F_{reazione\ vincolo}} + 2F_{appl.} + F_{\mu d}}{m} = \frac{2F - F_{\mu d}}{m} = \frac{2\mu_s \cancel{m}g - \mu d \cancel{m}g}{\cancel{m}} = 10{,}8\ m/s^2$$

es. $\alpha\ lim = ?$



$$\vec{F}_{/\!/} = -mg\ \underbrace{\vec{u}_y \cdot \vec{u}_x}_{\text{prodotto scalare}}\ \vec{u}_x$$

$= mg\ sen(\alpha)$

$$F_{\mu s} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot \cancel{mg} \cos(\alpha) = F_{/\!/} = \cancel{mg}\ sen(\alpha)$$

limite prima che blocco si muova

$$\mu_s = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha) = \mu_s$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\mu_s) = 38{,}7°$$

Forza media / impulso / quantità di moto

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

funzione stessa incrementata nei due estremi

$$\int_{t_1}^{t_2} F\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}dt = m\int_{t_1}^{t^2}\frac{d\vec{v}}{dt}dt = m(\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)) = m\Delta\vec{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = m\Delta v = m v_2 - m v_1 = \vec{p_2} - \vec{p_1} \quad \text{impulso}$$

impulso

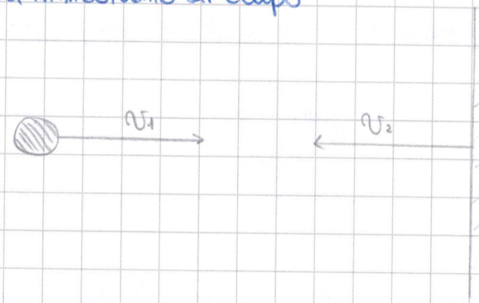
$mv = p$ quantità di moto

l'impulso (l'impressione di una forza in det. tempo) mi fa variare la quantità di moto.

se F costante $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = F$

ad ogni modo $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{F_m}\,\Delta t$ forza media in intervallo di tempo

es (urto perfettamente elastico = non perde energia = urto persiste v costante) $v = 10\,m/s$ $m = 0{,}02\,kg$



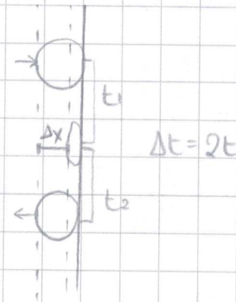
$$\Delta p = m(v_2 - v_1) \overset{!}{=} 2mv \qquad v_1 = -v_2$$

$$F_m \Delta t = 2mv$$

$$2\Delta t = \frac{2x}{v} = \frac{2\,\text{deformazione}}{v} = \frac{2\Delta x}{v}$$

in pratica spazio in cui agisce la forza (rapportato al tempo in cui agisce la forza => per qst spazio è doppio)

t1 comincia ad agire la forza, arriva al max, poi torna normale e F finisce.

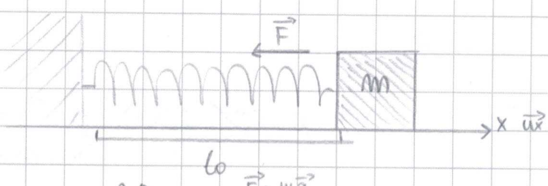


$$F_m = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{\cancel{2}mv^2}{\cancel{2}\Delta x} = \frac{mv^2}{\Delta x} = \frac{0{,}02 \cdot 10^2}{0{,}002\,mm} = 1000\,N$$

Forza elastica

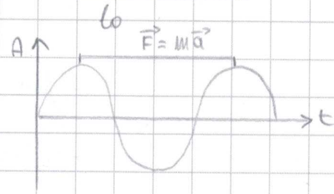
se sposto molla da posizione di equilibrio, agisce una forza che tenderà a riportare molla in posizione di equilibrio. Forza che si oppone allo spostamento.

$$\vec{F} = -kx\,\vec{u_x}$$



k costante elastica

$$[k] = \frac{F}{l} = \frac{N}{m}$$



$$\vec{F} = m\vec{a} = -kx\,\vec{u_x} = m\frac{d^2x}{d^2t}\,\vec{u_x}$$

$$-kx \overset{!}{=} m\frac{d^2x}{d^2t}$$ eq. differenziale per trovare legge oraria x(t)

$x(t) = A\,sen(\omega t + \phi)$ derivo

$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi)$

$\frac{d^2x(t)}{dt} = a(t) = -A\omega^2\,sen(\omega t + \phi)$

$$-k\cancel{A}\,\cancel{sen(\omega t + \phi)} = -m\cancel{A}\omega^2\,\cancel{sen(\omega t + \phi)}$$

$$k \overset{!}{=} m\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{pulsazione}$$

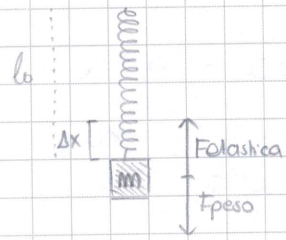
$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ fruquenca $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ se massa è piccola, oscilla velocemente

$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ periodo $= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$x(t) = A\,sen\left(\sqrt{\frac{k}{\omega}}\,t + \phi\right)$ legge oraria

Impostate A e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali, (ϕ fase, numero adimensionale, dipende dalla funzione seno quando $t = 0s$)

es. $\Delta x = ?$, $m = ?$



$F_{el.} = F_{pe.}$

$k\Delta x = mg$

$\Delta x = \frac{mg}{k}$

$$T = \frac{t_{tot}}{n^{\circ}\text{oscillazioni}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{T^2}{2\pi^2} = \frac{m}{k}$$

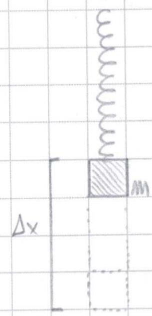
$$m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$

es. $m = 74\,kg$

$\Delta x = 0.5\,m$

$\nu = ?$

$T = ?$



$F_p = F_{el.}$

$mg = k\Delta x$

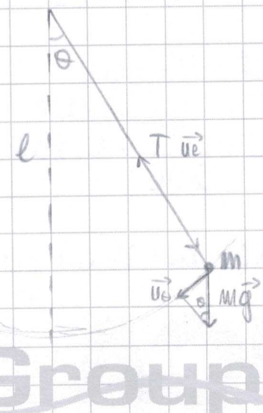
$k = \frac{mg}{\Delta x}$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg}{m\Delta x}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta x}} = 0{,}7\ Hz$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{\nu} = 1{,}42\,s$$

Pendolo

Tensione: coppia di forze abraccio lungo che si trova in ogni punto della nostra funzione



$\vec{F} = T\,\vec{u_e}$

$\vec{F_{tot}} = m\vec{g} + T\,\vec{u_e} = mg\,sen(\theta)\,\vec{u_\theta}$ componenti tangenziali

Considero solo piccole oscillazioni (θ piccolo) allora $sen(\theta) \simeq \theta$ stesso

$\Rightarrow \quad F = mg\,sen(\Theta) = mg\,\Theta$

Per det. F=ma, mi serve legge oraria per cui passo a descrivere da coordinate angolari a lineari

x arco $= \Theta \cdot l$ (raggio) $\Rightarrow \quad \Theta = \frac{x}{l}$

$\Rightarrow \quad F = mg\,\Theta = \frac{mg}{l}\,x$ x coordinata di spostamento lungo arco

$$F = ma = \frac{mg}{l}\,x$$

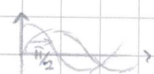
$$\cancel{m}\frac{d^2x}{d^2t} = \frac{\cancel{m}g}{l}\,x \qquad \text{eq. differenziale}$$

stessi passaggi di prima perchè il pendolo descrive moto armonico $\Rightarrow$ $x(t) = A\cos(\omega t + \Theta) = A\,sen(\omega t + \Theta)$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

non specifico fase perchè...

perchè: $sen(t) = \cos(t - \pi/2)$



ma la fase non è specificata

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

es. $m = 50\,kg$
$F = 22\,N$
$\alpha = 60°$
$\mu_d = 0.2$
$\vec{a_x} = ?$
$v_0 = 2\,m/s$
$t_f = ?$
$x_f = ?$

$$F = ma = -F\cos(\alpha) - \mu_d N$$

$$a = \frac{-F\cos(\alpha) - \mu_d N}{m} = \frac{-F\cos(\alpha) - \mu_d(mg + F\,sen(\alpha))}{m} = -\frac{22/2 + 0.2(50 \cdot 9{,}81 + 22\sqrt{3}/2)}{50}$$

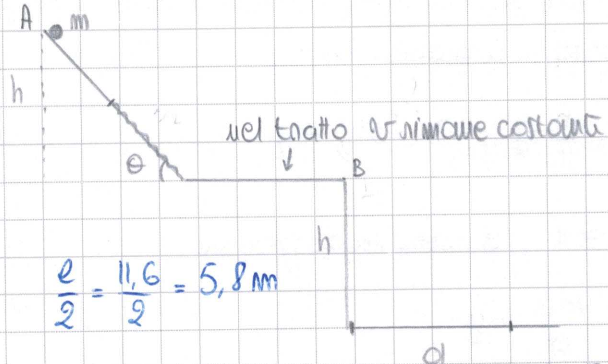
$$= -2{,}26\,m/s^2$$

$v_f = v_0 + at$
$0 = 2 - 2{,}26t$
$t = \frac{2}{2{,}26} = 0{,}89s$

$$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 2 \cdot 0{,}89 - \frac{1}{2} \cdot 2{,}26 \cdot (0{,}89)^2 = 0{,}88\,m$$

es

$m = 1\,kg$
$h = 10\,m$
$\mu_d = 0.2$ comincia dal $h/2$
$\theta = 60°$
$d = ?$



$$l = \frac{h}{sen(\theta)} = \frac{10}{sen(60°)} = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11,6\,m \qquad \frac{l}{2} = \frac{11,6}{2} = 5,8\,m$$

$$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} g\,sen(\theta)\,t^2 = \frac{1}{2} g\,sen(\theta)\,t^2$$

$$5,8 = \frac{1}{2}\,9.81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{5,8 \cdot 4}{9,81 \cdot \sqrt{3}}} = 1,17\,s$$

$$v_f = v_0 + at = 0 + g\,sen(\theta)\,t = 9,81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1,17 = 9,93\,m/s$$

$F = ma$
$mg\,sen(\theta) - \mu_d N = ma$
$\cancel{m}g\,sen(\theta) - \mu_d \cancel{m}g\cos(\alpha) = \cancel{m}a$
$$a = g(sen(\theta) - \mu_d \cos(\alpha)) = 9,81\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 7,51\,m/s^2$$

$$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$5,8 = 0 + 9,93t + \frac{1}{2} \cdot 7,51t^2$$
$$3,75t^2 + 9,93t - 5,8 = 0$$
$$t_{1/2} = \frac{-9,93 + \sqrt{9,93^2 + 4 \cdot 5,8 \cdot 3,75}}{2 \cdot 3,75} = 0,5\,s$$

$$v_f = v_0 + at = 9,93 + 0,5 \cdot 7,51 = 13,7\,m/s$$
$$y = y_0 + v_0 + \frac{1}{2}at^2$$
$$0 = 10 + 0 \cdot t - \frac{1}{2}\,9,81t^2$$
$$t = \sqrt{\frac{10}{4,905}} = 1,42\,s$$

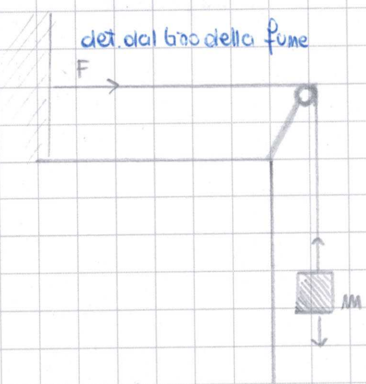
$$v_f = v_0 t + x_0 = 13,7 \cdot 1,42 + 0 = 19,6\,m$$

risolto con Ec

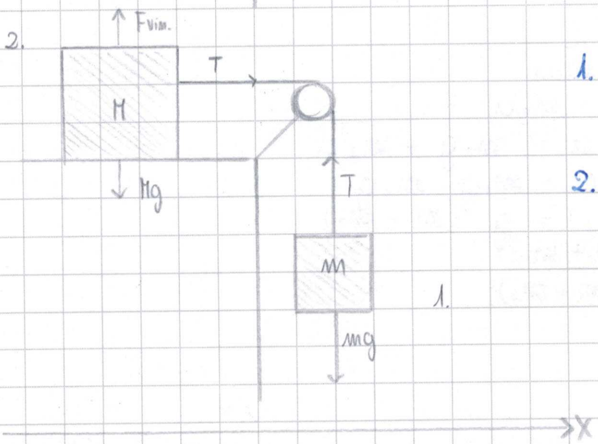
$$\mathcal{L}_{A\to B} = \mathcal{L}_{F_{peso}} + \mathcal{L}_{F_{att.}} = mgh - \mu_d N \frac{l}{2} = mgh - \mu_d\,mg\cos(\theta)\frac{l}{2} = \Delta E_c$$
$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 = \cancel{m}gh - \mu_d \cancel{m}g\cos(\theta)\frac{l}{2}$$
$$v_f = \sqrt{((9,81 \cdot 10) - (0,2 \cdot 9,81 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,8))} = 13,7\,m/s$$

Se la massa è ferma, forza peso bilanciato da tensione

$T = mg$



es.



1. $\vec{F} = m\vec{a_1}$
$mg - T = ma_1$

2. $\vec{F} = M\vec{a_2}$
$\cancel{Mg} - \cancel{F_{vin}} + T = Ma_2$
$T = Ma_2$

Poiché la fune è inestensibile, l tra corpi è la stessa e poiché $a = d^2x/d^2t$, $a_1 = a_2 = a$

$$\begin{cases} ma = mg - T \\ Ma = T \end{cases}$$
$$ma = mg - Ma$$
$$a = \frac{mg}{m+M} \Rightarrow \text{m. unif. accelerato}$$

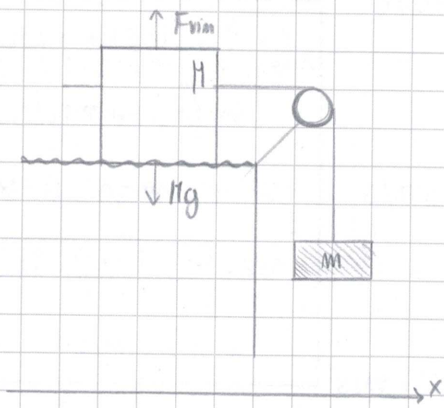
se $M >> m$, a si avvicina a zero

$$a = \frac{m}{M} g \Rightarrow Ma = mg$$

se $m >> M$, a sarà molto grande

$$a = \frac{\cancel{m} g}{\cancel{m}} = g$$

es.



$$F_{att.s} = -\mu_s N = -\mu_s \cdot Mg$$

se $T > F_{att.s}$ corpo si muove
se $T < F_{att.s}$ corpo sta fermo
$T < \mu_s Mg$ ma $T = mg$
$mg < \mu_s M \cancel{g}$
$m < \mu_s M$

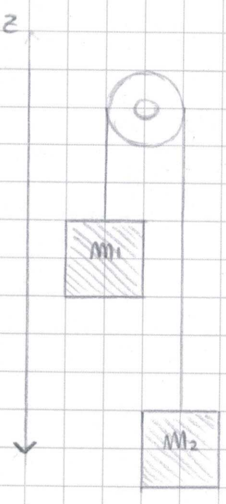
entro anche μ_d:

$T = Ma$ per il corpo grande
$T - F_{att.d} = Ma$
$T - \mu_d N = Ma$
$T - \mu_d Mg = Ma$
$T = Ma + \mu_d Mg$ ma $mg - T = ma$

$$mg - Ma - \mu_d Mg = ma$$

$$a = \frac{mg - \mu_d Mg}{M + m} \Rightarrow \text{m. unif. accelerato}$$

es.



1. $F = ma$
$m_1 g - T = m_1 a_1 = m_1 a$

2. $F = ma$
$m_2 g - T = m_2 a_2 = -m_2 a$

$|a_1| = |a_2|$ ma verso opposto
$a_1 = -a_2 = a$

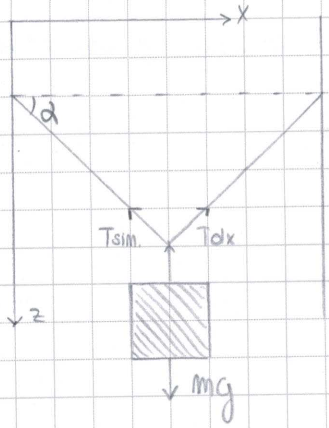
$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ m_2 g - T = -m_2 a \end{cases}$$

$m_1 g - m_1 a = m_2 g + m_2 a$
$m_2 a + m_1 a = m_1 g - m_2 g$
$a(m_1 + m_2) = g(m_1 - m_2)$

$$a = g \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

se $m_1 = m_2$, $a = 0$
se $m_1 << m_2$ o viceversa, $a = g$

es.

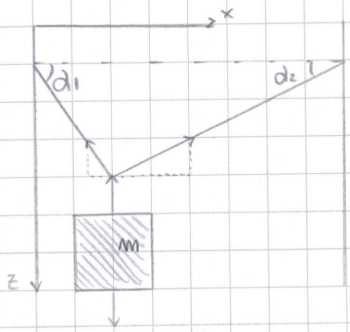


$m = 20\,kg$
$\alpha = 15°$

$\vec{T}_{sm} = -(sen(\alpha)T)\hat{z}\ (cos(\alpha)T)\hat{x}$
$\vec{T}_{dx} = -(sen(\alpha)T)\hat{z}\ (cos(\alpha)T)\hat{x}$

$F = 0$
$mg - sen(\alpha)T - sen(\alpha)T = 0$
$T = \dfrac{mg}{2sen(\alpha)} = \dfrac{20 \cdot 9{,}81}{sen(15°)} = 378\ N$

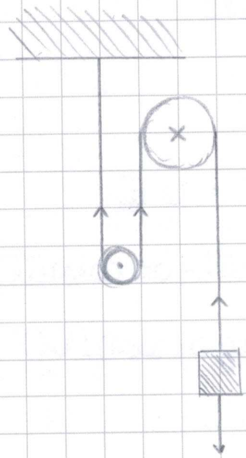
es.



$m = 74\,kg$
$\alpha_1 = 60°$
$\alpha_2 = 30°$

$\vec{F} = 0$
$\begin{cases} mg - sen(\alpha_1)T_1 - sen(\alpha_2)T_2 = 0 \\ -T_1 cos(\alpha_1) + T_2 cos(\alpha_2) = 0 \end{cases}$
$T_2 = \dfrac{T_1 cos(\alpha_1)}{cos(\alpha_2)}$
$mg - sen(\alpha_1)T_1 - \dfrac{T_1 sen(\alpha_2)cos(\alpha_1)}{cos(\alpha_2)} = 0$
$T_1 = mg \Big/ \left(sen(\alpha_1) + \dfrac{sen(\alpha_2)cos(\alpha_1)}{cos(\alpha_2)}\right) = 628{,}7\ N$
$T_2 = 362{,}9\ N$

es.



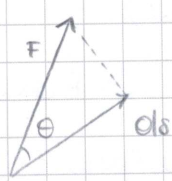
$gM = 2T$
$mg = T$

$Mg = 2mg$
$M = 2m$

Le carrucole amplificano effetto delle forze. Angoni che fregano xò sullo spazio spostato

Lavoro

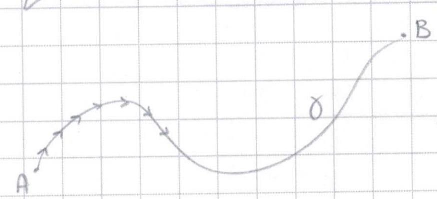
$\mathcal{L} = F \cdot x = \vec{F} \cdot \vec{ds}$



~~forza~~ lavoro elementare $d\mathcal{L} = F\cos(\theta)\,ds = \vec{F} \cdot \vec{ds}$

↑ ci spostiamo poco così la F è costante

$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{ds}$



$\mathcal{L}_{A \xrightarrow{\gamma} B}$: suddivido spostamento in spostamenti elementari poi in ogni spostamento elementare calcolo il lavoro elementare e poi faccio la somma

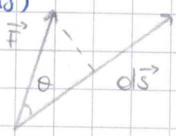
si misura in $[N] \cdot [m] = [J]$ Joule

$\mathcal{L}_{A \xrightarrow{\gamma} B} = \int_{A_\gamma}^{B} d\mathcal{L} = \int_{A_\gamma}^{B} \vec{F}\,\vec{ds}$ integrale di cammino

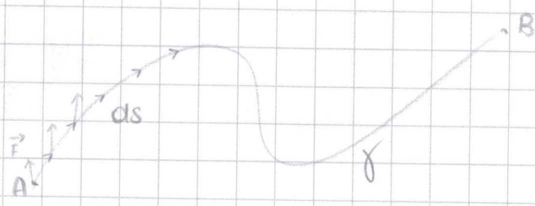
Parliamo di lavoro elementare (piccoli spostamenti per cui F rimanga in essi costante).

$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{ds}$ prodotto scalare (proiezione di F su ds)

$d\mathcal{L} = F\, ds \cos(\theta)$



Lavoro finito somma di valori elementari (integrale di linea)

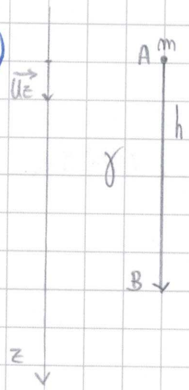


Campo: grandezza def. in ogni punto dello spazio (c. di forze: F def. in ogni punto).

$$\mathcal{L} = \int d\mathcal{L} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\vec{ds}$$

$\vec{ds}$ → tratto piccolo del cammino

es.



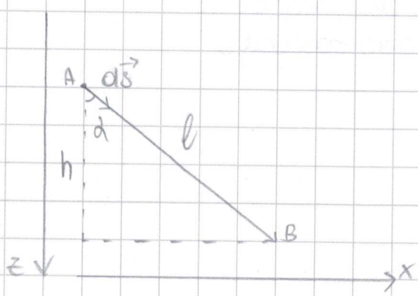
$\vec{F} = m\vec{g} = mg\,\vec{u_z}$

$\vec{ds} = dz\,\vec{u_z}$ spostamento lungo z

$$\mathcal{L} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\vec{ds} = \int_A^B mg\,\vec{u_z} \cdot dz\,\vec{u_z} = \int_A^B mg\,dz\,\underbrace{(\vec{u_z})^2}_{1} = \underbrace{mg}_{\text{costanti}} \int_A^B dz =$$

$$= mg\,(z_B - z_A) = mgh$$ lavoro della f. peso

es.



$\vec{F} = mg\,\vec{u_z}$

$\vec{ds} = ds \operatorname{sen}(\alpha)\,\vec{u_x} + ds\cos(\alpha)\,\vec{u_z} + 0\,\vec{u_y}$

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F}\vec{ds} = \int_A^B mg\,\vec{u_z}\,(ds\operatorname{sen}(\alpha)\,\vec{u_x} + ds\cos(\alpha)\,\vec{u_z}) =$$

$$= \int_A^B (mg\,ds\operatorname{sen}(\alpha)\underbrace{(\vec{u_z}\cdot\vec{u_x})}_{\text{ortogonali}=0}) + (mg\,ds\cos(\alpha))\underbrace{(\vec{u_z})^2}_{1} =$$

$$= \int_A^B mg\,ds\cos(\alpha) =$$

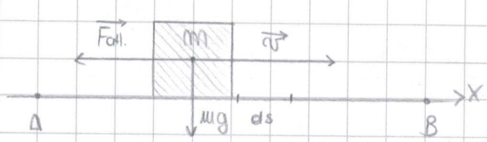
$$= mg\int_A^B ds\cos(\alpha) = mg\,(\ell\cos(\alpha)) = mgh$$

Il lavoro viene calcolato sempre sulla differenza di altezza tra i due punti, indipendentemente dal percorso richiesto (diagonali, spirali, ecc.)

spiegazione della formula: $\mathcal{L} = F\,ds\cos(\alpha)$ (è imp. la componente di F lungo spostamento)

Ciò è valido solo rispetto alla Fpeso (=> f. potenziale conservativa)

es.



$F_{att} = \mu_d N = \mu_d\, mg$

$$\mathcal{L}_{att.\,A\to B} = \int_A^B \vec{F_{att}}\cdot\vec{ds} = \int_A^B |F||ds|\underbrace{\cos(\alpha)}_{180° \to -1} = \int_A^B -F_{att}\,ds =$$

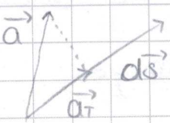
$$= -F_{att}\int_A^B ds = -F_{att}\cdot\ell$$ (lunghezza curva)

$\mathcal{L} = -\mu_d\, m g\, l$ lavoro della f. d'attrito

Teorema dell'energia cinetica

$$d\mathcal{L} = \vec F \cdot \vec{ds} \quad \text{ma} \quad \vec F = m\vec a$$
$$= m\vec a \cdot \vec{ds}$$
$$= m\, a_T\, ds \qquad a_T \text{ componente tangenziale di } a$$
$$= m \frac{dv}{dt}\, ds$$

m($\vec a \cdot \vec{ds}$) è il prodotto scalare (proiezione di $\vec a$ su $\vec{ds}$ => è la sua componente tangenziale).



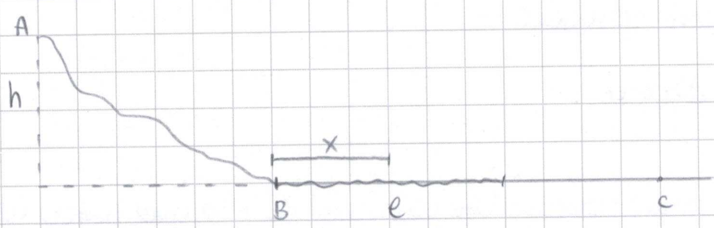
$$\mathcal{L}_{A\to B_\gamma} = \int_A^B \vec F \vec{ds} = \int_A^B m \frac{dv}{dt}\, ds = \int_A^B m\, dv \frac{ds}{dt} = \int_A^B m v\, dv = m\int_A^B v\, dv = \left[\frac{1}{2} m v^2\right]_A^B$$
$$= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

lavoro comporta solo variazione del mod di velocità

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$ energia cinetica

$\mathcal{L} = \Delta E_c$

85



$m = 2kg$
$h = 10m$
$l = 50m$
$\mu_d = 0.3$
$V_B = ?$
$V_C = ?$
$V_a = 0\,m/s$

$$\mathcal{L}_{AB} = mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$
$$\cancel{m} gh = \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2$$
$$v_B = \sqrt{2hg} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 9{,}81} = 14\, m/s$$

unica f. che agisce è f. peso per cui considero solo sua componente sullo spostamento

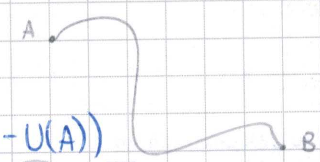
$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \cancel{m} v_C^2 - \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 = \mathcal{L}_{\substack{att.\\ A\to C}} = -\mu_d \cancel{m} g \cdot l$$
$$v_C^2 - v_B^2 = -\mu_d g l \cdot 2$$
$$v_C = \sqrt{-\mu_d g l\, 2 + v_B}$$

c'è anche f. peso ma non fa lavoro perché ortogonale

imp. non avrò abbastanza E per passare l, rimarrò bloccato a x (= ?)

allora $-\frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 = -\mu_d \cancel{m} g x$ e $v_C = v_f = 0\, m/s$ perché si ferma

$$x = \frac{v_B^2}{2\mu_d g} = 33.3\, m$$



$$\mathcal{L}_{A\to B} = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$
$$\mathcal{L}_{A\to B} = \int_A^B \vec F \vec{ds} - \mathcal{L}(A,B) = U(A) - U(B) = -(U(B) - U(A)) = -\Delta U$$

la funzione $\mathcal{L}(A,B)$ la esprimo con la differenza di energia potenziale

$$\mathcal{L}_{A\to B} = -\Delta U$$

U = energia potenziale

Le forze conservative possono vedere espresso il $\mathcal{L}$ come ΔU (poiché non def. il potenziale di un punto che non avrebbe senso, ma descrivo $\mathcal{L}$ come variazione di U tra due punti).

$U = mgz$ un punto non ha E intrinseca ma è imp. la diff. di due punti.

↑

energia potenziale di Fpe.

$$\mathcal{L}_{A\to B} = -\Delta U = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -(U(B) - U(A)) = U(A) - U(B)$$

$$U(A) + \frac{1}{2} m v_A^2 = U(B) + \frac{1}{2} m v_B^2$$

La somma delle energie in un percorso rimane costante (aumentando una diminuisce l'altra).

Emec. = energia meccanica = $U + E_c$

(le forze sono conservative se Em costante e viceversa)

Emec., forza conservativa se Emec costante

$\mathcal{L}_{Fatt.}$ (forza non conservativa) = $\Delta E_{mec.}$

Se conosco potenziale in un punto è meno oneroso che conoscere la F in quel punto (che vuole intensità, direzione, verso), invece potenziale è un numero. Passare da lavoro a U faccio integrale, per fare contrario faccio la derivata del U per trovare F.
La F è la tendenza di un sistema ad andare verso un sistema ad energie minori.

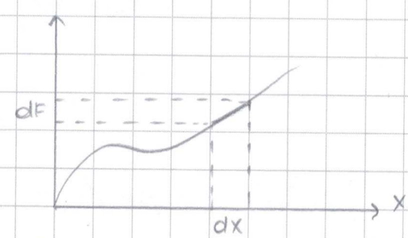
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{dU}{dx}\vec{u_x} - \frac{dU}{dy}\vec{u_y} - \frac{dU}{dz}\vec{u_z}$$

$U(A) = U(x; y; z)$

∇: gradiente (variazione della funzione rispetto all' asse x, def. la tan(α), la pendenza della curva della funzione).

Energia è una descrizione ancora più completa dei sistemi rispetto alle forze.

$$\nabla = \frac{df}{dx}$$



Forza conservativa: lavoro su cammino chiuso è nullo => $\Delta U = 0$

$$\oint \vec{F}\,d\vec{s} = 0$$

↑

lavoro (integrale) su percorso chiuso

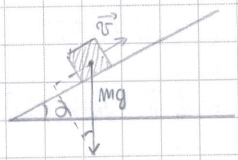
Potenza

$$\frac{dL}{dt} = P = \frac{d(\vec{F}\cdot\vec{ds})}{dt} \underset{\text{se F è costante}}{=} \vec{F}\cdot\frac{\vec{ds}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

W (watt) = J/s

capacità di compiere lavoro su unità di tempo

es. $m = 1.000$ kg
$\alpha = 30°$
$P = 60$ kW
$v_{max} = ?$



$P = F\cdot v = F\operatorname{sen}(\alpha) v = mg\operatorname{sen}(\alpha) v =$

$10^3\cdot 60 = 1000\cdot 9,81 \operatorname{sen}(30°) v$

$v = 8,16$ m/s ~ 30 km/h

$P = \frac{[J]}{s}$ $\quad$ kW/h $= \frac{[KW]}{[h]} = \frac{10^3[W]}{3.600\,[s]} = 3,6\cdot 10^6$ W·s $= 3,6\cdot 10^6$ J

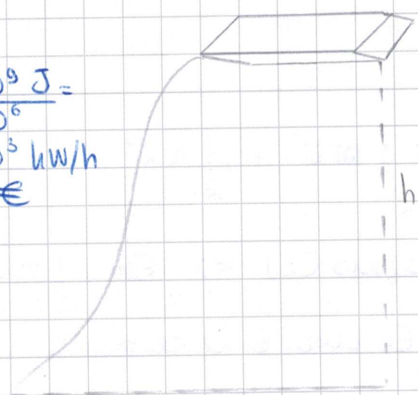
es. $m = 2.000$ kg $\quad$ 1kW/h = 0,272 €
$h = 2.000$ m

$\Delta U = mgh = 2\cdot 10^3\cdot 9,81\cdot 2000 = \frac{39,2\cdot 10^6 \text{ J}}{3,6\cdot 10^6} = 10,89$ kW/h

€ $= 10,89\cdot 0,272 = 2,9$ €

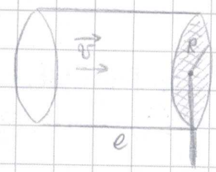
es. $h = 1000$ m $\quad$ piscina olimpionica

$U = mgh = \underbrace{(50\times 25\times 2)\,10^3}_{\text{metri cubi } (1m^3 = 1000 kg)}\,9,81\cdot 1000 = \frac{24,5\cdot 10^9 \text{ J}}{3,6\cdot 10^6} = 6,8\cdot 10^3$ kW/h $= 1851$ €



es. $t = 8$ s $\quad m = 52$ kg
$h = 4$ m

$P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t} = \frac{\cancel{52}^{26}\cdot 9,81\cdot \cancel{4}}{\cancel{8}^2} = 255,06$ W es. $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (vtR^2\pi) \rho v^2$



$1m^3$ di aria ~ 1 kg $\rho = 1 kg/m^3$

$\ell = v \cdot t$

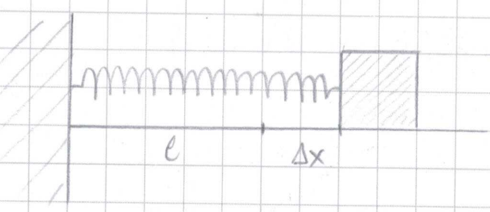
$V = v \cdot t \cdot R^2\pi$ volume d'aria

$E_c = \frac{1}{2} tR^2\pi \rho v^3$ Ec dipende dal cubo della v

$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \pi R^2 v^3$ derivando va via la t, gli altri sono costanti

$= \frac{1}{2}\pi (20)^2 10^3 = 6{,}28 \cdot 10^5 \ W = 628 \ kW = 170 \ €/h$

Se Em non si conserva ci sono nel sistema forze non conservative/dissipative (v. attrito) allora $\Delta E_m = L_{attrito}$ e non ~~può~~ più nullo

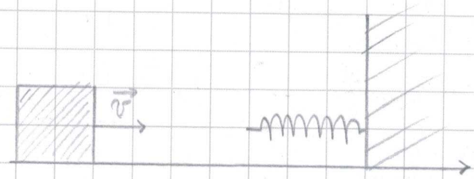


$\vec{F} = -kx \vec{u_x}$ $\vec{ds} = dx \ \vec{u_x}$

$L_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_A^B -kx \vec{u_x} \vec{ds} = -\int kx \ d\vec{u_x} \cdot \vec{u_x} = -\int_A^B kx \ dx = -\left[k \frac{x^2}{2}\right]_A^B = -\Delta U$

$U = -\frac{1}{2} kx^2$ forza elastica è forza conservativa perché ammette potenziale.

es.



v costante finché non arriva a contatto con la molla. Felastica max quando compressione max, max Δx. ($v = 0$ m/s in quel punto). $v_f = v_0$ perché forze conservative che non dissipano E.

$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$

- inizio (solo Ec) $\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m v^2$ perché $\Delta x = 0$

poi Ec cala e U aumenta (v diminuisce e Δx cresce fino al max)

- max compressione (solo U) $\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} k x^2_{max}$ perché $v = 0$

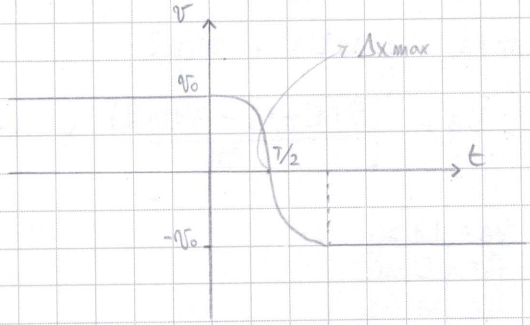
ma forze conservative $\Rightarrow$ $E_{m_i} = E_{m_f}$

$\cancel{\frac{1}{2}} m v^2 = \cancel{\frac{1}{2}} k x^2_{max}$

$x_{max} = \sqrt{\frac{m v^2}{k}} = v \sqrt{\frac{m}{k}}$

$F_{max} = k x^2_{max} = k \cdot v \sqrt{\frac{m}{k}} = v\sqrt{mk}$

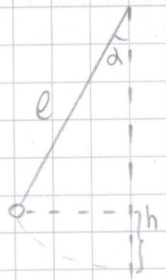
come varia $v(t)$, prima costante poi di nuovo costante ma opposta in mezzo fa mezzo moto armonico (frenato da molla).



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

es.



$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + U = \frac{1}{2} m v^2 + m g h(\alpha)$$

$$h = \ell - \ell\cos(\alpha) = \ell(1-\cos(\alpha))$$

Quando h_{max}, $v = \emptyset$ (max), $E_m = \cancel{U\ solo}\ E_c$

$E_m = \cancel{m g h_{max}}\ \frac{1}{2} m v^2_{max}$ perchè $h_{max} = 0$ (def. come differenza)

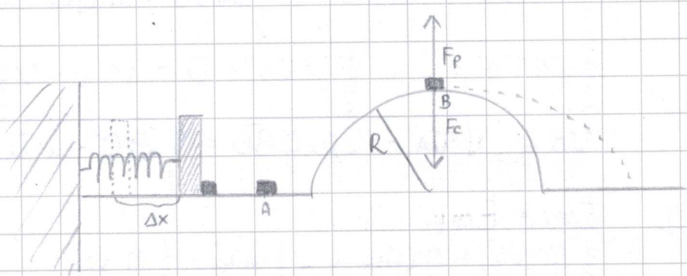
nel momento in cui lo lascio $v=0$
e $E_m = U$ solo, ma E_m conservativa $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \cancel{m} g h$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

es.

$m = 2\,kg$ $\quad R = 5\,m$
$k = 100\ N/m$
Δx lim affinchè corpo si sollevi = ?



Ciò avviene quando $F_{centripeta} \geq F_{peso}$

$$\frac{m v^2}{R} \overset{!}{\geq} m g$$

$$v_B \geq \sqrt{Rg}$$

$$E_{m_i} = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow E_{m f_A} = \frac{1}{2} m v_A^2$$

all'inizio della collina Ec cala e aumenta il potenziale, ma Ec non cala fino a scomparire

$$E_{m f_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g R$$

$$E_{m_i} = E_{m f_B}$$

$$\frac{1}{2} k x^2 \overset{!}{=} \frac{1}{2} m v_B^2 + m g R$$

$$x_{lim} \overset{!}{=} \sqrt{\frac{1}{\cancel{2}}\frac{m(\sqrt{Rg})^2 \cdot \cancel{2}}{k} + \frac{m R g\, 2}{k}} \overset{!}{=} \sqrt{\frac{3mRg}{k}} = \sqrt{\frac{3\cdot 2\cdot 5\cdot 9{,}81}{100}} \sim \sqrt{3} = 1{,}71\ m$$

se $\Delta x >$ lim grave fa moto parabolico

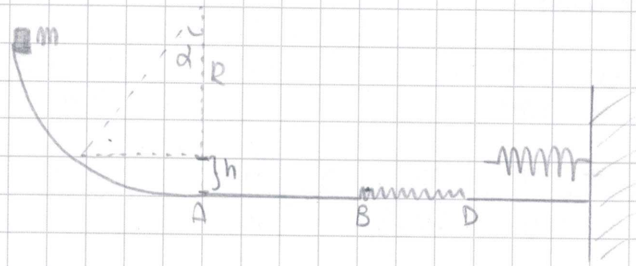
$$E_{m_i} = \frac{1}{2} k\, x_{lim}^2 = \frac{1}{2} 100 (\sqrt{3})^2 \sim 150\ J$$

$$E_{m f_A} = \frac{1}{2} m v_A^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2 E_{m f_A}}{m}} \sim 12{,}1\ m/s$$

$$Emf_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgR$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2(Emf_B - mgR)}{m}} \sim 6{,}94\ m/s$$

es. $m = 18\ kg$
$R = 40\ m$
A orizzontale
$BD = 60\ m$
$\mu_d = 0.12$
$k = 100\ N/m$



1) quanto vale v_A = ?
2) quanto v_D = ?
3) max compressione di molla ?
4) max Felastica
5) arriva in B? con che velocità?
6) h max di risalita
7) dove si ferma?

$\mathcal{L}_{att.}$ consuma tutta energia mec.
$\mathcal{L}_{att.} = - \overline{BD} \cdot F_{att.} = -\overline{BD}\mu_d mg$

produce nuova Ec tutta consumata per risalire la curva, $E_c = mgh$

1). $Em_i = Em_f$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 + \cancel{m} gR = \frac{1}{2} \cancel{m} v_A^2 + \cancel{m} g h_0$$

$$v_A = \sqrt{2gR + v_0^2 - gh_0 2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 40 + 0^2 - 9{,}81 \cdot 0 \cdot 2} = 28{,}0\ m/s$$

2). $Em_i = Em_f - \mathcal{L}_{att.}$

$\Delta Em = \mathcal{L}_{att.}$
$Em_f - Em_i = - F_{att.} \cdot \overline{BD}$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_0 = \frac{1}{2} m v_D^2 + mgh_0 - (- F_{att.} \cdot \overline{BD})$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_A^2 + 0 = \frac{1}{2} \cancel{m} v_D^2 + 0 - (-\mu_d \cancel{m} g\, \overline{BD})$$

$$v_D = \sqrt{v_A^2 - 2\mu_d g\, \overline{BD}} = \sqrt{28{,}0^2 - 2 \cdot 0{,}12 \cdot 9{,}81 \cdot 60} = 25{,}3\ m/s$$

3). $Em_i = Em_f$

in X_{max}, $v_{Df} = 0\ m/s$

$$\frac{1}{2} m v_D^2 + mgh_0 = -\frac{1}{2} k x_m^2 + \frac{1}{2} m v_{Df}^2$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} m v_D^2 + 0 = -\cancel{\frac{1}{2}} k x_{max}^2 + 0$$

$$|x| = \sqrt{\frac{m v_D^2}{k}} = \sqrt{\frac{18 \cdot 25{,}3^2}{100}} = 10{,}7\ m$$

4). $F_{el.max} = -k X_{max} = -100 \cdot 10{,}7 = -\cancel{107}\ N = -1070\ N$

5) $\Delta Em = \mathcal{L}_{att.}$

$Em_f - Em_i = - F_{att.} \cdot \overline{BD}$

$$\left(\frac{1}{2} m v_B^2 + mgh_0\right) - \left(\frac{1}{2} m v_D^2 + mgh_0\right) = -\mu_d mg\, \overline{BD}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 + 0 - \frac{1}{2} \cancel{m} v_D^2 + 0 = -\mu_d \cancel{m} g\, \overline{BD}$$

$$v_B = \sqrt{v_D^2 - 2\mu_d g\, \overline{BD}} = \sqrt{25{,}3^2 - 2 \cdot 0{,}12 \cdot 9{,}81 \cdot 60} = 22{,}3\ m/s$$

6). $Em_i = Em_f$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + mgh_0 = \frac{1}{2} m v_f^2 + mgh$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 + 0 = 0 + \cancel{m} gh$$

$$h = \sqrt{\frac{v_B^2}{2g}} = \sqrt{\frac{22,3^2}{2\cdot 9,81}} = 5,03 \text{ m}$$

$$R - h = 40 - 5,03 = 34,96 \approx 35 \text{ m}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{R-h}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{465}{40}\right) = 28,95° \approx 29°$$

f.) $E_{mi} = E_{mf}$

$$\cancel{m} g h = \frac{1}{2} v_{A'}^2 \cancel{m}$$

$$v_{A'} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9,81\cdot 5,03} = 9,93 \text{ m/s}$$

$\Delta E_m = \mathcal{L}_{att.}$

$E_{mf} - E_{mi} = \mathcal{L}_{att.}$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_{D'}^2 - \frac{1}{2}\cancel{m} v_{A'}^2 = -\mu_0 \cancel{m} g \overline{BD}$$

$$v_{D'} = \sqrt{v_{A'}^2 - 2\mu_0 g \overline{BD}} = \sqrt{9,93^2 - 2\cdot 0,12\cdot 9,81\cdot 60} = \sqrt{-43,1} = \text{imp.}$$

$\Rightarrow$ si ferma nel tratto con l'attrito

$F_{att.} = ma$

$-\mu_0 \cancel{m} g = \cancel{m} a$

$a = -\mu_0 g = -0.12\cdot 9,81 = -1,18 \text{ m/s}^2$

$v_f = v_0 + at = 9,93 - 1,18\, t$

$$t = \sqrt{\frac{v_f - v_0}{a}} = \sqrt{\frac{0 - 9,93}{-1,18}} = 8,4 \text{ s}$$

$$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 + 9,93\cdot 8,4 - \frac{1}{2}\cdot 1,18\cdot 8,4^2 = 41,8 \text{ m}$$

o

$E_{mf} - E_{mi} = \mathcal{L}_{att.}$

$\cancel{E_{mf}} - E_{mi} = \mathcal{L}_{att.}$

$+\frac{1}{2}\cancel{m} v_{D'}^2 = +\mu_0 \cancel{m} g\, x_f$

$$x_f = \frac{v_{D'}^2}{2\mu_0 g}$$

$x_f = 41,8 \text{ m}$

$E_m = mgR$

$\mathcal{L}_{att} = F_{att.}\cdot \ell = \mu_0 \cancel{mg}\cdot L = \cancel{mg} R$

$$\ell = \frac{R}{\mu_0} = \frac{40}{0.12} = 333,3 \text{ m}$$

se $\dfrac{\ell}{BD} = \dfrac{333,3}{60} = 5,55$ trovo quante volte passa per L e lo sconto dopo la virgola det. x_f dove si ferma

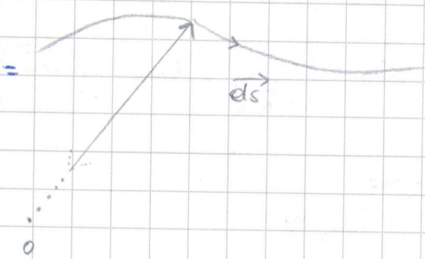
$0,55\cdot 60 = 33$ m dal punto D

Forze centrali

Forze conservative sono le forze centrali, sempre dirette verso un punto (in maniera entrante o uscente lungo la componente radiale).

$$\vec{F} = F(r)\,\vec{u_r}$$

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r)\,\vec{u_r}\,(dr\,\vec{u_r} + dl\,\vec{u_\theta}) =$$



$$d\vec{s} = dr\,\vec{u_r} + dl\,\vec{u_\theta}$$

ortogonali $= 0$

$$= \int_A^B F(r)\,dr$$

$$= -\Delta U$$

unico spostamento rilevante q|| in dir. della forza che è sempre radiale

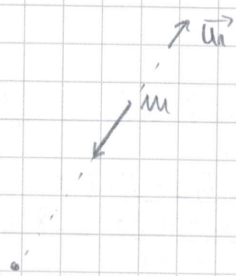
Campi radiali = campi di f. conservative

es. campo gravitazionale, f. sempre attrattiva

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\,\vec{u_r}$$

$$\mathcal{L}_{A\to B} = -\int_A^B G\frac{Mm}{r^2}\,dr = \left[-G\frac{Mm}{r}\right]_A^B =$$

$$= +\frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A} = -\Delta U$$



potenziale neg. dunque per portare corpo da Terra $\to\infty$ devo spendere energia

$$U = -G\frac{Mm}{r}$$

$$\mathcal{L}_{r_T\to\infty} = U_\infty - U_{r_T} = 0 + \frac{GMm}{r_T}$$

$E_m = E_c + U$ <0 stato legato
>0 stato libero

se $E_c > U$ allora particella ha stato libero e non è + sottoposto a vincoli di forza

velocità di fuga $E_c = -U$

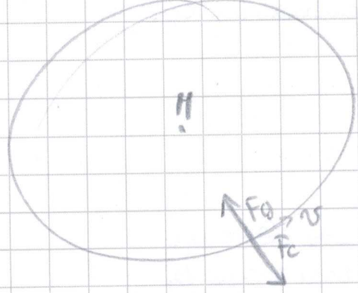
$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{r_T}$$

→ o cmq punto in cui partiamo

G costante di gravitazione universale : $6{,}67\cdot10^{-11}$
$M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg
$r_T = 6{,}38\cdot10^6$ m

$$v_f = \sqrt{\frac{GM2}{r_T}} = 11{,}2\cdot10^3\ m/s = 40.320\ km/h$$

(es.)



orbita: luogo dove $F_g = F_c$ e corpo sta in orbita (procede con moto d'inerzia circolare e non cade).

$$F_c = \frac{v^2}{R} \cdot \cancel{m} = F_g = \frac{GM\cancel{m}}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{r^2}$$ eq. geometrica che descrive orbita

orbita geostazionaria: $T = 24h$ ruota con la Terra

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 24 \cdot 3.600\,s$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \frac{(2\pi)^2 r}{T^2} = \frac{GM}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{GMT^2}{(2\pi)^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{(2\pi)^2}} = 42.168\,km$$

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 r^3}{GM}$$ periodo è proporzionale al cubo del r, più piccolo è il R + piccolo il T

(es) $\cancel{m}g = \frac{GM\cancel{m}}{r_T}$ $g = ?$

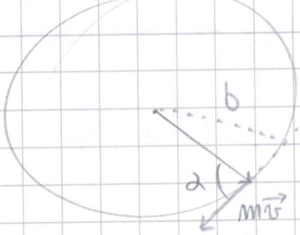
$$g = \frac{GM}{r_T} \sim 9,81\,m/s^2$$

Momento angolare

quantità di moto $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

quando $\vec{F}$ costante, a costante la quantità di moto si conserva (è eq. vettoriale per cui a può essere costante in un verso ma non negli altri).



necessito di un punto, dipende dal punto in cui calcolo momento

momento della quantità di moto/momento angolare: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

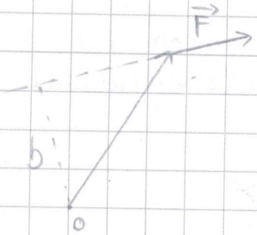
risultato è nuovo vettore $|\vec{L}| = r \cdot mv \cdot \text{sen}(\alpha)$
la direzione è $\perp$ al piano individuato dai 2 vettori e il verso è descritto da regola di mano destra

$b = r\,\text{sen}(\alpha)$ braccio vettore dove agisce la forza

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

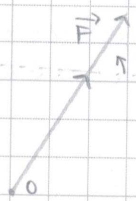
$$= \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{\text{nullo perché vettori paralleli sen}=0} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$: momento della forza

la derivata del momento angolare è il momento della forza



ho un punto e calcolo ~~po~~ forza distanza tot

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$M = r F \, sen(\alpha)$$
$$M = F \cdot b$$

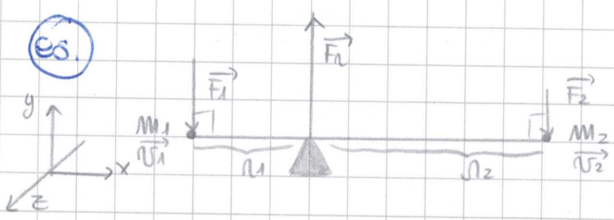


per f. centrali $M = 0$ perché f. che derivano dalla mia origine, f. in stessa direzione di R raggio, f. parallele $sen(\alpha) = 0$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

dunque $\vec{L}$ = costante $= \vec{r} \times m\vec{v}$ (vettore quantità di moto) $\Rightarrow$ è sempre ortogonale al piano $\Rightarrow$ l'orbita avviene su un piano $\Rightarrow$ più ci avviciniamo più v grande e viceversa (ciò perché $\vec{L}$ costante)

momento angolare: $\vec{L}$
" della forza: $\vec{M}$
relazione fra le due: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

es.



Affinché sistema sia fermo non basta si che F_1 F_2 e F_n si equilibrino ma perché sistema non ruoti serve anche $\vec{M} = 0$

$$\vec{M} = \vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} = (r_1 F_1 \, sen(90°) - r_2 F_2 \, sen(90°)) \vec{u_z} = 0$$

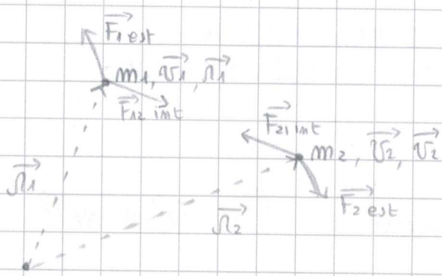
perché prodotto vettoriale entrante nel foglio

condizione necessaria perché sistema sia fermo

$\Rightarrow r_1 F_1 = r_2 F_2$ — conservazione di momento angolare implica la costruzione di una leva

momento: proiezione della quantità di moto di un corpo lungo una direzione.

es.



principio d'azione reazione: $\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$

$$\vec{p} = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2}$$
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{v_1}}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v_2}}{dt} = m_1 \vec{a_1} + m_2 \vec{a_2} = \vec{F_{12}} + \vec{F_{21}} = 0$$

variazione nulla $\Rightarrow$ $\vec{p}$ = costante

$\frac{\vec{p}}{m_1 + m_2} = \vec{v}_{cm}$ del centro di massa del sistema $= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$
un punto che fa moto rettilineo unif.

$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2}$ coordinate del centro di massa la cui v fa m. rettilineo unif.

$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{F_1} + \vec{F_2}}{m_1 + m_2}$

$$(m_1 + m_2)\vec{a}_{cm} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \cancel{\vec{F_1}int.} + \vec{F_1}est. + \cancel{\vec{F_2}int.} + \vec{F_2}est$$

$$(m_1 + m_2)\vec{a}_{cm} = M \vec{a}_{cm} = \vec{F_1}est + \vec{F_2}est = \vec{F}tot\ esterna$$

- interne sono quelle di azione ⇌ reazione e esterne sono forze indipendenti
- centro di massa si comporta come se vi fossero concentrate tutte le masse di sto sistema.
- forze interne si elidono a vicenda, agiscono su C.M. solo le $\vec{F}_{est}$ (ma se sistema potrebbe ruotare per non farlo ruotare deve essere $\vec{M}=0$).

(es.) sistema di n punti $\vec{r_i}, m_i, \vec{v_i}$

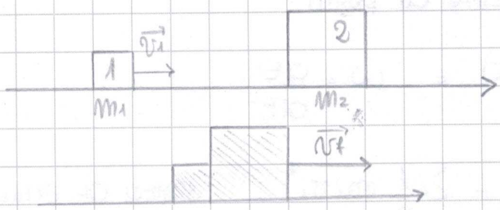
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \vec{v}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{v_i}}{\sum m_i} \qquad \vec{a}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{a_i}}{\sum m_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M \qquad \sum m_i \vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a_i} = \vec{F}_{est}$$

$$M \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{est}$$

(es.) quantità di moto si conserva se non agisce F. Fint. si annullano nel momento dell'impatto nel C.M. dei due corpi.

$v_f = ?$
$\Delta E_m = ?$

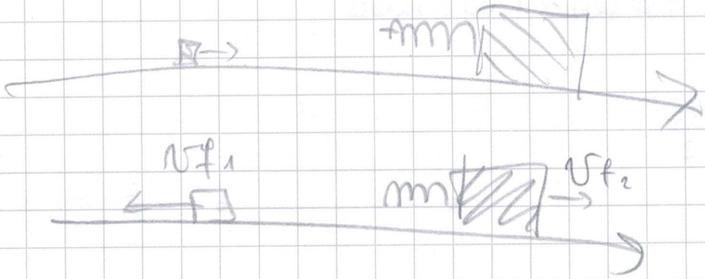


Pcostante qui, dunque si conservano:

$$m_1 v_1 = (m_1+m_2) v_f$$
$$v_f = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$$

$$\Delta E_m = E_{mf} - E_{mi} = \frac{1}{2}(m_1+m_2) v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)} \frac{(m_1 v_1)^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2}{m_1+m_2} - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2} - 1 \right)$$

se m_2 piccola $\Delta E_m = 0$



urto elastico

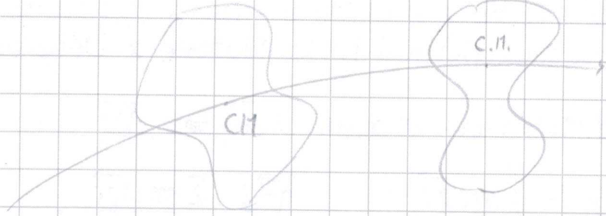
si conserva p e ΔE_m

$v_{f1} \neq v_{f2} = ?$

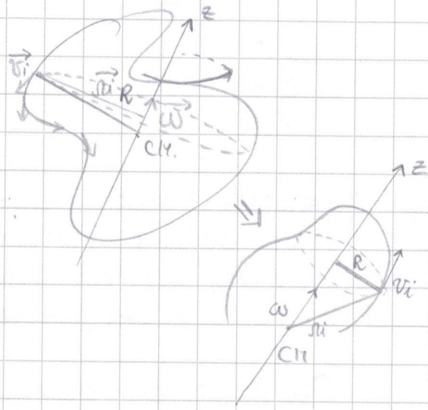
Moto rotatorio

Centro di massa di un corpo: punto del corpo che segue leggi fisiche.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$



Ciò vale per tutti i corpi, specie per i corpi rigidi (non variano forma nel moto).
I corpi hanno come moti intrinseci la traslazione (moto di CM con tutte proprietà del punto sottoposto a forze) + rotazione (moto di corpo intorno ad asse che passa per centro di massa).
Corpo rigido dalla geometria det. come un insieme di punti.



$\theta(t)$ e $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ somma di elementi singoli/punti in cui ho scomposto mio corpo

velocità tangenziale è prodotto di $\vec{\omega}$ per $\vec{r}_i$, prodotto di ~~x~~ ω per distanza ~~x~~ R da asse di rotazione z

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega R_i = \omega r_i \operatorname{sen}(\alpha)$

$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\sum_i m_i R_i^2}_{} = \frac{1}{2}\omega^2 I_z$

energia nella rotazione

momento d'inerzia rispetto all'asse z

$I_z = \sum_i m_i R_i^2$ $\quad kg\, m^2$

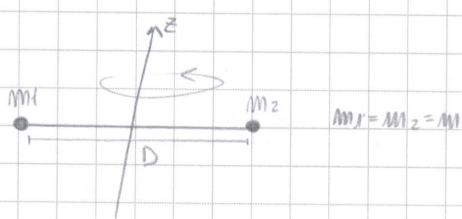
momento angolare/vettore della quantità di moto: (quantità di moto rispetto a punto) $\vec{L} = \sum_i \vec{r} \times m_i \vec{v}_i$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$L_z = I_z \cdot \omega$ come ω varia applicando F su sistema

es.

$$I_z = m_1\left(\frac{D}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{mD^2}{2}$$



$m_1 = m_2 = m$

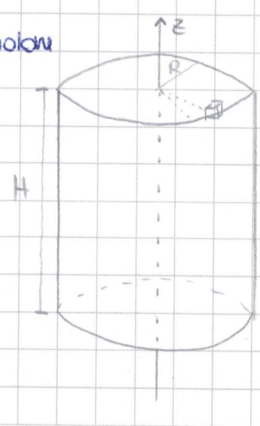
es. $I_z = ?$ $\quad \rho$ = densità

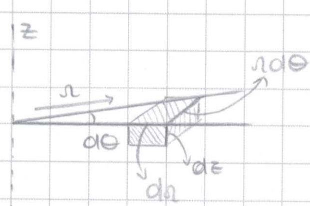
~~dr~~ dV (volume) = $dz \cdot dr \cdot \not{\phi}\, r\, d\theta$ — variazione angolare per r

dm (massa del punto) = $\rho \cdot dV$

$dI = dm \cdot R^2 = dm \cdot r^2$

$I_z = \int dI = \int dm\, r^2 = \int \rho\, dz\, d\theta\, r^2\, r\, dr$





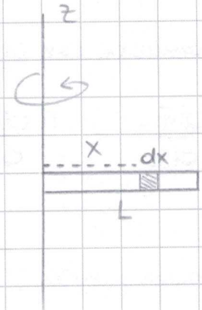
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \int_0^R \rho\, r^3 dr = 2\pi \cdot H \cdot \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi H \rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi H \rho \frac{R^4}{4}$$

$$= \frac{M \cdot R^2}{2}$$ momento d'inerzia di un cilindro

M (massa cilindro) $= \rho \cdot V = \rho \cdot (\pi R^2 H)$

es.

λ = densità di massa lineare $= \frac{m}{L} \Rightarrow m = \lambda L$



$dm = \lambda dx$

$dI = dm \cdot x^2$

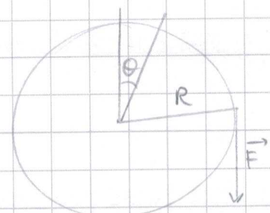
$$I = \int_0^L dI = \int_0^L dm\, x^2 = \int_0^L \lambda\, dx\, x^2 = \left[\lambda \frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{\lambda L^3}{3} = \frac{m L^2}{3}$$

es.

disco di ferro $\quad F = 2 \cdot 9{,}81\ N \quad L_z = I_z \omega$

$D = 50$ cm $\quad \Delta t = 20$ s

spessore $= 3$ cm $\quad \rho = 7\ g/cm^3$



$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ (momento della forza) in rotazione sempre

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \text{ (componente z di F)} = \overbrace{F \cdot R}^{\text{forza}\cdot\text{braccio}} = I_z \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int M_z dt}_{\text{impulso di un momento}} = \int I_z\, d\omega = \underbrace{I_z \Delta\omega}_{\text{variazione momento angolare della quantità di moto}}$$

impulso di un momento ($\neq$ di una F) produce Δ / variazione di M

variazione momento angolare della quantità di moto

il tempo che agisce un momento è la variazione del momento angolare (stesso dell'impulso ×ò per M).

momento = leva

$M \Delta t = I_z \Delta\omega$

$$F \cdot R \cdot \Delta t = \frac{m \cdot R^2}{2} \Delta\omega = \frac{(\rho \cdot V) R^2}{2} \Delta\omega = \frac{(\rho \cdot (s \cdot (D/2)^2 \cdot \pi)) R^2}{2} \cdot \Delta\omega$$

$$\left(\frac{50}{2}\right)(2 \cdot 9{,}81)\, \Delta t = \frac{(7 \cdot (3 \cdot (50/2)^2 \cdot \pi))\, (50/2)^2}{2} \cdot \Delta\omega$$

$\omega_f = 76{,}56$ rad/s $\quad \omega_f$ dopo applicazione di F

$$\nu = \frac{2\pi}{\omega} = 12.19\ Hz$$

$$E_c = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2}(1{,}28)\cdot(76{,}56)^2 = \cancel{7.502} \; 3.750 \, J$$

energia cinetica di rotazione

$$\Delta E_c = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M \, d\theta$$

teorema dell'energia cinetica per la rotazione

momento che agisce in certo angolo

$$\text{Potenza} = \frac{dE_c}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M \cdot \omega$$

momento lineare / quantità di moto: $p = mv$

Impulso: $I = F\cdot\Delta t = ma\cdot\Delta t = m\frac{\Delta v}{\cancel{\Delta t}}\cdot\cancel{\Delta t} = m\Delta v = \Delta p$

Momento d'inerzia: $I = mr^2$ $(kg\cdot m^2)$

Energia cinetica di rotazione: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\underbrace{r\omega}_{v_t})^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$

Momento angolare / momento della quantità di moto (quantità di moto lungo circonferenza) $L = mv = I\omega = mr^2\left(\frac{v}{r}\right) = r(mv) = rp$

- equivalente di p in rotazione

Momento torcente / di una forza: $M = \frac{dL}{dt} = rF$ $(N\cdot m)$

- equivalente di F in rotazione

Esercitazioni

1) $\vec{F_1} = 5.2\vec{u_x} + 2.1\vec{u_y}$
$\vec{F_2} = 3.0\vec{u_x} - 4.1\vec{u_y}$
$\vec{F_3} = -2.2\vec{u_x} - 1{,}8\vec{u_y}$

$$\vec{F}_{tot} = (5.2+3.0-2.2)\vec{u_x} + (2.1-4.1-1.8)\vec{u_y} = 6\vec{u_x} - 3{,}8\vec{u_y}$$

a.) $F_{tot} = \sqrt{6^2 + 3{,}8^2} = 7{,}1$

b.) α rispetto asse y $\quad \vec{e_y} = 0\vec{u_x} + 1\vec{u_y} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{F}\cdot\vec{u_y} = F\cdot u_y\cos(\alpha) = (F_x\cdot e_{yx}) + (F_y\cdot e_{yy})$$
$$7{,}1\cdot 1\cos(\alpha) \overset{!}{=} (6\cdot 0) + (-3{,}8\cdot 1)$$
$$\cos(\alpha) \overset{!}{=} -\frac{3{,}8}{7{,}1}$$
$$\alpha \overset{!}{=} \cos^{-1}\left(-\frac{3{,}8}{7{,}1}\right) = 122°$$

c.) $\vec{F_4} = 2\vec{u_x} + 9\vec{u_y}$

β tra vettori

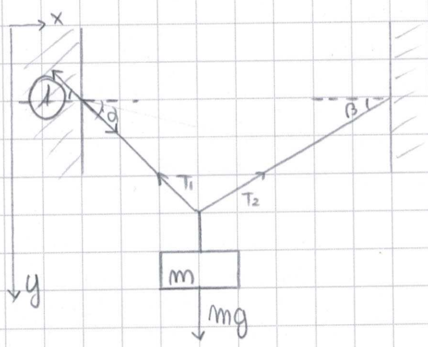
$$\vec{F}\cdot\vec{F_u} = F \cdot F_u \cos(\beta) = (F_x \cdot F_{ux}) + (F_y \cdot F_{uy})$$

$$7.1 \cdot F_u \cos(\beta) \overset{!}{=} (6 \cdot 2) + (-3{,}8 \cdot 9)$$

$$\cos(\beta) \overset{!}{=} \frac{12 - 34.2}{7{,}1 \cdot \sqrt{F_{ux}^2 + F_{uy}^2}} = \frac{12 - 34.2}{7{,}1 \cdot \sqrt{2^2 + 9^2}} = x$$

$$\beta = \cos^{-1}(x) = 109{,}9°$$

2)



$\alpha = 45°$, $\beta = 30°$

$m = 50\ kg$ $\quad T_1, T_2 = ?$

$$\Sigma F = 0$$

$$T_1 + T_2 + mg = 0$$

$$\begin{cases} \text{lungo } x: & T_2\cos(\beta) - T_1\cos(\alpha) = 0 \\ \text{lungo } y: & -T_2\,\text{sen}(\beta) - T_1\,\text{sen}(\alpha) + mg = 0 \end{cases}$$

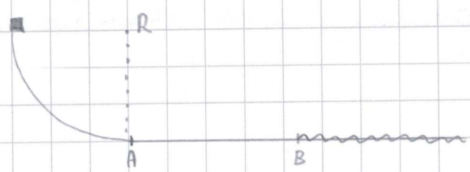
$$\begin{cases} T_2 = \dfrac{T_1\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \\ mg - T_1\,\text{sen}(\alpha) - \dfrac{T_1\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\,\text{sen}(\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{mg}{\text{sen}(\alpha) + \cos(\beta)\tan(\alpha)} = 445\ N \\ T_2 = 360\ N \end{cases}$$

a.) reazione vincolo, componente orizzontale su parete 1 = ?

$$|T_{1,x}| = T_1\cos(\alpha) = 315\ N$$

3.)



$m = 18\ kg$

$R = 20\ m$

$\mu_d = 0.12$

$v_{AB} = ?$

$\Delta x_{BD} = ?$

a.)

$$Em_i = Em_f$$

$$\cancel{m} g R = \frac{1}{2}\cancel{m} v_{AB}^2$$

$$v_{AB} \overset{!}{=} \sqrt{2gR} = 19{,}8\ m/s$$

b.)

$$\Sigma F = F_{att.} = ma$$

$$-\mu_d \cancel{m} g = \cancel{m} a$$

$$a \overset{!}{=} -\mu_d g = -1{,}18\ m/s^2$$

$$v_f = v_0 - at$$

$$0 = v_{AB} - at$$

$$t \overset{!}{=} \frac{v_{AB}}{a} = \frac{19{,}8}{1{,}18} = 16{,}8$$

$$x_f = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

$$\Delta x \overset{!}{=} 0 + 19{,}8 \cdot 16{,}8 - \frac{1}{2} 1{,}18 \cdot (16{,}8)^2 = 166\ m$$

oppure:

$$\Delta Em = L_{att.}$$

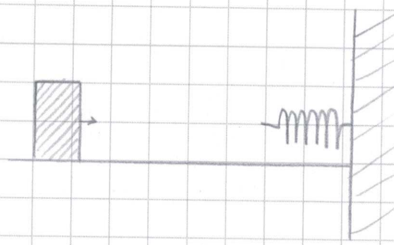
$$Em_f - Em_i = -F_{att.}\Delta x$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_{AB}^2 = -F_{att.}\Delta x$$

$$0 - \frac{1}{2}\cancel{m} v_{AB}^2 = -\mu_d \cancel{m} g \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{v_{AB}^2}{2\mu_d g} = 166\ m$$

4.)

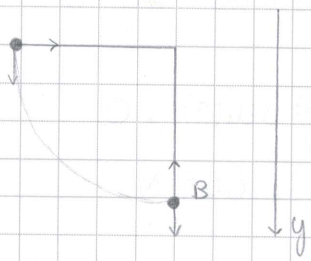


$m = 2kg$
$v = 15\ m/s$
$k = 100\ N/m$
max forza agente = ?

$$E_{mi} = E_{mf}$$
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$
$$\Delta x \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{m v^2}{k}} = y$$

$$F_{max} = -k \Delta x = -ky = -212\ N$$

5.)



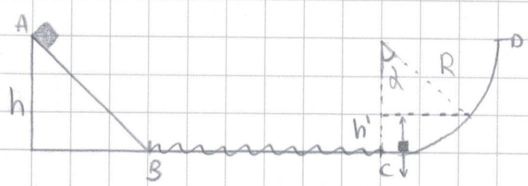
$m = 50\ kg$
$L = 30\ m$
$v_{max} = ?$
$T_B = ?$

a.) $E_{mi} = E_{mf}$
$$mgL \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m v_f^2$$
$$v_{max} = \sqrt{2gL} = 24,2\ m/s$$

b.) $\Sigma F = 0$ NO c'è accelerazione centripeta (sennò il corpo sarebbe fermo in B)

$$\Sigma F = -m a_{cp}$$
$$mg - T = -m a_{cp}$$
$$T \stackrel{!}{=} mg + m a_{cp}$$
$$\stackrel{!}{=} mg + m \frac{v^2}{L} = 1466\ N$$

6.)



$m = 18\ kg$
$v_A = 5\ m/s$
$R = 10\ m$
$\overline{BC} = 12\ m$
$\mu d = 0.1$

a.) $E_c(B) = E_{tot}(A) = U(A) + E_c(A)$
$$\stackrel{!}{=} mgR + \frac{1}{2} m v^2 = 1.107\ J$$

b.) $L_{att.} = ?$

$$L_{att.} = F_{att.} \cdot \Delta x = -\mu d\, mg \cdot \overline{BC} = -211,7\ J$$

c.) In C: $\Sigma F = m a_{cp}$ reazione di guida in C = ?, N = ?
$$-mg + N = m a_{cp}$$
$$N \stackrel{!}{=} m \frac{v_c^2}{R} + mg = m\left(\frac{v_c^2}{R} + g\right) = 18\left(\frac{10^2}{10} + 9,81\right) = 3,63N$$

la f vincolare $N \neq mg$
non lo annulla il peso
sennò non avrei $a \Rightarrow a_{cp}$

$v_c = ?$ $\quad E(C) = E(B) - \mathcal{L}_{att.} = 895\ N$

$$E(C) = \frac{1}{2} m v_c^2 = 895 N$$

$$v_c = \sqrt{\frac{2 \cdot 895}{m}} = 10\ m/s$$

d) $\alpha = ?$

$$E(C) = U(C)$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \cancel{m} g h'$$

$$h' = \frac{v^2}{2g} = 5{,}1 m$$

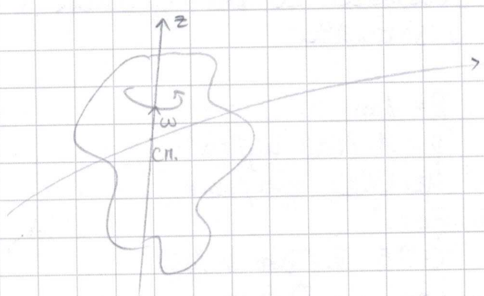
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{R - h'}{R}\right) = \cos^{-1}(0{,}49) = 60°$$

Comparazione traslazione/rotazione

$$\begin{cases} \vec{p} = m\vec{v} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = ma = \vec{F} \quad \text{se } \vec{F} = 0,\ \vec{p} \text{ costante} \end{cases}$$

e se $\vec{M} = 0$, $\vec{L}$ costante

Corpo rigido oltre a traslare (v. leggi tutte applicate a C.M.) può ruotare.

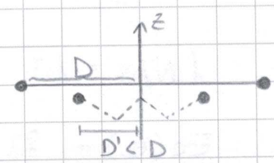


Traslazione	Rotazione
x	θ
$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
$F = ma$	$M = \frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}$
$(p = mv)$	$(L = I\omega)$

In traslazione m si oppone a ~~trasl~~ movimento
In rotazione è I (momento di inerzia) che si oppone
e $I \neq m$ perché non è una proprietà intrinseca al corpo, $I = mr^2$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$	$E_c = \frac{1}{2} I\omega^2$
$\Delta E_c = \mathcal{L}_F = \int_A^B \vec{F} d\vec{s}$	$\Delta E_c = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta$

(es.) ballerina $\quad \cancel{I} \quad L = I\omega = mr^2\omega$



chiudendo braccia r diminuisce ma L costante per cui ω deve compensare calo di I

$L = I'\omega'$ dove $I' < I$

$I\omega = I'\omega'$

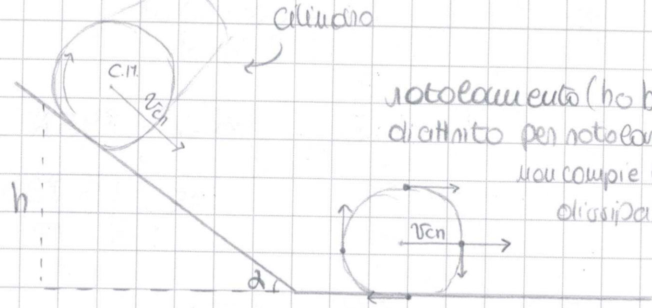
$\omega' = \frac{I}{I'}\omega$ $\quad$ ω' aumenta di coefficiente $\frac{I}{I'} > 1$

Il lavoro contro l'E_c per chiudere braccia fa aumentare E_c di ballerina chiusa.

Moto rotatorio ②

es.

rotolamento puro: velocità di punto d'appoggio relativa, rispetto a suolo è nullo.



rotolamento (ho bisogno di attrito per rotolare ma non compie lavoro dissipativo)

$v_{CM} = ?$

$E_{mi} = E_{mf}$

$mgh \overset{!}{=} E_c$ distribuita tra E_c di traslazione e rotazione

$mgh \overset{!}{=} \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

$\omega = \frac{v}{r}$ nel punto di tangenza tra corpo e suolo se $\omega \gtrless$ ho pattinamento o strascinamento

$I = \frac{m r^2}{2}$ momento d'inerzia di cilindro

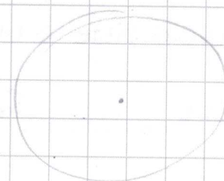
$mgh = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{v^2}{r^2}$

$\cancel{m} gh \overset{!}{=} \frac{3}{4} \cancel{m} v_{cm}^2$

$v_{cm} \overset{!}{=} \sqrt{\frac{4}{3} gh} < \sqrt{2hg}$ solita senza rotazione

es.

Volano: corpo che se messo in rotazione accumula E_c per il grande I che poi può restituirlo.



rotazione

$R = 1 m$

$\rho = 7.800 \ kg/m^3$

10.000 giri/min.

$E_c = ?$

0.25 €/~~km~~ kWh

Spessore $= 0.5 m$

$I = \frac{mR^2}{2} = \frac{(\rho V) R^2}{2} = \frac{\rho (R^2 \pi s) R^2}{2} = 6,1 \cdot 10^3 \ kg/m^2$

ω giri al secondo $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi \ 10.000}{60 s} = 1047 \ rad/s$

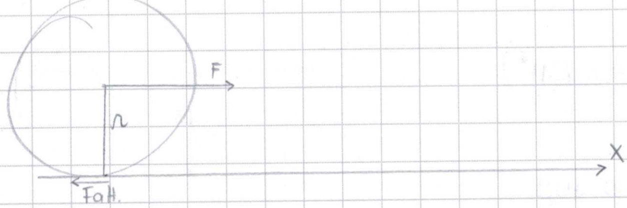
$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 \sim 3 \cdot 10^9 J = \frac{3 \cdot 10^9}{3.6 \cdot 10^6} = 833 \ kW/h$

$1 W/s = 1 J$, $1 kW/h = 3.6 \cdot 10^6 J$

$E_c(€) = 833 \cdot 0,25 = 208$ €

Diminuendo peso di ruote risparmio energia nel metterle in moto.

es.



se oggetto rotola Fatt. è esattamente quella necessaria per far iniziare il rotolamento. Rotolamento perfetto $\omega = \frac{v}{r}$

$\sum F_{ot}$ $\sum F = F - F_{att.} = m a_{cm}$

$$\frac{dL}{dt} = M = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{I}{r}\frac{dv}{dt} = \frac{I}{r} a$$

$$M = F_{att.} \cdot r = \frac{I}{r} a$$

$$F_{att.} = \frac{I}{r^2} a = \frac{m}{2} a$$

trovo Fatt. in caso di rotolamento del corpo e non traslazione $F_{att.} = -\mu N$

$$I = \frac{m r^2}{2} \text{ per cilindro}$$

$$\sum F = F - \frac{m}{2} a = m a$$

$$F = \frac{3}{2} m a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2F}{3m}$$

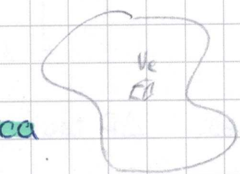
↑ mi resiste di più alla mia F

se rotola ~~ma~~ faccio più fatica xk $a = \frac{F}{m}$ senza rotolamento

Fluidodinamica "statica"

Interazioni repulsive, reagisce contro forze di compressione. Ha massa ma non forma def., è quella del contenitore che lo contiene. Fluido può essere gas o liquido.
Nel vuoto si espande, sotto gravità trova suo equilibrio nel contenitore.
Fluido interagisce con contenitore esercitando forze sulle sponde e sulle superfici del corpo che vi viene immerso.

Per descriverne la massa: prendo un volume elementare (V_e) di massa el. (m_e), allora la sua densità è $\rho = \frac{m_e}{V_e}$ densità volumica



$\rho(x,y,z)$ tipicamente per gas (che dipende dalla pressione) $> P > \rho$ e viceversa.

$$m_{tot} = \int \rho(x,y,z)\, dV$$

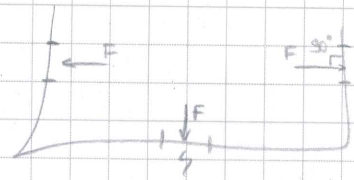
per un liquido ρ è costante perchè non comprimibile dunque $m = \rho V$

$$\begin{cases} \rho_{H_2O} = 1 g/dm^3 = 1000 kg/m^3 = 1 kg/l \\ \rho_{benzina} \sim 0{,}7 g/dm^3 \\ \rho_{aria} = 1 kg/m^3 \quad P_{atm} \text{ (essendo gas specifico a che P)} \end{cases}$$

1 kg/dm³
1000 g/dm³

Su ogni punto di superficie agisce una F

$P = \frac{F}{S}$ pressione (Pascal $Pa = N/m^2$)

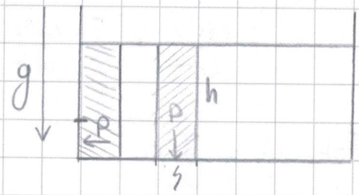


F è sempre in direzione normale alla ~~sp~~ sup.

F è quella della colonna d'acqua

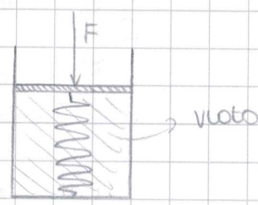
$F = mg = (\rho \cdot V)\, g = \rho \cdot (h \cdot S)\, g$

$P = \frac{F}{S} = \frac{\rho (h \cdot \cancel{S}) g}{\cancel{S}} = \rho g h$



e tale F (dunque tale P) è la stessa qualunque sia l'orientazione della superficie (anche verticale), P dipende solo da h, perché le particelle esercitano quella stessa P ovunque. Se superficie è estesa in verticale P non è uguale ovunque perché appunto dipende da h.

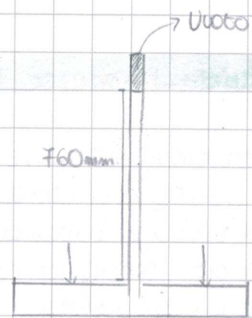
strumento: molla nel vuoto (sennò c'è F contraria)



$k \Delta x = P \cdot S$

$P \overset{!}{=} \frac{k \Delta x}{S}$

Torricelli: per Patm, mercurio scendeva fino ad $h = 760$ mm



$P = \rho g h = (13.579) \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}76 = 101.136$ Pa

l'acqua non scenderebbe perché servirebbe $h = 10$ m per riuscire ~~ce~~ a contrastare P atm.

1 Bar = 1 atm = 760 mm/Hg = 101.136 Pa = 1011.36 hPa

$\overset{!}{=}$ 1000 m Bar

es. ΔP tra capo e piedi? (mm/Hg)

$h = 1{,}70$ m

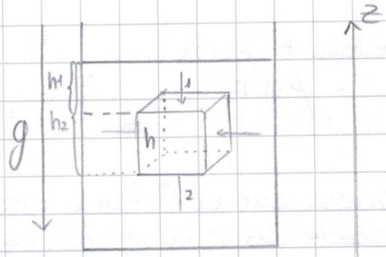
$\rho_{H_2O} = 1000$ e/m^3

$\Delta P = \rho g h = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}7 = 16.660$ Pa

101.136 Pa : 760 mm/Hg = 16.660 Pa : X

X = 125,2 mm/Hg.

$F_{tot} = ?$

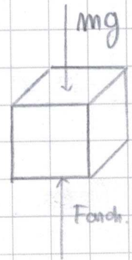


Le forze laterali sono uguali e contrarie per cui si annullano del tt.
F_{tot} è la somma solo delle F verticali.

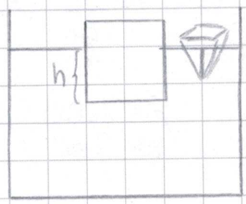
$$\vec{F}_{tot} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = -P_1 S \vec{u_z} + P_2 S \vec{u_z} =$$
$$\stackrel{!}{=} -\rho_{H_2O}\, g h_1 S + \rho_{H_2O}\, g\, h_2 S = \rho_{H_2O}\, g S (h_2 - h_1)\vec{u_z} = \rho_{H_2O}\, g S \underbrace{h}_{\text{lato del cubo}} \vec{u_z} = \rho_{H_2O}\, g V \vec{u_z} = mg \vec{u_z}$$

Spinta di Archimede: corpo immerso riceve spinta contraria uguale alla forza peso del fluido di volume pari a quello del corpo immerso

Se $F_{peso} > F_{Archi.}$ corpo affonda se $\rho_{corpo} > \rho_{H_2O}$
$\cancel{V} \rho \cancel{g} > \cancel{V} \rho_{H_2O} \cancel{g}$

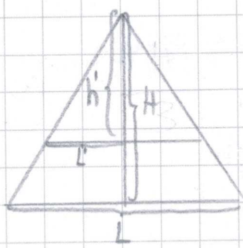


es.
$\ell = 50\ cm$ — posso tenere cm solo g perché le densità si semplificano e diventa solo rapporto. Quando lavoro con costanti devo riferirmi all'S.I.
$\rho_{legno} = 700\ g/dm^3$
$h = ?$



se ho piramide di $\rho < \rho_{H_2O}$ di quanto sprofonda?

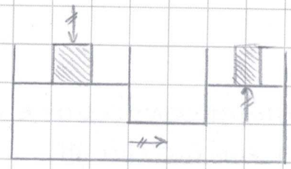
$F_{peso} = F_{Archi.}$
$mg \stackrel{!}{=} \rho_{H_2O}\, g\, V_{spostato}$
$\rho_L \cdot V_{cubo\ tot} = \rho_{H_2O}\, V_{spostato}$
$\rho_L \cdot \ell^3 = \rho_{H_2O} (\ell^2 \cdot h)$
$h \stackrel{!}{=} \frac{\rho_L}{\rho_{H_2O}} \cdot \ell = \frac{7\cancel{00}}{10\cancel{00}} \cdot 5\cancel{0} = 35\ cm$



$\frac{h'}{H} = \frac{L'}{L}$
$L' = \frac{h'}{H} L$

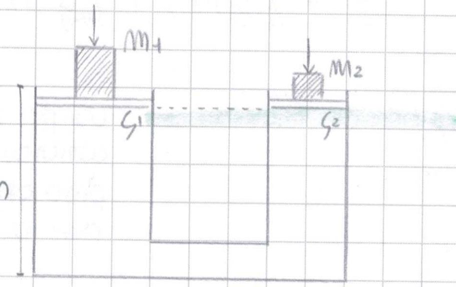
con piramide
$$\rho_P \frac{L^2 \cdot H}{\cancel{3}} \cancel{g} = \rho_{H_2O} \cancel{g} \left(\frac{\left(\frac{h'}{H} L\right)^2 \cdot h'}{\cancel{3}} \right)$$
$$\frac{\rho_P}{\rho_{H_2O}} L^2 \cdot H \stackrel{!}{=} \left(\frac{h'}{H} L\right)^2 \cdot h'$$
$$\frac{\rho_P}{\rho_{H_2O}} \cancel{L^2} \cdot H \stackrel{!}{=} \frac{h'^2}{H^2} \cdot \cancel{L^2} \cdot h'$$
$$h'^3 \stackrel{!}{=} H^3 \frac{\rho_P}{\rho_{H_2O}}$$
$$h' \stackrel{!}{=} \sqrt[3]{H^3 \frac{\rho_P}{\rho_{H_2O}}} = H \sqrt[3]{\frac{\rho_P}{\rho_{H_2O}}}$$

Il peso apparente di qualcosa immerso in acqua è pari al peso del corpo - spinta di Archimede (sembra che pesa meno). Ciò vale anche per i gas (peso reale nostro dovrebbe essere diminuito della spinta dell'aria).



$$P = P_{esterna} + \rho g h \overset{!}{=} \frac{F}{S} + \rho g h$$

La propagazione di P non è istantanea ma dipende da v di propagazione di suono in quel liquido. Posso usare principio per trasportare. Forze in relazione a tipo di problema idraulico.



es. Se sistema è in equilibrio e $h=0$ (profondità nulla)

$$P_1 = P_{est} = \frac{m_1 g}{S_1} \quad e \quad P_2 = \frac{m_2 g}{S_2}$$

allora $P_1 = P_2$ per il principio di Pascal (sistema in equilibrio e P_{st} è lo stesso)

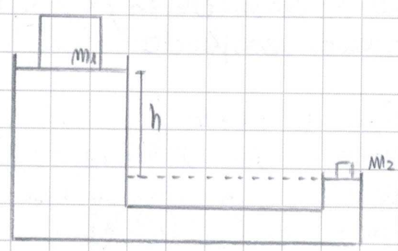
$$\frac{m_1 \cancel{g}}{S_1} \overset{!}{=} \frac{m_2 \cancel{g}}{S_2}$$

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

in generale $F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$ è da ciò posso costruire pompa idraulica

es.

$m_2 = ?$ $\rho = 1000\ g/dm^3$
$m_1 = 500\ kg$ $h = 2m$
$R_1 = 20\ cm$
$R_2 = 2\ cm$



equilibrio $P_1 \cdot S_1 = m_1 g$

$$P_2 = P_1 + \rho g h$$

$$\frac{m_2 \cancel{g}}{S_2} \overset{!}{=} \frac{m_1 \cancel{g}}{S_1} + \rho \cancel{g} h$$

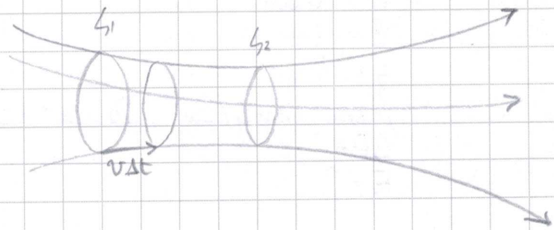
perché è in equilibrio e controbilancia $F_{p,2}$.

$$m_2 \overset{!}{=} m_1 \frac{S_2}{S_1} + \rho h S_2 \overset{!}{=} m_1 \frac{R_2^2 \cancel{\pi}}{R_1^2 \cancel{\pi}} + \rho h R_2^2 \pi = 7,5\ kg$$

f. amplificata da rapporto tra sup. (martinetto idraulico) una piccola $m_{(2)}$ solleva una m più grande tramite sistema di vasi comunicanti. Il prezzo da pagare: spostando m di 1 cm a dx mi sposto di $1/\frac{S_2}{S_1}$ a sn, il lavoro è lo stesso ma si fa meno fatica.

Fluidodinamica "dinamica"

Il principio di continuità dice che massa entra = massa esce, ciò dà vincoli su velocità di fluido



$$M_{entrante} = \rho \cdot V = \rho \cdot (S_1 \cdot \Delta x_1) = \rho \cdot (S_1 v_1 \cdot \Delta t)$$

$$M_{ent.} = M_{uscente}$$

$$\rho S_1 v_1 \cancel{\Delta t} = \rho S_2 v_2 \cancel{\Delta t} \quad \text{perchè } \rho \text{ sono costanti}$$

$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2}$$ eq. di continuità (se condotto si restringe v aumenta per compensare strozzatura, e viceversa).

Energia nei fluidi: $dL = \vec{F} \cdot \vec{ds} = F \cdot ds = \frac{F}{S} \cdot S\,ds = P \cdot (S\,ds) = \boxed{P \cdot dV}$ ma $d = 0$ perchè ortogonali $F \perp$ alla S allora...

se non ho forze dissipative posso costruire potenziale, allora $\boxed{U = P \cdot V}$ (J)

Se ho fluido che si muove senza f. dissipative (no attriti, solo urti elastici delle particelle) allora E_m si conserva.

$$E_m = E_c + U = \frac{1}{2} m v^2 + P \cdot V = \frac{1}{2}(\rho \cdot V) v^2 + P \cdot V = \frac{1}{2}(\rho (S \cdot v \cdot \Delta t)) v^2 + P (S \cdot v \cdot \Delta t)$$

m massa di porzione di fluido che ha stessa v (v. v_{cm} di porzione).

$$E_{m1} = E_{m2}$$

$$\cancel{S_1 v_1 \Delta t}\left(\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1\right) = \cancel{S_2 v_2 \Delta t}\left(\frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2\right)$$

ma $S_1 v_1 = S_2 v_2 = S v$ costante (allora semplifico)

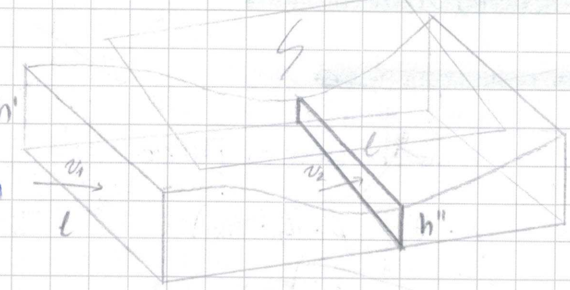
allora... $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2$ eq. di Bernoulli

dunque se v_1 aumenta P_1 deve diminuire (effetto Venturi)

Ciò in regime laminare, senza perdita di energia

es.

$v_1 = 50\, m/s$
$h' = 20\, cm$
$h'' = 4\, cm$
$l = 1m$
$S = 2\, m^2$
$\rho_{aria} = 1kg/cm^3$. $P_1\, atm = 1 atm$
$\Delta P = ?$
$F_S = ?$



$v_1 S_1 = v_2 S_2$
$v_1 (h' l) = v_2 (h'' l)$
$v_2 = v_1 \dfrac{h'}{h''}$

il fluido non dovrebbe uscire lateralmente
→ metto minigonne
(aumentano attrito su= ea aumentare massa)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 \qquad \text{eq. Bernoulli}$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

ma $v_1 S_1 = v_2 S_2$ eq. di continuità
$v_2 = v_1 \dfrac{S_1}{S_2}$

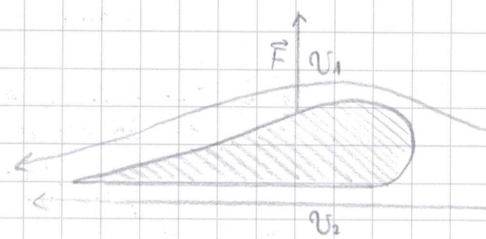
$$= \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 \frac{S_1^2}{S_2^2} - v_1^2\right) = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 50^2\left(\frac{(0{,}2\cdot 1)^2}{(0{,}04\cdot 1)^2} - 1\right) =$$
$$= 30.000\ Pa = 30\ kPa$$

$$F_S = P \cdot S = \Delta P \cdot S = 30.000 \cdot 2 = 60.000\ N$$

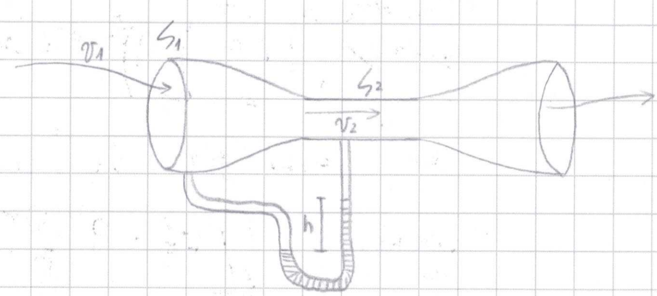
es. $v_1 > v_2$ perché deve fare cammino più lungo una data particella

ma per eq. di continuità $P_1 < P_2$

$F(\text{portanza}) = \Delta P \cdot S$



es. venturimetro: sfrutta effetto Venturi per misurare v del vento.



$$\Delta P = \rho_{H_2O}\, h g$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2\frac{S_1^2}{S_2^2} - v_1^2\right) = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - v_1^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}}$$

l'acqua sale di h perché lì al centro $v_2 > v_1$ dunque per eq. di continuità $P_2 < P_1$ e acqua viene risucchiata

Termodinamica

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ protoni in un grammo di massa

Per poter operare con fluido devo confinarlo in un V (volume), in esso eserciterà una certa P (pressione), mentre l'energia che si scambiano è definibile da T (temperatura). T è misura di $E_{c,m}$ delle particelle (che fanno urti completamente elastici di particelle di massa trascurabile). Coi parametri V, P e T posso ~~co~~ ora descrivere fluido. T varia in funzione di moto traslatorio o oscillatori di particelle.

In gas perfetto $\quad P \cdot V = \alpha T \overset{!}{=} nRT \qquad [J] = \underbrace{\frac{[N]}{[m^2]}}_{P} \cdot \underbrace{\frac{[m^3]}{}}_{V} = \underbrace{\frac{[N][m]}{}}_{E=T}$

R (costante dei gas) che cambia se $V(\ell)$ o $V(m^3)$ e $P(Pa)$ o $P(atm)$

Il limite inferiore per T che misura il movimento di particelle, è limite che determina l'immobilità, ovvero a $T = 0\,K = -273\,°C$ allora P nulla

Misurare T è misurare la variazione delle proprietà del sistema

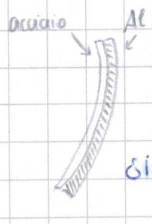
Principio zero della termodinamica: due corpi in contatto fra di loro raggiungono l'equilibrio termico. (contatto adiabatico non c'è vero contatto, c. diatermico invece scambia calore).
Se A è in equilibrio con B e B c C, allora A con C.
Q il più ~~se~~ caldo, scalda il più freddo. (perché statisticamente è rilevante ciò).

dilatazione termica (corpo lineare all'aumentare di T aumenta ℓ)

$\Delta\ell = \ell \cdot c \cdot \Delta T$

c coefficiente di dilatazione termica lineare

$c_{alluminio} = 51 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$
$c_{calcestruzzo} = 12 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$
$c_{acciaio} = 11 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$



T 20°C → 200°C

si curva

es. $\Delta T = 50\ °C$
$\ell = 25\,m$ (ponte)

$\Delta\ell = \Delta t \cdot \ell \cdot c_{calce.} = 50 \cdot 25 \cdot 12 \cdot 10^{-6} = 0{,}015\ m$

energia di tipo termico: calore, non è proprietà intrinseca di corpo ma viene scambiato da corpo caldo a freddo o ~~freddo~~ compiendo un lavoro (f. dissipativo → f. attrito).

calore: Q $\qquad$ unità di misura: caloria (quantità di Q da fornire ad 1g di H_2O per far aumentare sua T da 14,5°C a 15,5°C, $\Delta T = 1°C = 1K$)
Joule (perché è scambio di E)

$1\ cal = 4{,}186\ J$

Aumento di T dipende anche dal tipo di sostanza.

Capacità termica, C
riferita a corpo, è la quantità di E fornita a corpo in riferimento alla variazione di T che osservo. Riferita ~~per~~ a corpo disomogeneo, la massa è implicita in corpo.

$Q = C \Delta T \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta T}$ $[J/k°]$

Calore specifico, c (di una sostanza)

$Q = c m \Delta T$
↘ ottenuto fornendo tot Q a corpo

$c = \frac{Q}{m \Delta T}$ $\left[\frac{J}{kg \cdot k}\right] = \left[\frac{cal}{g°C}\right]$

$c_{ghiaccio} = 2220$ J/kg k° = 0.530 cal/g C°
$c_{H_2O} = 4.190$ J/kg k° (fattore mille più grande di J=cal) = 1 cal/g°C
$c_{vetro} = 840$ J/kg°k = 0,2 cal/g°C
$c_{alcool} = 2430$ J/kg°k = 0,58 cal/g°C
$c_{Al} = 900$ J/kg°k = 0,215 cal/g°C

acqua ha calore specifico diverso a seconda di suo stato (=> c è di una sostanza in un det. stato). Dunque eq. $c = Q/m\Delta T$ va bene finché non si cambia di stato. ~~Ø~~ Nei cambiamenti di fase ~~ΔT~~ T costante fornendo comunque calore finché transizione di fase non è completa. Q (E) fornita durante transizione di fase non la ritrovo in calore ma è E necessaria a rompere i legami per passare da stato all'altro.
Il calore fornito per passare da fase all'altra è il calore latente, (L)
Ho 3 fasi (solido, liquido, gas) e 2 transizioni di fase (liquefazione e evaporazione, sublimazione è somma delle due).
Da ~~liq~~ solido a liquido e da liquido a gas, fornisco E, al contrario E viene restituita.

$Q = L \cdot m$ L_e c.l. di evaporazione
L_l c.l. di liquefazione/fusione

non dà Δ di T

Processo che controlla T corporea (sudorazione brucia E e il vapore emesso abbassa T ~~→ liquefazione~~ → evaporazione, Riguardo fenomeni atmosferici (vapore condensa in gocce, T aumenta, salgono) → liquefazione (T portata da ogni goccia). Evaporazione (T portata via).

	$T_{fus.}$	L_F	$T_{ev.}$	L_V
H_2O	273 K	333 kJ/kg	373 K	2256 kJ/kg
Pb	601 K	232 kJ/kg	2017 K	858 kJ/kg
Cu	1356 K	207 kJ/kg	2868 K	4730 kJ/kg

es. $m_{ghiaccio} = 720\ g$
$T = -10\ °C$
in H_2O a $T = 15\ °C$
$Q = ?$

(uso K o °C indifferentemente perché prendo ΔT)

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 15.980 + 239.800 + 45.250 = 301.030\ J = 301\ kJ$$

$$Q_1 = c_{ghiaccio} \cdot m \cdot \Delta T = 2220 \cdot 0{,}72 \cdot 10 = 15.980\ J$$
(porto ghiaccio a T di fusione = 0°C)

$$Q_2 = L_f \cdot m = 333 \cdot 10^3\ (J) \cdot 0{,}72 = 239.800\ J$$
(ghiaccio fonde → ho acqua a 0°C)

$$Q_3 = c_{H_2O} \cdot m \cdot \Delta T = 4.190 \cdot 0{,}72 \cdot 15 = 45.250\ J$$
(porto H_2O a $T = 15°C$)

es. 1 kg di H_2O $T = 20\ °C$
lo porto a $T = 100\ °C$
e faccio evaporare 150 g
$Q = ?$

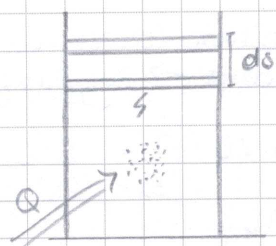
$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = 335{,}2 + 338{,}4 = 673{,}6\ kJ$$

$$Q_1 = c_{H_2O} \cdot m \cdot \Delta T = 4190 \cdot 1\ (kg) \cdot 80 = 335{,}2\ kJ$$
$$Q_2 = L_{ev} \cdot m_{evaporata} = 2256 \cdot 10^3 \cdot 0{,}15 = 338{,}4\ kJ$$

Cedendo E al gas, esso non va tutto in E di movimento di molecole, ma può anche andare all'esterno. Lavoro di un gas:

$$d\vec{L} = \vec{F} \cdot d\vec{s} \overset{!}{=} F \frac{S}{S} ds \overset{!}{=} p \cdot (S\, ds) \overset{!}{=} p \cdot dV$$

ortogonali sempre ($F \perp S$)



Gas assorbe E e compie lavoro

$$L_{tot} = \int_{V_{in}}^{V_f} P dV$$

Primo principio di termodinamica: più generale forma di conservazione di E.
Se $E_{tot} = E_{interna} + E_M$, E si conserva

Ec e U di corpo si manifesta in Q assorbito dall'esterno diminuito di L fatto

$$\Delta E_{int.} = Q - L$$
↓
Ec + U

- **Trasformazione a V costante** (isocora)
Per solidi, liquidi e gas (a volume costante): V costante ⇒ $dV = 0$ ⇒ $L = 0$

$Q = \Delta E_{int.}$ energia ceduta è tutta in E all'interno di gas (Ec di particelle) (V non si espande).

- Trasformazioni a P costante (isobara)
  se P = costante e V cambia

  $\mathcal{L} = p(V_f - V_i)$ allora $Q = \Delta E_{int.} + \mathcal{L}$

- Trasformazioni adiabatica (non scambia Q con l'esterno) (isoterma)

  $Q = 0$ allora $-\mathcal{L} = \Delta E_{in}$

  $\mathcal{L}$ rubo $E_{int.}$ e non Q

- Trasformazione ciclica

  $\Delta E_{int.} = 0$ allora $Q = \mathcal{L}$

  parto da stato (P, V, T) e ritorno allo stesso

Temperatura di equilibrio (sarà la media pesata di T)

tanto che $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = 0$ (alcuni corpi ricevono E, altri la danno (+) e nel tot si conserva)

$$C_1(T_f - T_1) + C_2(T_f - T_2) + \ldots + C_n(T_f - T_n) = 0$$
$$(C_1 + C_2 + \ldots + C_n)T_f = C_1T_1 + C_2T_2 + \ldots + C_nT_n$$
$$T_f = \frac{C_1T_1 + C_2T_2 + \ldots + C_nT_n}{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}$$

(media pesata di T pesata con capacità termica)

non sono comprese transizioni di fase

Cedo calore facendo lavoro con f. non conservative (v. attrito) o più semplicemente mettendo in contatto corpi → raggiungeranno T di equilibrio.

es) pentola di Al: $T_i = 15\,°C$
$m = 500\,g$

H_2O: $750\,g$
$T_i = 10\,°C$

vetro: $300\,g$
$T_i = 300\,°C$

$T_{eq.} = ?$

$Q_p = c_{Al} \cdot m \cdot \Delta T$

$$c_{Al} \cdot m_p \cdot (T_f - T_i) + c_{H_2O}\, m_{H_2O}(T_f - T_i) + c_v\, m_v (T_f - T_i) = 0$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{c_{Al}\, m_p\, T_{i_p} + c_{H_2O}\, m_{H_2O}\, T_{i_{H_2O}} + c_v\, m_v\, T_{i_v}}{c_{Al} \cdot m_p + c_{H_2O}\, m_{H_2O} + c_v\, m_v}$$

$$= \frac{900 \cdot 0{,}5 \cdot 15 + 4190 \cdot 0{,}75 \cdot 10 + 840 \cdot 0{,}3 \cdot 300}{900 \cdot 0{,}5 + 4190 \cdot 0{,}75 + 840 \cdot 0{,}3} = 29{,}27\ °C$$

es

200 g = vetro
H_2O = 330 g
T_{H_2O} = 28°C
T_{am} = 28°C
2 cubetti ghiaccio = 80g
T_{cub} = −8°C
T_f = ?
C_v = 840 J/kg k
C_{H_2O} = 4190 J/kg·k
$C_{ghia.}$ = 2220 J/kg·k
$L_{fu.}$ = $333 \cdot 10^3$

$$C_{sistema} = \underbrace{C_{H_2O} \cdot m_{H_2O}}_{C_{H_2O}} + \underbrace{(C_{vet} + m_{vet})}_{C_{vet}}$$

$$\Delta T = \frac{Q}{C_{sist.}} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_{sist}} = \frac{(C_{ghiac} \cdot m_{ghia} \cdot \Delta T) + (L_{fu} \cdot m_{gh}}{C_{sist}}$$

$$T = T_{amb} - \Delta T = 9{,}9°C$$

1) ghiaccio alla T di fusione

$$C_{bicchiere} = C_{H_2O} \cdot m_{H_2O} + C_v \cdot m_v = 4190 \cdot 0{,}33 + 840 \cdot 0{,}2 = 1550{,}7 \ J/K$$

$$Q = c_{ghiac} \cdot m_{ghiac} \Delta T = 2220 \cdot 0{,}08 \cdot (0-8) = 1420{,}8 \ J$$

$$\Delta T_1 = \frac{Q}{C_{bich.}} = \frac{1420{,}8}{1550{,}7} = 0{,}92°C$$

abbassamento T di sistema bicchiere - acqua dovuto a E fornita al ghiaccio per arrivare a 0°

$$T_1 = T_{am} - \Delta T_1 = 28 - 0{,}92 = 27{,}08°C$$

2) fusione del ghiaccio

$$Q = L_{fu.} \cdot m_{cub} = 333 \cdot 10^3 \cdot 0{,}08 = 26.640 \ J$$

$$\Delta T_2 = \frac{Q}{C_{bic}} = \frac{26.640}{1550{,}7} = 17{,}18°C$$

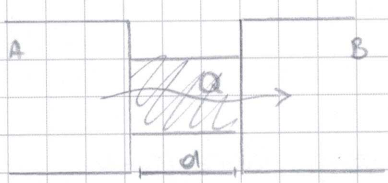
$$T_2 = T_1 - \Delta T_2 = 27{,}08 - 17{,}18 = 9{,}9°C$$

3) riscaldamento H_2O di fusione

$$T_3 = \frac{T_2 \cdot C_{bich.} + T_{fu.} \cdot 0{,}08}{C_{bich.} + 4190 \cdot 0{,}08} = \frac{9{,}9 \cdot 1550{,}7 + (0 \cdot 0{,}08)}{1550{,}7 + 4190 \cdot 0{,}08} = 8.15 \ °C$$

Convezione: spostamento macroscopico di calore
Irraggiamento: energia persa tramite onde elettromagnetiche
Conduzione: passaggio di calore attraverso corpo (spostamento microscopico).

Conduzione termica



$T_A > T_B$

$$\text{Potenza} = \frac{Q}{t} = \frac{k \cdot S \cdot \Delta T}{d} = \frac{S \Delta T}{R}$$

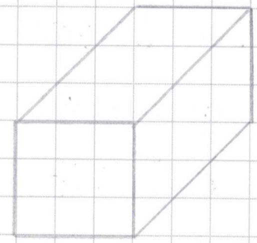
S = superficie
k = conducibilità termica [W/m·k]

ponendo $R = \frac{d}{k}$ resistenza termica

R cambia nel caso di tanti materiali (k) $R_{tot} = R_m + R_1 + R_2 + \dots$

$k_{Al} = 210$
aria = 0,026
argento = 420
vetro = 0,5 - 1
legno = 0,1 - 0,3
mattone = 1,4 - 2,4
marmo = 2-3

es. container: 2,5 x 2,5 x 14
$S = 152,5\ m^2$
$\Delta T = 20°C$
d = 1cm di vetro

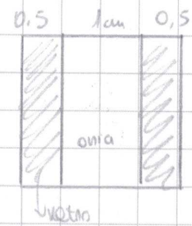


$$P = \frac{k \cdot S \cdot \Delta T}{d} = \frac{1 \cdot 152,5 \cdot 20}{10^{-2}} = 305\ kW$$

$$\cancel{k = \frac{1\ \text{vetro}}{1\ cm} = 1}$$

Col vetro camera (aria in mezzo) $P = 7,9\ kW$ (vetro è trascurabile come apporto)
Ma l'aria deve essere ferma → schiuma

es. $$R_{tot} = R_v + R_{aria} = \frac{d_v}{k_v} + \frac{d_{aria}}{k_{aria}} = 0,39$$
$$= \frac{10^{-2}}{1} + \frac{10^{-2}}{0,026}$$

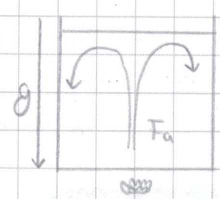


$$P = \frac{S \Delta T}{R_{tot}}$$

Convezione

Trasporto di calore macroscopico attraverso fluidi. Può essere naturale o forzato

F_a = f. di Archimede



$\rho = \rho(T)$

$Q = \alpha\ S \cdot \Delta T$

Irraggiamento

Ogni corpo a certa T ed è formato da particelle con carica elettrica. Queste fanno vibrazioni e irraggiano energia sotto forma di onde la cui frequenza è legata all'energia. Potenza emessa da ogni corpo non allo 0 assoluto.

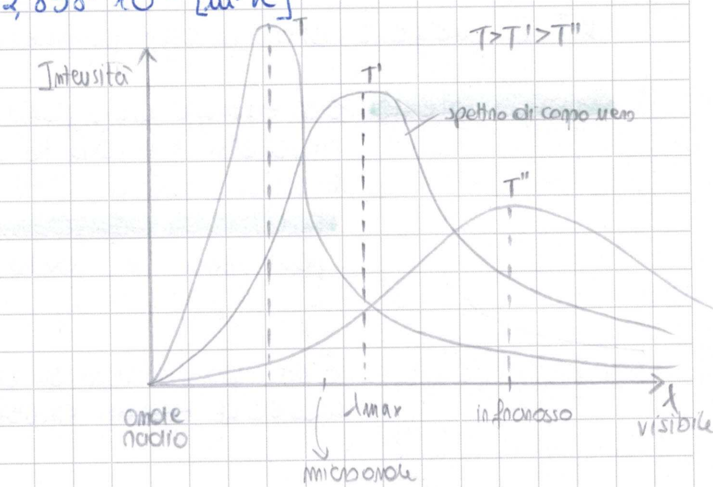
$P_{irraggiata} = \sigma \varepsilon A T^4$

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ [W/m^2 K^4]$
$0 < \varepsilon < 1$ emissività
A = superficie

ε def. quanto corpo sia corpo nero (riflettente o assorbente)
se $\varepsilon = 1$ corpo nero perfetto

Equilibrio termico può essere raggiunto anche a distanza. Noi irraggiamo onde e l'ambiente me lo restituisce, se ~~equilib~~ c'è isolamento possiamo raggiungere equilibrio che dipende da T. Se onde/energia emessa = irraggiata si ha corpo nero perfetto (sua capacità di assorbire ~~H~~ perfettamente è legato anche alla capacità di emetterne).

Legge di Wien: $T \cdot \lambda$ = costante $2{,}898 \cdot 10^{-3}$ [m·K]



Colore: analisi della frequenza della luce che viene ai nostri occhi. Il corpo nero fa spettro di corpo nero, variando T prodotto è costante → λ deve diminuire

(λ_{max} è la lunghezza d'onda più probabile)
Intensità = n° di fotoni in particolare λ.
probabilità di osservare un fotone in una particolare λ

~~All'aumentare di T,~~

All'aumentare di T, λ diminuisce.

$$\Rightarrow \quad T = \frac{\text{costante}}{\lambda}$$ (dal colore che vedo ricavo T)

es. $T = 307\ K$

$\lambda_{max} = 940\ nm$ emettiamo luce nell'infrarosso

Se corpo nero irradia solo ($\varepsilon = 1$) quanta E deve spendere per continuare ad emettere data potenza? Potenza non sostenibile vicini ~~co~~ allo 0 assoluto

$$P = \sigma \varepsilon A T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot 1{,}2 \cdot 307^4 = 604\ W$$ (ci si raffredda)

v. coperte riflettenti, evitano che onde si allontanino e non tornino più (parte riflettente x dentro).

es. Uomo in stanza a T = 20° C,
$$P = P_{irraggiata} - P_{che\ ritorna\ da\ me} = \sigma A T^4_{propria} - \sigma A T^4_{ambiente} = \sigma A (T^4_p - T^4_a) = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}2\,(307^4 - 298^4) = 67\ W$$

comunque ci raffreddiamo lo stesso per cui ci vestiamo.

Se non ci sono nuvole, irraggiamento del suolo è velocissimo anche una nuvola manderebbe indietro una certa potenza ~~senza~~ diminuendo raffreddamento veloce (v. deserto). Per evitare che irraggiamento avvenga non si può fare, ma si può mettere tanti specchi attorno così radiazioni tornano tutte.

v. termos evita tutte passaggi di calore. Ha spessore di vuoto → evita convezione e le pareti riflettenti dentro evitano irraggiamento.

Energia interna

$PV = nRT = NkT$

n = n.° di moli
$R = 8,31$ [J/mol k]

$n \cdot N_A = N$

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ (n.° protoni di un g di materia = n.° di atomi di una mole)

k = costante di Boltzmann $= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/k

$k \cdot T$ è energia cinetica di ogni particella moltiplicata per N particelle

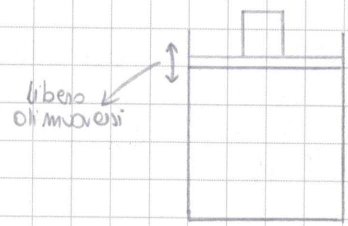
Energia interna: do energia a una particella e aumento suo grado di libertà di muoversi (in 3D ho 3 gradi per gas monoatomico) se biatomico trasla e ruota, 3+2. E_c ripartita tra gradi di libertà.
Principio di equipartizione: sostanza a T certa T, ogni sua particella mi conta $E_{interna} = \frac{1}{2} kT \times \underbrace{}_{\text{gradi di libertà}}$ (eq. di ripartizione)

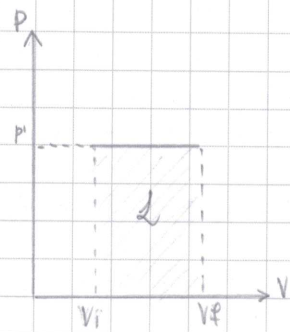
$E_{int.}$ possibilità di accomodare E_c in diversi gradi di partimento di ~~atomi~~ diversi atomi di cui è formato.

es. trasformazione isobara (P costante)

$\Delta E_i = Q - \mathcal{L}$

$\mathcal{L} = P \cdot \Delta V = P(V_f - V_i)$



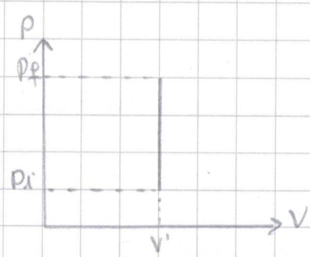


es. trasformazione isocora/isovolumica (V costante) -> saldo tappo

V costante $\Rightarrow \mathcal{L} = 0$

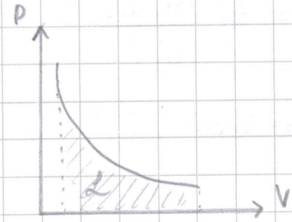
$\Delta E_i = Q$

ΔP variazione calore -> aumento E_c particelle



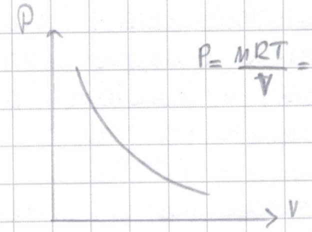
es. trasformazione adiabatica $(Q = 0)$ metto isolante ~~nel bosco~~
non scambio calore (non è intrinseco a corpo)

$$\Delta E_i = -\mathcal{L}$$



Espansione adiabatica $\mathcal{L}$ pos. $\rightarrow$ raffreddo gas
Compressione adiabatica $\mathcal{L}$ neg $\rightarrow$ scaldo gas

es. trasformazione isoterma (T costante)
(metto su sorgente che assorbe E e dà E).



$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{\text{costante}}{V}$$

T costante $\Rightarrow \Delta E_i = 0$

$$\mathcal{L} = Q$$

$$\mathcal{L} = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\,dV = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

es. $T = 400\,K$
$V = 12 \rightarrow 30\,L$ (dopo tanto nel rapporto L/L si semplifica)
$\mathcal{L} = ?$

$$\mathcal{L} = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = 1 \cdot 8{,}31 \cdot 400 \ln\left(\frac{30}{12}\right) = 3046$$

es. $m = 20\,kg$
$S = 100\,cm^2$
$T_1 = 270\,K$
$V_1 = 1\,L$
$T_2 = 350\,K$
$\mathcal{L} = ?$

trasformazione isobara

$$\mathcal{L} = P\Delta V = P(V_f - V_i) = \left(P_{atm} + \frac{mg}{S}\right)(1{,}28 - 1) = 33{,}77\,J$$

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT_1} = \frac{(P_{atm} + mg/S)\,10^{-3}}{8{,}31 \cdot 270} = \frac{(101 \cdot 10^3 + 2098/100 \cdot 10^{-4})\,10^{-3}}{8{,}31 \cdot 270} =$$

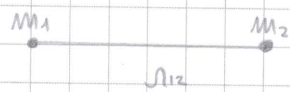
$= 0{,}053$ mol

$$V_f = \frac{nRT_f}{P} = \frac{nRT_f}{P_{atm} + \frac{mg}{S}} = 1{,}28 \cdot \cancel{\ldots}\ L$$

Pa $\rightarrow m^2$, m^3 (V)

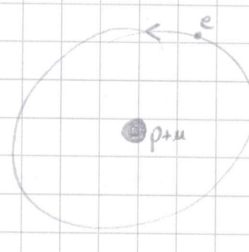
Elettromagnetismo

$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$ f. gravitazionale



$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$

Materia ha atomi formati da nucleo (protoni + neutroni formati da quark, particelle fondamentali, gli elettroni invece sono indivisibili/democritei considerabili dunque puntiformi/fondamentali come i quark) + nuvola di probabilità in cui trovare elettroni.



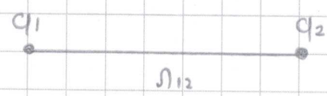
$d_{atomo} = 10^{-11}$ m
$d_{nucleo} = 10^{-15}$ m

Elettrone non gira ma si trova in onde intorno a nucleo sempre onde chiuse (principio di ~~ø~~ De Broglie), elettrone non ruota attorno piuttosto viene descritta una regione dalla f d'onda dove è più probabile trovare l'elettrone (→ orbitali).

	massa	carica fondamentale
p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	q_e
e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg	$-q_e$
n	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	0

→ non è intrinsecamente neg. voglio si di ffr. ereuciale tra protoni e elettroni

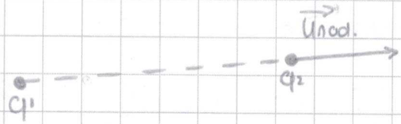
Legge di Coulomb: $F = \frac{k\, q_1 q_2}{r_{12}^2}$



ma $\neq F_G$, perché può essere attrattiva o repulsiva a seconda di cariche, e poi è più potente.

$\vec{F} = \frac{k\, q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{rad.}$ agisce in direzione radiale ø lungo congiungente delle due q

repulsivo: stesso segno
attrattivo: segno opposto



[C] = coulomb

$q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C
$k = 8{,}98 \cdot 10^{9}$ N m²/C²

es. 2 mol di protoni a 1 m

$F' = \frac{k\, q^2}{d} = \frac{k\,(q_e \cdot N_A)^2}{d} = \left(\frac{k\,(1g/m_p)^2}{d}\right) = \frac{8{,}98 \cdot 10^{9}\,(1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23})^2}{1} = 8{,}28 \cdot 10^{15}$ N

es.

$P_{everest} = V \cdot d = \frac{h \cdot \ell^2}{3} \cdot d_{granito} = \frac{9\,km \cdot 9^2}{3} \cdot 2400\,kg/m^3 = P \cdot m = 6{,}44 \cdot 10^{15}$ N

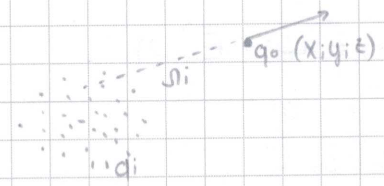
$F' = 13.000 \cdot P_{everest}$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $\qquad \varepsilon_0 = 8,25 \cdot 10^{-12}$

$$\vec{F_c} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$$

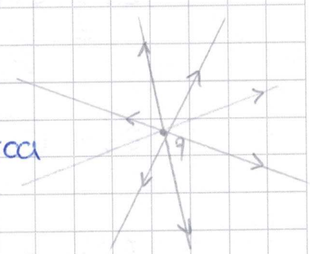
Con più cariche per principio di sovrapposizione esse si sommano vettorialmente.

$$\vec{F_c} = \frac{\sum}{4\pi\varepsilon_0} k \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \vec{u_{ri}}$$



Campo elettrico: grandezza def. in ogni punto dello spazio

$$\vec{E}(x;y;z) = \frac{\vec{F_c}}{q_0}$$

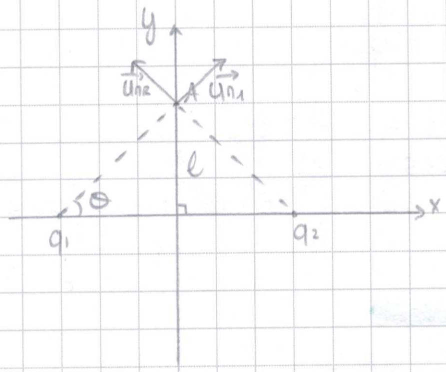


campo: f. def. in ogni punto dello spazio in direzione radiale dalla carica

campo elettrico di una distribuzione di carica:

$$\vec{E} = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_{ri}} \qquad \text{per una carica} \Rightarrow \qquad E = k \frac{q}{r^2} \vec{u_r}$$

man mano che ci si allontana dal centro $\not{E}$ diminuisce col quadrato di distanza (pos. → E uscente, neg. → E entrante), E ∞ sulla carica stessa



es. E in A?

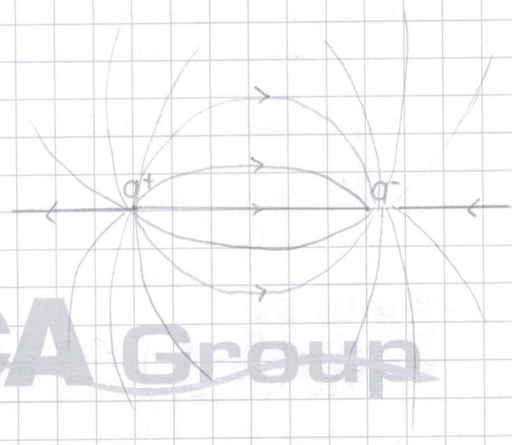
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \vec{u_{r1}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} \vec{u_{r2}}$$

$$r_1 = r_2 = l\sqrt{2}$$

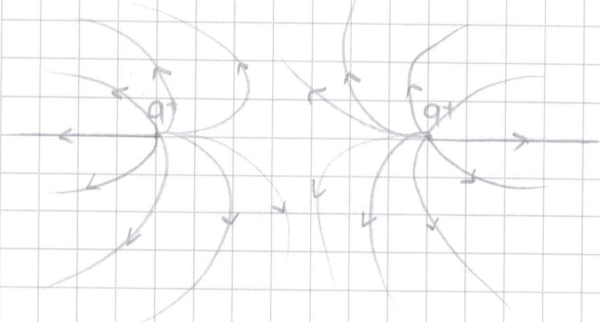
$$\vec{u_{r1}} = \cos(\theta)\vec{u_x} + \sin(\theta)\vec{u_y}$$
$$\vec{u_{r2}} = -\cos(\theta)\vec{u_x} + \sin(\theta)\vec{u_y}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 (l\sqrt{2})^2} \left(\left(q_1 \left(\frac{\vec{u_x}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{u_y}}{\sqrt{2}} \right) \right) + \left(q_2 \left(-\frac{\vec{u_x}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{u_y}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right)$$

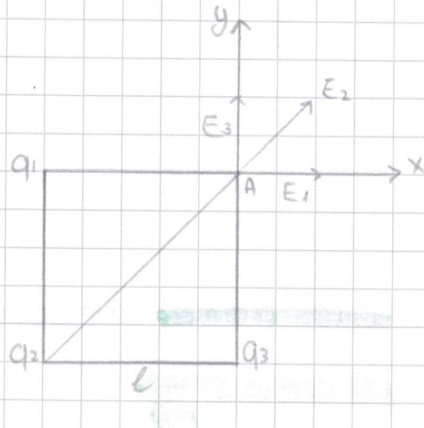
Linee di campo con due cariche opposte (dipolo)



cariche uguali



es. $$\vec{E}(A) = \vec{E_1}(A) + \vec{E_2}(A) + \vec{E_3}(A)$$



$$\vec{E_1} = \vec{E_{1x}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\ell^2}$$

$$\vec{E_2} = \vec{E_{2x}} + \vec{E_{2y}} = \vec{E_2}\cos(45°) + \vec{E_2}\,\mathrm{sen}(45°) \overset{!}{=} \frac{E_2}{\sqrt{2}} + \frac{E_2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{(\ell\sqrt{2})^2}$$

$$\vec{E_3} = \vec{E_{3y}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_3}{\ell^2}$$

$$\vec{E_{tot}}_x = \vec{E_{1x}} + \vec{E_{2x}}$$
$$\vec{E_{tot}}_y = \vec{E_{2y}} + \vec{E_{3y}}$$

$$E_{tot} = \sqrt{E_{tot\,x}^2 + E_{tot\,y}^2}$$

~~Lavoro elettromotore~~ della forza elettromotrica

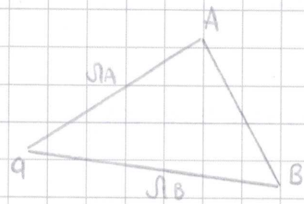
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$d\mathcal{L} = \vec{F}\cdot d\vec{s}$$
$$\mathcal{L}_{AB} \overset{!}{=} \sum_i \vec{F_i}\cdot\Delta s_i \overset{!}{=} \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B q_0\vec{E}\,d\vec{s}$$

Tensione

$$\mathcal{E} = \int_A^B \vec{E}\,d\vec{s}$$ è conservativa ($\mathcal{L}$ non dipende dal percorso)

allora $\mathcal{L} = -\Delta U$ elettrica



$$\int_A^B \vec{F}d\vec{s} = -\Delta U_{elettrica}$$

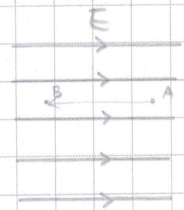
$$\int_{r_A}^{r_A} \vec{F}d\vec{r} = -\Delta U_{el.}$$

$$\int_{r_A}^{r_B} \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = -\Delta U_{el.}$$

$$\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} r^{-2}\,dr \overset{!}{=} -\Delta U_{el.}$$ variazione E potenziale elettrica

$$\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \overset{!}{=} -\Delta U_{el.}$$

(es.) $\mathcal{L} = ?$ per spostare protone in E (campo ~~gra~~ elettrico uniforme) da A a B



$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F} d\vec{s} = \int_A^B \vec{E} q \, d\vec{s} = -Eq \int_A^B d\vec{s} = -Eq\,\overline{AB}$$

neg. perché va contro E

$\Delta U_{el} = -\mathcal{L} = Eq\,\overline{AB}$

Potenziale (proprietà dello spazio) per semplice presenza di carica [V= volt]

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\, d\vec{s} = \mathcal{L}/q_0 \qquad \text{dove} \qquad \mathcal{L} = \int_A^B \vec{F} d\vec{s} = \int_A^B \vec{E} q_0\, d\vec{s}$$

$\mathcal{E} \neq E$ perché $\mathcal{E}$ scalare

$$V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r} + c$ V= ciò a meno di una costante

$V \propto \frac{1}{r}$ se $r \to \infty$, $V = 0 + c$ ma c è nulla

$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r^2}$ ~~forza per unità di carica~~ (vettore)

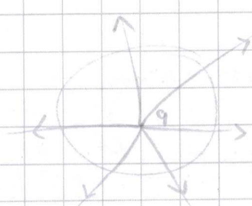
$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r}$ ~~(vettore)~~ (scalare)

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0}{r^2}$ (vettore) forza per unità di carica $E = [V/m]$

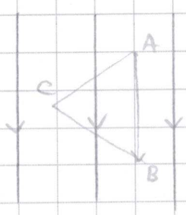
$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0}{r}$ potenziale (scalare) energia per unità di carica
potenziale per carica puntiforme

superfici equipotenziali

$\mathcal{L} = -\Delta U = -\Delta V q_0$



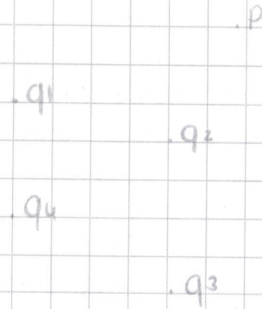
es. $V_A - V_B = -\Delta V = \int \vec{E} d\vec{s} = E \cdot \Delta s$



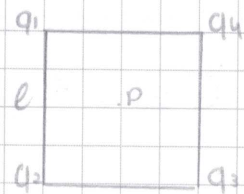
se vado da A a B o passo per C, $\mathcal{L}$ non varia perché dipende solo dalla posizione iniziale.

es. $V_P = ?$ somma scalare

$$V = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$



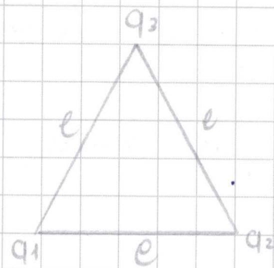
es. $q_1 = 12\,mC$
$q_2 = -24\,\mu C$
$q_3 = 31\,\mu C$
$q_4 = 17\,\mu C$
$l = 1,3\,m$



$$V(P) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum \frac{q_i}{r_i} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 l}\, q_{tot} = 352\,V$$

$$r = \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

es. $U_{tot} = ?$



$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$$

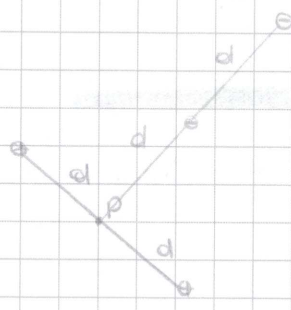
$$\mathcal{L}_1 = 0$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2 q_1}{l}$$

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{31} + \mathcal{L}_{32} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{l} + \frac{q_2 q_3}{l}\right)$$

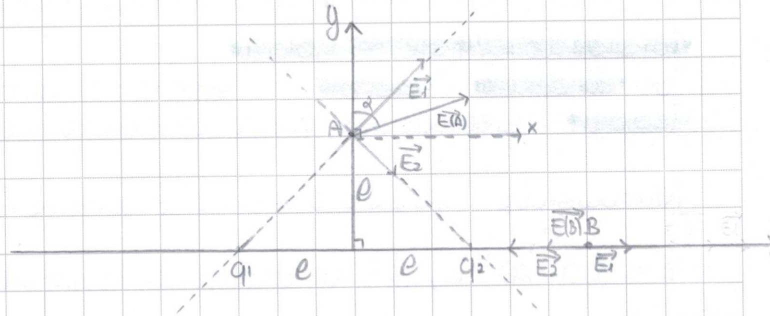
$$\mathcal{L}_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l}(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3) = U_{tot}$$

es. $q = 5 \cdot 10^{-13}\,C$
$d = 4\,cm$



$$V(P) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d} + \cancel{\frac{q}{d}} - \cancel{\frac{q}{d}} - \frac{q}{2d}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2d} = 0,56\,mV$$

(es.) $q_1 = 2\cdot 10^{-4}\ C$
$q_2 = -5\cdot 10^{-5}\ C$
$\ell = 2m$
$A(0;\ell)$
$B(2\ell;0)$



1) $E(A) = ?$
2) α tra $\vec{E}$ e asse y?
3) $E(B) = ?$
4) $\Delta V_{AB} = ?$

1) Centro il sistema di riferimento in A.

$$\vec{E(A)} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

in modulo per E

$$\vec{E(A)}_x = \vec{E_{1x}} + \vec{E_{2x}} = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0(\ell\sqrt{2})^2}\cos(45°) + \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0(\ell\sqrt{2})^2}\cos(45°) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0(\ell\sqrt{2})^2 2}(|q_1|+|q_2|) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0(2\cdot\sqrt{2})^2\cdot 2}(2\cdot 10^{-4} + 5\cdot 10^{-5}) = 198,7\ kV/m$$

$$\vec{E(A)}_y = \vec{E_{1y}} + \vec{E_{2y}} = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0(\ell\sqrt{2})^2}\operatorname{sen}(45°) - \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0(\ell\sqrt{2})^2}\operatorname{sen}(45°) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0(\ell\sqrt{2})^2 2}(|q_1|+|q_2|) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0(2\cdot\sqrt{2})^2 2}(2\cdot 10^{-4} - 5\cdot 10^{-5}) = 119,3\ kV/m$$

$$E(A) = \sqrt{\cancel{(E(A)_x)}^2 + (E(A)_y)^2} = \sqrt{198,7^2 + 119,3^2} = 231,8\ kV/m$$

2) $\vec{E(A)}\cdot\vec{u_y} = E(A)\cdot u_y\cdot\cos(\alpha)$
$E(A)_y = E(A)\cdot\cos(\alpha)$
$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{E(A)_y}{E(A)}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{119,3}{231,8}\right) = 59°$

3) $$\vec{E(B)} = \vec{E_{1x}} + \vec{E_{2x}} = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0(3\ell)^2} - \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0(\ell)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_1|}{(3\ell)^2} - \frac{|q_2|}{\ell^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\cdot 10^{-4}}{(3\cdot 2)^2} - \frac{5\cdot 10^{-5}}{2^2}\right) = -62\ kV/m$$

torniamo il segno per V

4) $$\Delta V_{AB} = V(A) - V(B) = (V_1(A) + V_2(A)) - (V_1(B) + V_2(B)) =$$
$$= \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\,\ell\sqrt{2}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\,\ell\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\,3\ell} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\,\ell}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\,\ell\sqrt{2}}(q_1+q_2)\right) - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\,\ell}(q_1/3 + q_2)\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\,2\sqrt{2}}(4\cdot 10^{-4} - 5\cdot 10^{-5})\right) - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\,2}\left(\frac{4\cdot 10^{-4}}{3} - 5\cdot 10^{-5}\right)\right) = 402\ kV$$

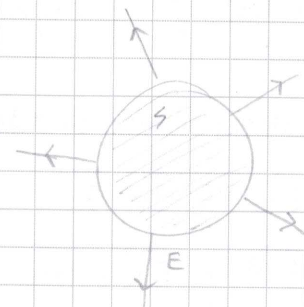
Materiali conduttore ↔ isolanti
~~Ese~~ Conduttori : metalli (v. elettroni di conduzione)
Isolanti : elettroni non fanno moti di carica (v. gomma, legno, plastica, vetro)

Per induzione riusciamo a separare cariche in metallo

$n = 8.5 \cdot 10^{28}\ e^-/m^3$ di elettroni di conduzione nel Cu

Legge di Gauss

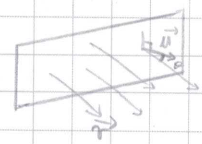
Se da una superficie chiusa esce E netto
dentro dovrà esserci carica netta.



Flusso : $\Phi = \vec{v} \cdot \vec{S} = \vec{v} \cdot (\vec{n} \cdot S)$

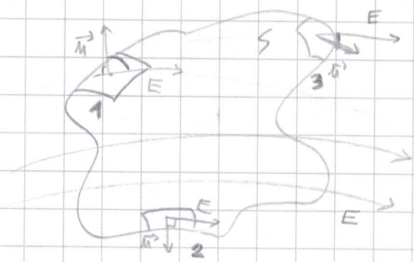
$\vec{n}$ vettore normale ad S, flusso max se prodotto ~~scalo~~
vettoriale ha $\alpha = 90°$

Flusso di campo elettrico $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos(\theta)$ $\left[\frac{N \cdot m^2}{C}\right]$



Superficie tridimensionale gaussiana

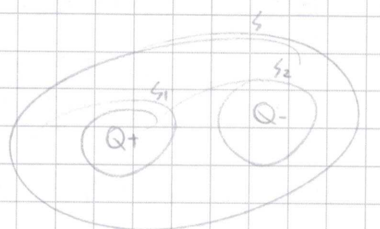
1) $\Phi < 0$ per $\theta > 90°$
3) $\Phi > 0$ per $\theta < 90°$
2) $\Phi = 0$ per $\theta = 90°$



Teorema di Gauss $\Phi = \frac{Q_{interna}}{\varepsilon_0}$

$Q > 0$, flusso pos. uscente
$Q < 0$, flusso neg. entrante

es. $\Phi = tot$



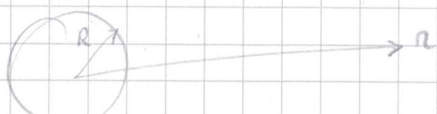
$\Phi_1 = \frac{Q^+}{\varepsilon_0}$

$\Phi_2 = \frac{Q^-}{\varepsilon_0}$

$\Phi\ tot = 0$ perchè vanno sommati

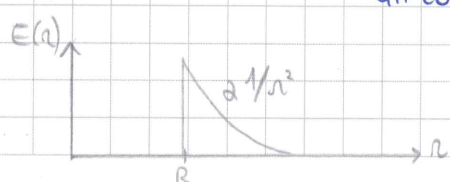
Le cariche esterne non influiscono

Proprietà:
- quando un conduttore è in equilibrio, le cariche si distribuiscono sulla sup. (per gli isolanti non vale).

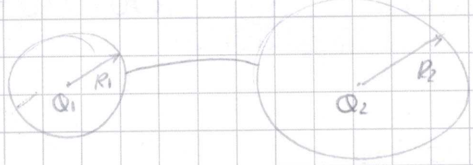


$E(r)$

$r < R \Rightarrow E(r) = 0$
$r > R \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$



• Il potenziale è costante nel conduttore



$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \qquad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

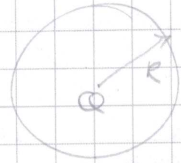
Collegandole le cariche si spostano arrivando allo stesso potenziale di equilibrio (v. circuito)

$$\begin{cases} V_1 = V_2 = V_{eq} \\ Q_{tot} = Q_1 + Q_2 \text{ costante} \end{cases}$$

Senza resistenze tutti i punti di un circuito sono equipotenziali

Un non conduttore non ha cariche superficiali ma anche dentro

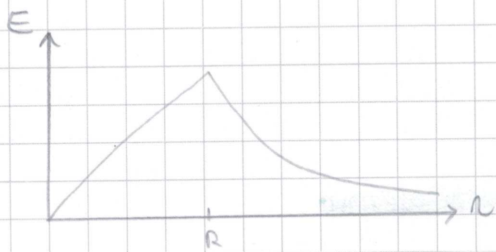
ρ (densità di carica) = $\frac{Q}{V}$ costante



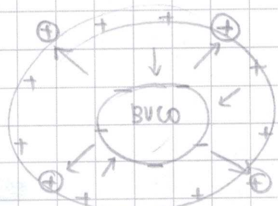
se $r < R$ $\quad E = \frac{q_{inter.}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r^2}} \cdot \frac{Q r^{\cancel{3}}}{R^3} = \frac{Q r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

$$\frac{Q_{INT}}{V_1} = \frac{Q_{TOT}}{V_{TOT}} = \rho$$

$$Q_{INT} \Rightarrow \frac{Q_{TOT}}{\frac{4\cancel{\pi} R^3}{\cancel{3}}} \cdot \frac{4\cancel{\pi} r^3}{\cancel{3}}$$



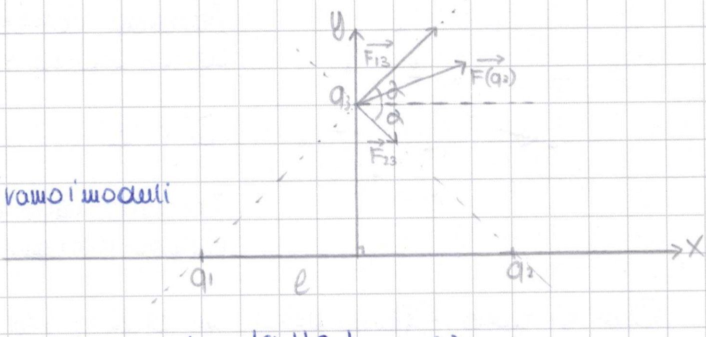
Schermo elettrostatico



All'interno del buco siamo schermati. Mettendovi una carica, le cariche del conduttore interne si sposteranno verso il centro e fuori si sposteranno le cariche opposte oltre a quelle già presenti (induzione totale).

La carica netta nella S dentro $Q_S = 0$

es. 1) $F(q_3) = ?$ $\qquad q_1 = 10^{-4}\,C$
2) α tra $F(q_3)$ e $y = ?$ $\qquad q_2 = -5 \cdot 10^{-5}\,C$
3) $L\ q_3 \to 0$? $\qquad q_3 = 2 \cdot 10^{-4}\,C$
$\qquad l = 2m$



ci vanno i moduli

1) $\vec{F}(q_3) = \sum \vec{F} = \vec{F_{13}} + \vec{F_{23}}$

$$\vec{F}(q_3)_x = \vec{F_{13x}} + \vec{F_{23x}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_3|}{(l\sqrt{2})^2} \cos(\alpha) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_2||q_3|}{(l\sqrt{2})^2} \cos(\alpha) =$$

$$= \frac{\cos(\alpha)}{4\pi\varepsilon_0 (l\sqrt{2})^2} (|q_1||q_3| + |q_2||q_3|) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 (2\sqrt{2})^2\, 2} (10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-4}) =$$

$$= 23{,}8\ N$$

$$\vec{F(q_3)}_y = \vec{F_{13y}} + \vec{F_{23y}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_3|}{(l\sqrt{2})^2}\sin(\alpha) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2||q_3|}{(l\sqrt{2})^2}\sin(\alpha) =$$
$$= \frac{\sin(\alpha)}{4\pi\varepsilon_0(l\sqrt{2})^2}(|q_1||q_3| - |q_2||q_3|) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0(2\sqrt{2})^2 2}(10^{-4}\cdot 2\cdot 10^{-4} - 5\cdot 10^{-5}\cdot 2\cdot 10^{-4}) =$$
$$= 8\ N$$

$$F(q_3) = \sqrt{F(q_3)_x^2 + F(q_3)_y^2} = \sqrt{23{,}8^2 + 8^2} = 25{,}1\ N$$

2) $\vec{F(q_3)} \cdot \vec{u_y} \overset{!}{=} F(q_3)\cdot u_y \cdot \cos(\alpha)$

$F(q_3)_y \overset{!}{=} F(q_3)\cos(\alpha)$

$\alpha \overset{!}{=} \cos^{-1}\left(\frac{F(q_3)_y}{F(q_3)}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{25{,}1}\right) = 71{,}4°$

3) fatto su una carica (non con E e V che non necessitano di carica di prova perché sono proprietà dello spazio)

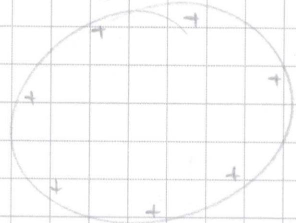
$$L = -q_3\,\Delta V = -q_3(V_f - V_i) = -q_3\big((V_{31} + V_{32}) - (V_{31} + V_{32})\big)$$
$$\overset{!}{=} -q_3\left(\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{l} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{l\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{l\sqrt{2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{l\sqrt{2}}\right)\right) =$$
$$\overset{!}{=} -q_3\left(\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l}(q_1+q_2)\right) - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l\sqrt{2}}(q_1+q_2)\right)\right) =$$
$$\overset{!}{=} -2\cdot 10^{-4}\left(\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 2}(10^{-4} - 5\cdot 10^{-5})\right) - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 2\sqrt{2}}(10^{-4} - 5\cdot 10^{-5})\right)\right) =$$
$$\overset{!}{=} -2\cdot 10^{-4}(225\cdot 10^{3} - 158{,}9\cdot 10^{3}) =$$
$$\overset{!}{=} 13{,}2\ J$$

neg.

V nell' origine

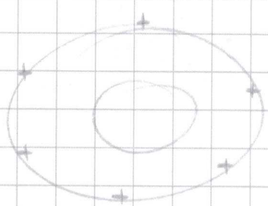
V in l

Circuiti elettrici

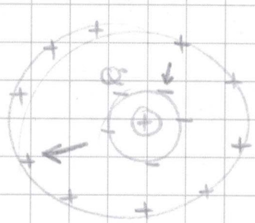


$\vec{E} = 0$

V costante



Schermo elettrostatico: carica distribuita su superficie in conduttore cavo
(sfera nella sfera, nella "ciambella" anche la parte dentro ha superficie carica).



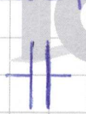
Ponendo carica in foro su sup. interna si accumula carica uguale e contraria

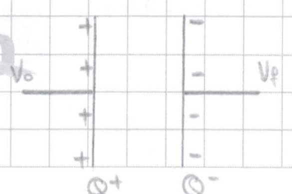
$Q^- = \oplus$ — Induzione totale

Intanto altre cariche più pari a $\oplus$ si spostano all' esterno per compensare le Q^-

Qtot è nullo (flusso nullo) dentro sup perché cariche equilibrate

Questo è il condensatore: due piastre una carica + e l'altra a induzione totale − tra le piastre c'è ΔV





Capacità $C = \frac{Q}{\Delta V}$ proprietà di condensatore che ad una data ΔV raggiunge Q più o meno elevata a seconda di sua capacità

$>Q > E$ tra le piastre

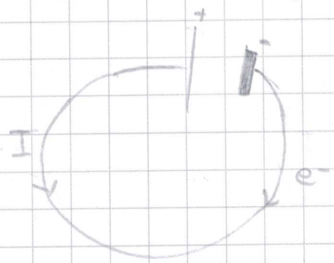
⊣⊢ generatore

Moto di e^- in assenza di E è casuale caotico.

$$\vec{v}_m = \frac{\sum v_i}{N} = 0 \ m/s \implies \text{non ho flusso di particelle}$$

Un conduttore con carica è un equipotenziale. Ø Collegandone due diventano equipotenziale, cambiando Q a seconda di V, Q fluisce, ⇒ si crea corrente elettrica ordinata non casuale, ho flusso ordinato. Il generatore di $\mathcal{E}$ fem crea sta situazione, sta differenza di V. ΔV collegata genera moto di cariche ordinato (corrente elettrica).

Il generatore di forza elettromotrice è la batteria/pila



Gli elettroni ~~da~~ vanno da - a +
ma la corrente I va da + a -

C'è E parallelo a filo che fa muovere carica

$$I \text{ corrente} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \qquad [A = C/s]$$

densità di corrente $\vec{\rho} = I/S$ $\quad S$ = sup. del filo $\left[\frac{A}{m^2}\right]$

$\rho = n \cdot q_e \cdot \vec{v}_{md}$ $\quad \vec{v}_{md}$ = velocità di deriva

densità carica (numero dei portatori) elettroni di conduzione

$|\vec{v}_{em}| \sim 10^6 \ m/s$

$v_d \sim 10^{-4}/10^{-5} \ m/s$

per accendere luce v_{md} è lenta ma luce arriva subito perché la ρ è alta nel filo.

es. $I = 8A$
$S = 6 mm^2$
$v_{md} = ?$

$$\rho = n \cdot q_e \cdot v_{md} = \frac{I}{S}$$

$$v_{md} = \frac{I}{S} \frac{1}{n q_e} = \frac{8}{6 \cdot 10^{-6} m^2} \cdot \frac{1}{8{,}5 \cdot 10^{28} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1{,}47 \cdot 10^{-4} \ m/s$$

Resistenza: proprietà di corpo di opporsi a passaggio di I

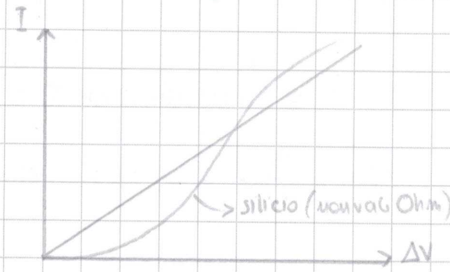
$R = \dfrac{\Delta V}{I}$ ΔV nell'unità di corrente [Ω Ohm]

$R \propto \dfrac{1}{I}$

nel circuito i resistori $-\!\!\text{\textbackslash/\textbackslash/\textbackslash/}\!\!-$

Legge di Ohm: $I = \dfrac{\Delta V}{R}$

corpo per cui vale legge fa linea

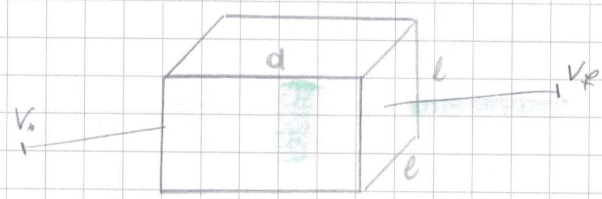


Resistività: $\rho = \dfrac{E}{I}$ [Ω/m] $R = \rho \cdot \dfrac{d}{S}$

Conducibilità: $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ legato a capacità di corpo di condurre I

$\rho_{Al} = 1{,}62 \cdot 10^{-8}\ \Omega/m$ si può valutare ρ mentre R no
$\rho_{Cu} = 1{,}69 \cdot 10^{-8}\ \Omega/m$
$\rho_{Fe} = 9{,}68 \cdot 10^{-8}\ \Omega/m$
$\rho_{vetro} = 10^{10} - 10^{14}$ (ottima resistenza)

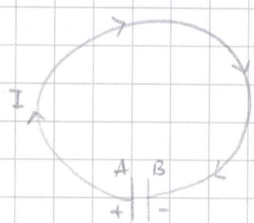
es. $l = 1{,}2\,cm$
$d = 15\,cm$
$R = ?$
$\rho = 9{,}68 \cdot 10^{-8}\ \Omega/m$



$R = \rho \dfrac{d}{A} = 9{,}68 \cdot 10^{-8} \cdot \dfrac{0.15}{0.15 \cdot 0{,}012^2} = 100\ \mu\Omega$

R valutata se attacco ΔV ai capi di oggetto

$I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t} = \dfrac{dq}{dt}$



$\int_A^B \vec{E}\,d\vec{s} = \mathcal{E}$, fem o potenziale (V)

$I = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$ legge di Ohm [A]

$R = \rho \dfrac{L}{S}$ ρ resistività [Ω]

generatore: dispositivo che mantiene ΔV costante

$I > 0$ quando va da più a meno (gli elettroni fanno il giro opposto = le cariche pos. equivalenti fanno il giro di I).

Energia e potenza elettrica

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$L = \int_A^B \vec{F} d\vec{s} = \int_A^B q\vec{E} d\vec{s} = q \underbrace{\int_A^B \vec{E} d\vec{s}}_{\text{diff. di } E \text{ tra due punti di cammino}} = q\mathcal{E} = q(V_B - V_A) = qV$$

integrale di cammino sul circuito

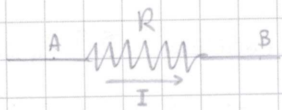
$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{d(qV)}{dt} = V\frac{dq}{dt} = V \cdot I$$

con $\mathcal{E}$ piccola ho bisogno di I grandi ~~p~~ a parità di P e viceversa.

Potenza dissipata

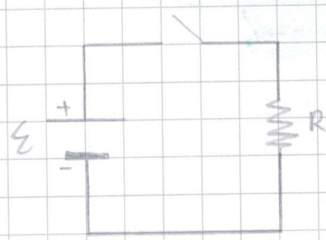
$$P = (V_B - V_A) I = V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R}$$

$$V = R \cdot I$$



Lavorando a V elevate posso trasportare molta P a bassa I => dissipo meno E (cavi più piccoli).

interruttore aperto = R infinita
interruttore chiuso = R nulla



ΔV è uguale ∅ in ogni punto

se $R \to 0$, P?

se quando $P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \infty$

non posso guardare $P = R \cdot I^2$ perché non conosciamo $I(R)$, I è variabile, V costante.

$\lim_{R \to 0} P = \infty$, il generatore deve fornire I ∞

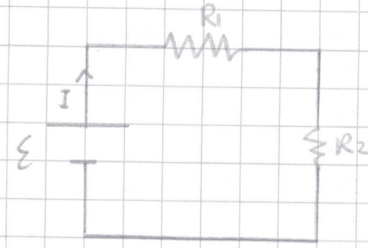
Quando carico è molto basso ho corto circuito (circuito collegato senza R) (v. fusibili). P tutta sul circuito ~~gnd R si~~.

es. $V = 3,7$ V
860 mAh capacità della batteria

$E = P \cdot t = 3,7 \cdot 0,860 \cdot 3600 = 11.4 \cdot 10^3$ J $= mgh$

$\Rightarrow h = \frac{11.4 \cdot 10^3}{70 \cdot 9,81} = 2,4$ m

Resistenze in serie



$I = I_1 = I_2$
$V_1 = R_1 \cdot I_1 = R_1 \cdot I$
$V_2 = R_2 \cdot I_2 = R_2 \cdot I$

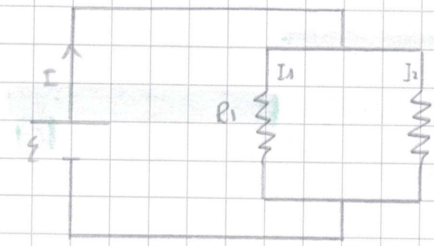
$\Sigma \Delta V$ ai capi di ciascuna $R = \mathcal{E}$

$V_1 + V_2 = \mathcal{E} = R_1 I + R_2 I = I(R_1 + R_2)$

$\mathcal{E} = (R_1 + R_2) I = R_{eq} \cdot I$

$R_{tot} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$ $>$ di tutti R in circuito

Resistenze in parallelo



$V = V_1 = V_2$
$V_1 = R_1 \cdot I_1$
$V_2 = R_2 \cdot I_2$

ma carica si conserva ΣI ai capi $= I$

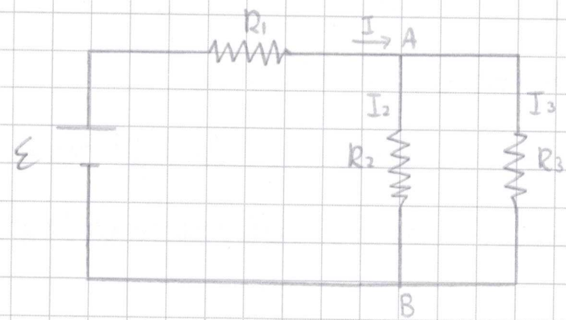
$$I_1 + I_2 = I = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \mathcal{E}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\mathcal{E} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} \cdot I = R_{eq} \cdot I$$

$$R_{tot} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right)^{-1}$$ $<$ di tutte R di circuito

es

$\mathcal{E} = 100\,V$
$R_1 = 2\,\Omega$
$R_2 = 8\,\Omega$
$R_3 = 4\,\Omega$



1) P fornita dal generatore?
2) $I_3 = ?$
3) potenza dissipata su R_1?

1) $I = I_1 = I_2 + I_3$

$\mathcal{E} = V_1 + V_2 = V_1 + V_3$

$$R_{tot} = R_1 + R_2 /\!/ R_3 = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 2 + \frac{8 \cdot 4}{8+4} = 4{,}7\,\Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{tot}} = \frac{100}{4{,}7} = 21{,}4\,A$$

$P = \mathcal{E} \cdot I = 100 \cdot 21{,}4 = 2.140\,W$

2) $V_2 = R_2 I_2$
$V_3 = R_3 I_3$

ma $V_2 = V_3 \Rightarrow \begin{cases} R_2 I_2 = R_3 I_3 & \text{perchè } V \text{ costante in parallelo} \\ I = I_2 + I_3 & \text{perchè in parallelo} \end{cases}$

o $V_3 = \mathcal{E} - V_1 = \mathcal{E} - R_1 I_1 = \mathcal{E} - R_1 I$

$R_3 I_3 = \mathcal{E} - R_1 I$

$I_3 \overset{!}{=} \dfrac{\mathcal{E} - R_1 I}{R_3}$

tra capi di circuito posta in parallelo (tra A e B) che $V_2 = V_3$ perchè V costante perchè in parallelo

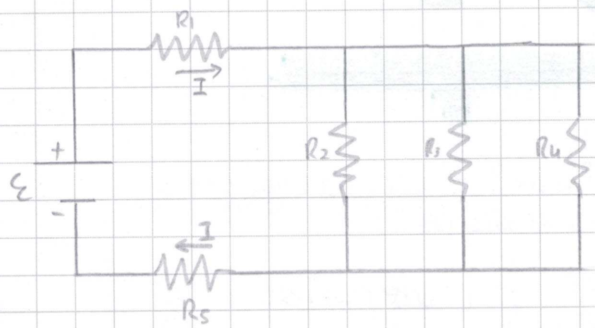
3) $P_1 = R_1 \cdot I_1^2 = 2 \cdot 21{,}4^2 = 916\ W$

$P_2 = \dfrac{V^2}{R_2} = \dfrac{57{,}2}{8} = 409\ W$

$P_3 = \dfrac{V^2}{R_3} = \dfrac{57{,}2}{4} = P_{tot}\ (P_1 + P_2) = 818\ W$

Resistenza più bassa è qlla che dissipa di più.

08) $\mathcal{E} = 24\ V$
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 200\ \Omega$
$R_3 = 300\ \Omega$
$R_4 = 400\ \Omega$
$R_5 = 500\ \Omega$



1) I = ?
2) Pgenerata = ?
3) I_3 = ?

1) $I = I_1 = I_5 = 35\ mA$
$V_{//} = V_2 = V_3 = V_4$

$R_{tot} = R_1 + \left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}\right)^{-1} + R_5 = 100 + \left(\dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{300} + \dfrac{1}{400}\right)^{-1} + 500 = 692{,}3\ \Omega$

$I = \dfrac{\mathcal{E}}{R_{tot}} = \dfrac{24}{692{,}3} = 0{,}035\ A$

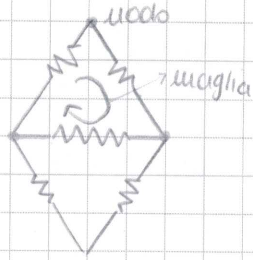
2) $P_{gen.} = \mathcal{E} \cdot I = 24 \cdot 0{,}035 = 0{,}84\ W$

3) $\mathcal{E} = V_1 + V_{//} + V_5$

$I_3 = \dfrac{V_3}{R_3} = \dfrac{V_{//}}{R_3} = \dfrac{\mathcal{E} - V_1 - V_5}{R_3} = \dfrac{\mathcal{E} - R_1 I - R_5 I}{R_3} = \dfrac{\mathcal{E} - I(R_1 + R_5)}{R_3} = \dfrac{24 - 0{,}035(100 + 500)}{300} =$

$= 0{,}01\ A$

Ponte di Wheatstone

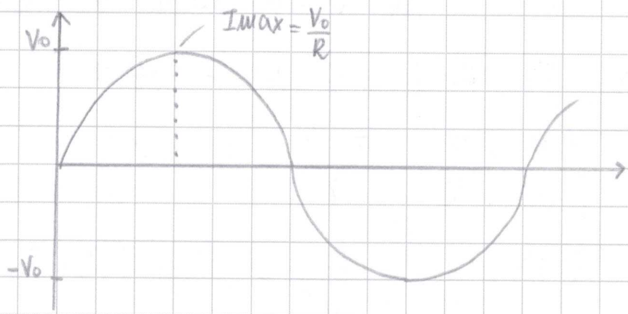


non risolvibile con regole di serie e parallelo
perchè R non sono nè in serie nè in parallelo
=> risolvo ~~poi~~ con principi di Kirchhoff
Legge di maglie: $\Sigma \Delta V$ lungo circuito $= \mathcal{E}$
Legge dei nodi: corrente che entra in nodo è uguale a quello che esce

Corrente alternata

E' più facile trasformare alla alternata che alla continua, cambia nel t.
$\mathcal{E}$ varia sinusoidalmente nel tempo.

$$\mathcal{E} = V_0 \cos(\omega t)$$



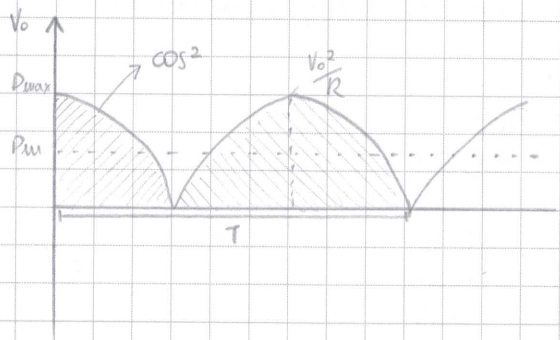
$V_0 = 230\ V$
$\nu = 50\ Hz$
$\omega = 2\pi 50$

 gen. di corrente alternata

50 volte al secondo cambia segno (giro) la corrente nel circuito

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{R}$$

$$P = \mathcal{E} \cdot I = \frac{V_0^2}{R} \cos^2(\omega t)$$



qual è P_{media}? E' una media integrale (integrale diviso per T).

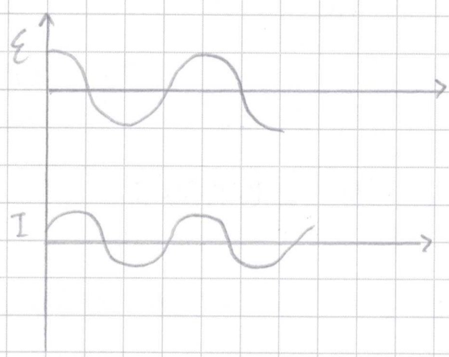
$$P_m = \frac{V_0^2}{R} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t)\, dt = \frac{V_0^2}{R} \cdot \frac{1}{2}$$ metà altezza del picco

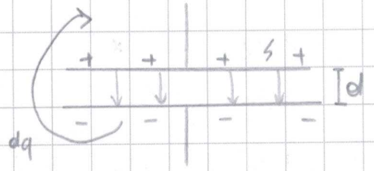
$$V_{efficace} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow P_m = \frac{V_{efficace}^2}{R}$$ così intesa V, ho P scritta in solito modo

Corrente sfasata rispetto a V

$$V \cdot I = V_0 \cos(\omega t) \cdot I \cos(\omega t + \theta)$$

allora potremo avere anche P nulla





Condensatore: dispositivo che accumula cariche sotto forma di campo elettrostatico

$$Q = C \cdot V$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

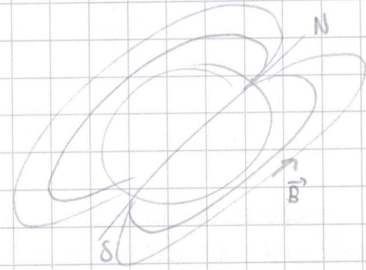
$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$$

Quanta E ho? ~~Con~~ Calcolo L nel spostare carica, ma varia la tensione

$$dL = dq \cdot V = \int_0^{q_f} dq \cdot V = \int^{q_{fin}} dq \cdot \frac{Q}{C} = \frac{q_{fin}^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

E immagazzinata non molto elevata ma il t di scarica può essere breve → P elevata

Magnetismo



Campo magnetico: imp. x sfruttamento di E elettromagnetica.
campo vettoriale def. nello spazio.
Terra è dipolo magnetico. Ci sono momenti magnetici permanenti lungo linee di forza.
Campo magnetico ⊄ terrestre è costante e ~ parallelo a crosta.

Forza di Lorentz: f. di campo magnetico su carica che si muove (se $v = 0$ non c'è $\vec{F_L}$)

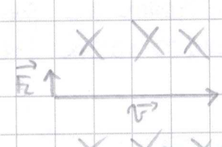
$$\vec{F_L} = q\vec{v} \times \vec{B}$$
$$\stackrel{!}{=} qvB\operatorname{sen}(\theta)$$

$$[T = \text{tesla}] = [N/Cm^2]$$

v. regola della mano destra
con dita punto verso $\vec{v}$ giro con mignolo verso $\vec{B}$ e il pollice mi dà direzione di $\vec{F_L}$

F ortogonale alla v $\quad \vec{F_L} \perp \vec{v}$ e dunque allo spostamento $\vec{F_L} \perp \vec{ds}$

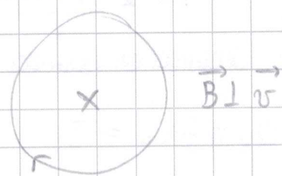
~~$L = F$~~ $\quad L(F_L) = 0$ perché ortogonali, Ec si conserva, variando moto cambio solo direzione e non v.



Anche f. centrifuga è ortogonale a ~~F~~ ~~moto~~ v.

$$F_L = F_c \implies \text{moto di carica è circolare}$$
$$qvB \stackrel{!}{=} \frac{v^2}{R} m \quad \text{perché } \operatorname{sen}(\theta) = 1$$

raggio di curvatura $\quad R = \frac{mv}{qB}$ quantità di moto



es. $T = ?$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

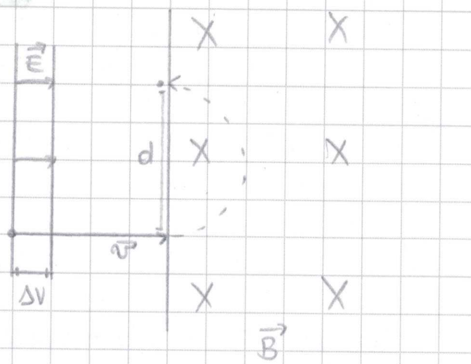
$$\nu = \frac{qB}{2\pi m}$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{qB}{m}$$

pulsazione di ciclotrone (serve per costruzione di acceleratori di particelle).

Spettrometro di massa.

sostanza ionizzata, di componenti di masse diverse ma la carica è alla uniforme
[letto] E tra due placche, come accelerati
fatte passare attraverso B, F_L fa
fare traiettoria circolare, troviamo dove
impatta la particella. Noto d, noto qe
noto B ricavo elemento di particella (m)



$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \qquad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

v accelerato dal E generato da ΔV $\qquad$ 2 campo elettrico $\quad qV = \Delta E_c$

$$qV = \frac{1}{2}mv^2$$

$$d = 2R = 2\frac{mv}{qB} = \frac{2m}{qB}\cdot\sqrt{\frac{2qV}{m}} = \sqrt{m}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{8V}{qB^2}}}_{\text{tutti dati conosciuti } k} = \sqrt{m}\cdot k$$

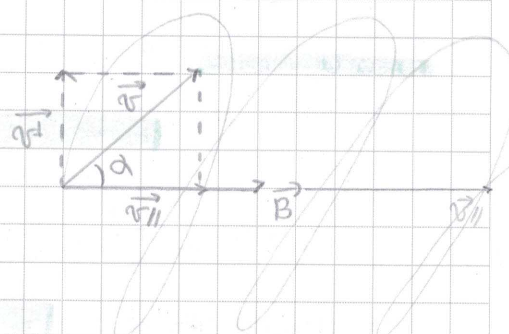
m grande d grande e viceversa
conoscendo d deduco massa di elementi che vogliamo analizzare.

$F_L = q\vec{v}\times\vec{B}$ ~~sen~~

se $\alpha = 0$, $F_L = 0$

$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_{\parallel}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} v_{\parallel} \text{ costante} \\ v_\perp \text{ ruota} \end{array}\right\} \Rightarrow$ moto elicoidale

$R = \frac{mv_\perp}{qB}$ raggio della vite

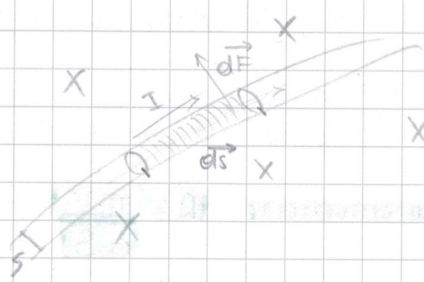


Si sfrutta ciò per confinare plasma (particelle cariche) e fare fusione nucleare.
Vento solare intrappolato in linee di campo terrestre e si accumulano ai poli → aurora

$$\vec{dF} = q\,\vec{v}_{deriva}\times\vec{B}$$

$$= q_e n\, \underbrace{S\,\vec{ds}}_{V}\,\vec{v}_d\times\vec{B}$$

n: densità di carica nel conduttore



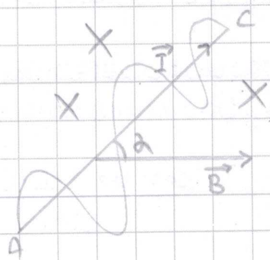
$q_e n S v_d = I \qquad \vec{ds}$ e $\vec{v_d}$ paralleli

$$= I\,\vec{ds}\times\vec{B}$$

forza magnetica in tratto di filo
la vera f. sfruttata nella pratica

$\vec{B}$ uniforme

f. entrante



$$\vec{F}_{AC} = \int_A^C d\vec{F} = \int_A^C I\, d\vec{s} \times \vec{B} = \int_A^C I\, ds\, B \,\mathrm{sen}(\alpha)$$

$$|d\vec{F}| = I\, ds\, B \,\mathrm{sen}(\alpha)$$

$$= IB\,\mathrm{sen}(\alpha) \int_A^C ds = IB\,\mathrm{sen}(\alpha) \cdot \overline{AC}$$

Considerando $\vec{AC}$ $\quad F_{AC} = I \cdot \vec{AC} \times \vec{B}$

è irrilevante la strada tra A e C perchè l'unica cosa che conta è la componente $\perp$ di I a B.
In circuito chiuso (B uniforme), $F = 0$ ma $\vec{M} \neq 0$.
Non esiste filo con I che non sia chiuso, è sempre circuito.

Momento torcente di una spira

$\vec{F_1}$ entrante // a piano di spira

$F_1 = a I B \,\mathrm{sen}(\beta)$

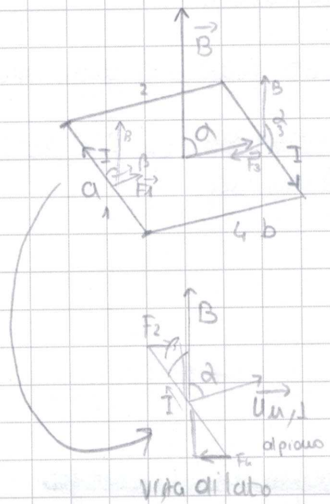
B non è normale al piano

$\vec{F_3} = -\vec{F_1}$ entrante e opposta

$F_3 = a I B \,\mathrm{sen}(\beta)$

$M = 0$ forze che si annullano (a braccio nullo)

$\vec{F_2} = -\vec{F_4} = b I B \,\mathrm{sen}(\beta) = b I B \quad \beta = 90°$
$F \perp B$



$M = F \cdot \text{braccio} = bIB \cdot a\,\mathrm{sen}(\alpha) = BI\,\mathrm{sen}(\alpha) \cdot S$

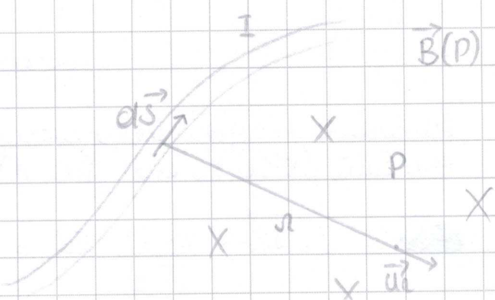
$\vec{m}$ momento magnetico

$\vec{m} = abI\, \vec{u}_n$

$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

Cariche in movimento generano campo magnetico

Legge elementare di Laplace: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{I\, d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$

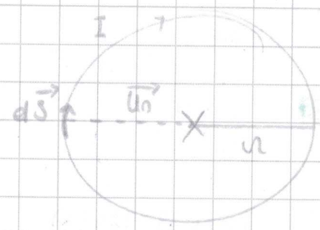


$\vec{B}$ entrante al ~~⊥~~ piano del foglio

$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$$

Caso particolare: campo al centro di una spira percorsa da I



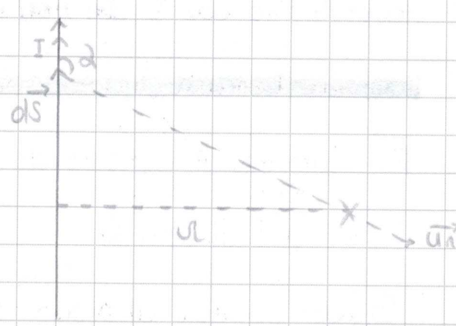
Secondo prodotto vettoriale $\vec{B}$ è entrante.
Se corrente fosse antioraria, B uscente.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \frac{ds \cdot u_n \cdot \text{sen}(90°)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,ds}{r^2}$$

$$B = \int dB = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}}_{\text{costanti}} \int ds = \frac{\mu_0 I \, \cancel{2}\cancel{\pi} r}{2 \cancel{4}\cancel{\pi} r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

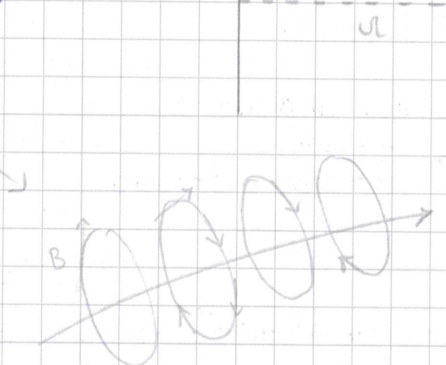
campo magnetico di spira: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2r}$

Legge di Biot-Savart: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u_\theta}$
(campo magnetico di filo rettilineo)

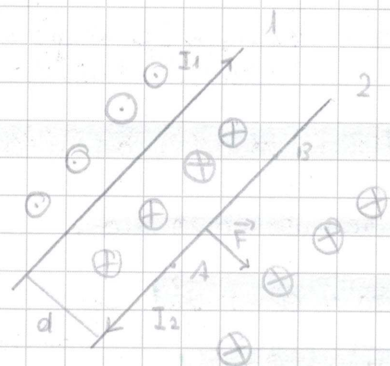


B tangente sempre a direzione radiale ($\vec{u_\theta}$)

B si avvita intorno al filo nel senso di vite destrorsa



Forza magnetica tra 2 fili:
(paralleli con I discorde)



$d\vec{F} = I\, d\vec{s} \times \vec{B}$ f. magnetica

$\vec{F_{AB}} = I\, \vec{AB} \times \vec{B}$

$B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$

sapendo che $d\vec{F} = I_2\, \underset{\uparrow}{d\vec{s}} \times \vec{B_1}$ (entrante per il filo 2)

percorso della I_2

~~fa~~ usando regola della mano dx su sistema di filo 2 immerso in campo entrante (dovuto dal filo 1) F è repulsiva.

$$\vec{F_{AB}} = I_2 \vec{AB} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{u_\theta} = \frac{I_1 I_2 AB \mu_0}{2\pi d}$$

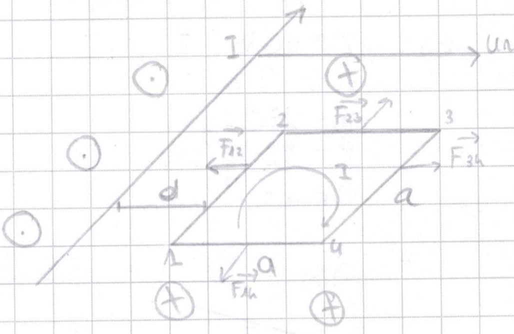
se correnti concordi F attrattiva

per unità di lunghezza ($AB = 1m$), $F = \dfrac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi d} = \dfrac{2 I_1 I_2}{d} 10^{-7}$

def. di "ampere": corrente elementare è di 1A quando 2 fili a 1m di d danno $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N

es.

$I_{spira} = 2A$
$I_{filo} = 500\,A$
$a = 10\,cm$
$d = 10\,cm$
$F_{spira} = ?$



$$B_{filo} = \frac{\mu_0 I_{filo}}{2\pi r}$$

$$\vec{F}_{spira} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{34} + \vec{F}_{41} = \underbrace{I_{sp.}\, \vec{12} \times \vec{B}}_{\text{f. attrattiva}} + \underbrace{\cancel{I_{sp.} \int_2^3 \vec{ds} \times \vec{B}}}_{\text{perché B non è costante}} + \underbrace{I_{sp.}\, \vec{34} \times \vec{B}}_{\text{f. repulsiva}} + \cancel{I_{sp.} \int_1^4 \vec{ds} \times \vec{B}} =$$

$$= * + I_{sp.} \int_2^3 ds \frac{\mu_0 I_f}{2\pi r} = \frac{I_{sp.} I_f}{2\pi} \mu_0 \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) + * + *$$

ma $\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{41}$ $\Rightarrow$ si annullano

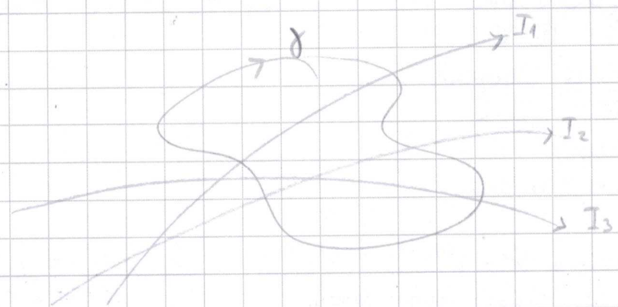
$$= -\left(\frac{I_{sp.} I_f \mu_0}{2\pi d} a\right)\vec{u_n} + \left(\frac{I_{sp} I_f \mu_0}{2\pi (d+a)} a\right)\vec{u_n}$$

neg. ~~quindi~~ perché attrattiva

$$= \frac{I_s I_f \mu_0 a}{2\pi}\left(\frac{1}{d+a} - \frac{1}{d}\right)\vec{u_n} = \frac{2 \cdot 500 \cdot \mu_0 \cdot 0{,}1}{2\pi}\left(\frac{1}{2 \cdot 0{,}1} - \frac{1}{0{,}1}\right) = -10^{-4}\,N$$

f. attrattiva

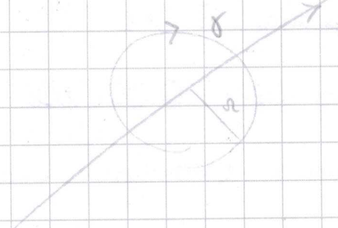
Legge di Ampere: integrale di cammino



$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 I \text{ concatenata al circuito } \gamma$$

$I_c = \sum$ correnti (pos. se entranti / neg. se uscenti)

segno di vite destrorsa sul circuito γ.



caso di legge di Biot - Savart:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = 2\pi r B = \mu_0 I$$
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

es. $\mathcal{E} = 16V$
$100 \; A \cdot h$
$m = 170 kg$
$\varepsilon = 80\%$ solo
$h_{max} = ?$

- $\mathcal{L}_{tot} = Q \cdot V = 100 \cdot (3600) s \cdot 16 = 5{,}76 \cdot 10^6 J$

$\cancel{[A \cdot h = I]}$ $\left[\begin{array}{l} I \cdot h = Q \\ [A] \cdot [h] = Q \end{array} \right]$

$\varepsilon = 80\%$ di $\mathcal{L}_{tot} = 5.76 \cdot 10^6 \cdot 0{,}8 = 4{,}61 \cdot 10^6 J$
$L_{eff.} =$

$\cancel{\mathcal{L}}$
$\mathcal{L}_{eff.} = mgh$
$h = \frac{4{,}61 \cdot 10^6}{mg} = 2766 m$

- $I_{max} = ?$ $P = I \cdot V = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t}$

- se E viene usata per scaldare H_2O a $10°C$ di 20ℓ

$Q = c_{H_2O} \cdot m \cdot \Delta T = \cancel{c_{H_2O}\, m} = \cancel{4186 \cdot 20} \cdot$

$\Delta T = \frac{Q}{c_{H_2O} \cdot m} = \frac{5.76 \cdot 10^6}{4186 \cdot 20} = 68.73°C$

$T_f = T_i + \Delta T = 10 + 68.73 = 78.73°C$

(es) 250 g vino $\qquad L_f = 333 \cdot 10^3 J/kg$
$T_v = 10°C$
50 g lamponi
$T_c = 30°C$
$T_{eq.} = ?$
$c_{H_2O} = 4190$

$T_{eq.} = \frac{\cancel{c_{H_2O}}(m_v T_v + m_c T_c)}{\cancel{c_{H_2O}}(m_v + m_c)} = \frac{0{,}25 \cdot 10 + 0{,}05 \cdot 30}{0{,}25 + 0{,}05} = 13{,}3°C$

+ 40 g ghiaccio $T = 0°C$

$Q_f = m_g \cdot L_f = 0{,}04 \cdot 333 \cdot 10^3 = 13.320 J$

$C_{sistema\ spritz} = c_{H_2O}\, m_v + c_{H_2O}\, m_c = c_{H_2O}(m_v + m_c) = 4190(0{,}25 + 0{,}05) = 1257 \; °C/h$

$Q_f = C_{sist.} \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta T_f = \frac{Q_f}{C_{sist.}} = \frac{13.320}{1257} = 10{,}6°C$

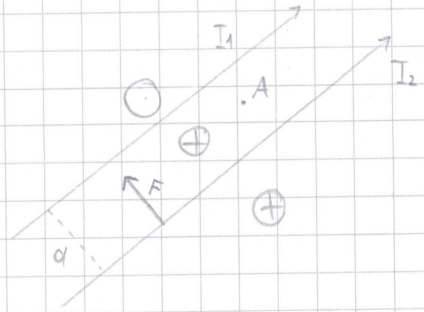
$T_f = T_{eq.} - \Delta T_f = 13.3 - 10{,}6 = 2{,}7°C$ ora ho 40g di H_2O a 0°
e spritz a 2,7°C

$T_{eq}' = ?$

$$T_{eq}' = \frac{\cancel{c_{H_2O}}\,(m_{sist.}\,T_f + m_{ghi}\,0°)}{\cancel{c_{H_2O}}\,(m_{sist.} + m_{ghia})} = \frac{(0{,}25+0{,}05)\cdot 2{,}7 + 0}{(0{,}25+0{,}05) + 0{,}04} = 2{,}41\,°C$$

es.

$I_1 = 40\,A$
$I_2 = 55\,A$
F attrattiva
$d = 20\,cm$
F per unità di lunghezza?



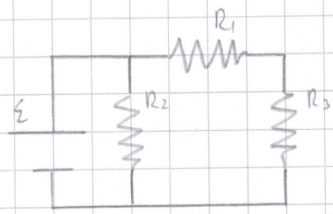
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

- $$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = \frac{2\cdot 10^{-7}\cdot 40\cdot 55}{0{,}02} = 220\cdot 10^{-4}\,N = 0{,}022\,N$$

- $$\vec{B}(A) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\, d/2} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\, d/2} = \frac{2\mu_0}{2\pi d}(I_2 - I_1) = \frac{4\cdot 10^{-7}}{2\cdot 10^{-2}}(55-40) = 30\cdot 10^{-5}\,T = 3\cdot 10^{-4}\,T$$

es.

$R_1 = 10\,\Omega$ $\quad \mathcal{E} = 220\,V$
$R_2 = 15\,\Omega$
$R_3 = 10\,\Omega$
$I_{tot} = ?$
$P_{gen} = ?$
P dissipata in R_2 e R_3 = ?



- $$R_{tot} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1+R_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10+10}\right)^{-1} = 8{,}57\,\Omega$$

$$I_{tot} = \frac{\mathcal{E}}{R_{tot}} = \frac{220}{8{,}57} = 25{,}7\,A$$

- $$P = I_{tot}\cdot \mathcal{E} = 25{,}7\cdot 220 = 5.654\,W$$

- $$P(R_2) = \frac{V_{R_2}^2}{R_2} = \frac{220^2}{15} = 3227\,W$$

alla del generatore

$$P(R_3) = I_3^2\cdot R_3 = (I_{tot} - I_2)^2\cdot R_3 = \left(I_{tot} - \frac{\mathcal{E}}{R_2}\right)^2\cdot R_3 = \left(25{,}7 - \frac{220}{15}\right)^2\cdot 10 \simeq \cancel{110{,}3} = 1.217{,}4$$

$$\boxed{P = IV = \frac{V^2}{R} = I^2 R}$$

$$I_{tot} = I_2 + I_3$$