

TOPOGRAFIA

INFORMAZIONI GENERALI

L'insegnamento della Topografia è rivolto agli studenti dei Corsi di Laurea in TRT e Tecnologie Forestali ed Ambientali.

Il corso ha una durata complessiva di circa 60 ore suddivise in 40 ore settimanali dedicate alle lezioni teoriche e 20 alle esercitazioni pratiche di laboratorio.

Per facilitare lo studente nel lavoro di apprendimento di questa disciplina vengono fornite queste dispense redatte dai docenti: A. Vettore, G. Guarnieri, F. Pirotti.

Per approfondire alcuni argomenti sono inoltre consigliati i seguenti libri di testo:

-G. Bezoari, C. Monti, A. Selvini (1992) - Topografia e Cartografia - Hoepli - MI

-F. Sansò (1990) - Il Trattamento Statistico delle Misure - CLUP – MI

INTRODUZIONE AL CORSO

La topografia studia gli strumenti e i metodi operativi di calcolo e di disegno che servono per determinare la forma e le dimensioni di un oggetto.

Si tratta di una scienza applicata che potrebbe anche essere chiamata Geometria applicata.

La topografia trae le basi scientifiche:

- dalla geometria per la definizione delle operazioni
- dalla statistica matematica per l'uso critico dei risultati delle misure
- dalla fisica e dall'elettronica per i principi di funzionamento degli strumenti di misura
- dal calcolo numerico per la soluzione dei complessi problemi di calcolo con gli elaboratori elettronici.

L'oggetto più comune del rilievo topografico è la superficie fisica terrestre e su questo oggetto concentreremo l'attenzione durante questo corso.

Resta inteso che quanto verrà illustrato relativamente al rilevamento della superficie fisica terrestre può essere utilizzato, facendo opportuni adeguamenti, per il rilevamento di un qualsiasi altro oggetto (ad esempio grandi strutture quali dighe, ponti e gallerie oppure piccoli oggetti quali edifici, monumenti, reperti archeologici, ecc.)

L'ingegnere che opera sul territorio necessita di questo strumento di conoscenza della realtà geometrica in quanto rappresenta la figura professionale che più direttamente interagisce con il territorio sia modificando la morfologia naturale del terreno che inserendo le infrastrutture artificiali.

L'uso della topografia può essere distinto in due fasi:

- > *fase conoscitiva*: dalla conoscenza della morfologia del terreno sul quale andrà a operare, l'ingegnere ricava tutte le informazioni necessarie al progetto dell'intervento sia da un punto di vista tecnico sia da un punto di vista economico:
- > *fase interattiva*: progettato l'intervento l'ingegnere deve localizzarlo con precisione sul terreno.

E' chiaro che un errore in una sola di queste fasi implica il completo fallimento di tutto l'intervento. È per questo motivo che lo studio dei principi della topografia è obbligatorio per gli allievi dei corsi di Laurea in discipline tecniche.

Il corso che iniziarne vuole fornire gli elementi necessari per mettere in condizione il futuro ingegnere di organizzare e verificare le operazioni di rilievo e di tracciamento topografico. Per raggiungere questo scopo è necessario studiare:

- a) la forma della terra (**Geodesia**)
- b) la rappresentazione piana del terreno (**Cartografia**)
- e) metodi e strumenti per determinare la forma del terreno e per localizzarne punti caratteristici (**Teoria strumentale e metodologie di rilievo e tracciamento**)
- d) metodi statistici per stabilire il grado di affidabilità e gli errori attesi dalle operazioni topografiche (**Statistica**).

Eventuali approfondimenti su alcuni aspetti che verranno solo accennati durante il corso vengono forniti nei corsi di Cartografia Numerica e GIS e di Telerilevamento.

1.1. PROBLEMA DELLA RAPPRESENTAZIONE DEL TERRENO

La superficie fisica terrestre con i manufatti costruiti dall'uomo ha una forma molto irregolare e discontinua e quindi non definibile analiticamente in modo esatto.

In questo modo diventa praticamente impossibile stabilire la posizione relativa o assoluta di punti, calcolare aree o misurare distanze e angoli direttamente sulla superficie terrestre.

E' necessario sostituire la superficie fisica della terra con una superficie di riferimento che, pure approssimandola nel migliore dei modi, presenti le caratteristiche di regolarità, continuità e levigatezza tali da consentirne l'impiego nella trattazione matematica.

La superficie di riferimento ideale viene chiamata *geoide* ed è definita come la superficie che in ogni suo punto è normale alla direzione della verticale (= linea di forza del campo gravitazionale).

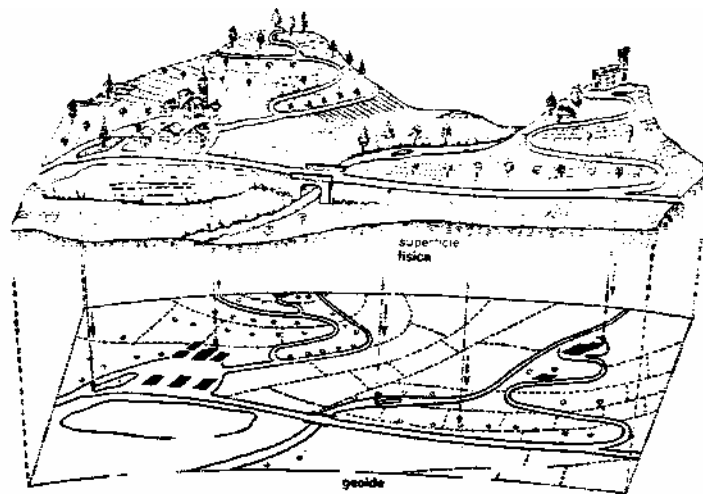


Fig. 1.1 - Superficie fisica terrestre e geoide

Su questa superficie di riferimento (geoide) i punti del terreno verranno proiettati secondo una regola precisa.

Ogni punto sarà dunque univocamente determinato da una coppia di coordinate curvilinee che ne definiranno la posizione sulla superficie di riferimento e dalla distanza tra il punto reale e la sua proiezione. La distanza tra superficie fisica terrestre e il geoide è chiamata *quota* ed è misurata lungo la verticale.

Con queste premesse si può delineare la seguente procedura di rilievo e di rappresentazione della superficie fisica terrestre:

- poiché il terreno ha una forma molto complessa, bisognerà descriverlo con un numero limitato ma sufficiente di punti (ad esempio un edificio rettangolare è individuato mediante i suoi quattro vertici);
- ogni punto fisico dovrà essere proiettato sul geoide lungo la verticale;
- la posizione relativa dei punti sul geoide sarà determinata attraverso la misura di angoli e distanze che dovranno a loro volta essere definiti in quanto il geoide è una superficie curva;
- la posizione dei punti proiettati sul geoide sarà definita mediante una coppia di coordinate curvilinee (u, v); a questo scopo è necessario conoscere l'equazione del geoide;

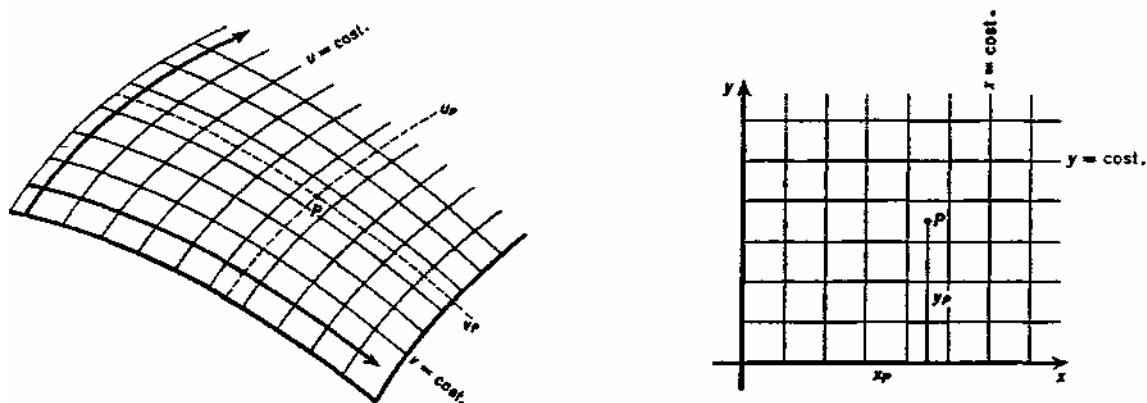


Fig. 1.2 - Coordinate cartografiche e coordinate curvilinee

- congiungendo opportunamente con linee i punti proiettati sul geode e indicando accanto la quota, si otterrà la descrizione completa del terreno;
- la rappresentazione così ottenuta sarà disegnata su un supporto curvo, mentre per gli usi pratici è più conveniente un supporto piano; a questo scopo si potrà stabilire una corrispondenza biunivoca tra le coordinate curvilinee (u, v) e una coppia di coordinate piane: $x = f_1(u, v)$ $y = f_2(u, v)$

Le operazioni di misura di angoli e distanze prima descritte, non sono realizzabili praticamente in quanto il geode è una superficie ideale. Le misure devono invece essere eseguite sulla superficie fisica terrestre.

Come vedremo in seguito i metodi di misura degli angoli e delle distanze che adotteremo saranno tali da fornire gli stessi valori quali si sarebbero ottenuti direttamente sul geode.

Per gli stessi motivi anche la misura diretta di una quota è impossibile, ma i metodi di misura a nostra disposizione permettono di ricavare i dislivelli ossia le differenze di quota tra punti della superficie fisica terrestre.

Le quote vengono definite allora collegando i punti mediante operazioni di livellazione che determinano i dislivelli: sarà sufficiente che tra tutti i punti collegati ne esista uno di quota nota per ricavare le quote di tutti gli altri.

Fatte queste considerazioni per ottenere il rilievo e la rappresentazione della superficie fisica terrestre occorre:

- definire l'equazione del geode
- definire il sistema di coordinate curvilinee u, v
- definire la natura degli angoli e delle distanze da misurare sul geode
- definire il modo per trasformare tali misure in coordinate curvilinee
- definire il modo per trasformare le coordinate curvilinee in coordinate piane.

1.2.1. LA FORMA DELLA TERRA

La superficie effettiva della terra può essere approssimata con diversi criteri e finalità da tre diverse superfici:

1. *superficie ellissoidica*: è una figura astratta, di comodo, introdotta unicamente come supporto matematico sul quale sviluppare analiticamente il rilievo della superficie effettiva. Essa non ha alcuna realtà fisica e non è pertanto accessibile in alcun modo all'osservazione;
2. *superficie dinamica teorica*: è una particolare superficie di livello del campo teorico della gravità terrestre e cioè del campo gravitazionale che si avrebbe nell'ipotesi che la terra fosse un corpo continuo, omogeneo e di densità uniforme, animato esclusivamente da un moto di rotazione attorno al suo asse polare, con velocità angolare costante. Per quanto ancora di natura ipotetica questa superficie è meno astratta della superficie ellissoidica in quanto è legata a entità che hanno una effettiva realtà fisica (il vettore g) e una assai prossima rispondenza al vero. Questa superficie è chiusa, liscia e priva di singolarità;
3. *superficie dinamica reale*: è una particolare superficie di livello del campo effettivo della gravità terrestre. Essa coincide con il pelo libero dei mari supposti in equilibrio e in assenza di azioni perturbatrici locali (onde, maree, salinità, temperatura, ecc.), mentre sotto i continenti può immaginarsi continuata in canali ideali privi di attrito, nei quali l'acqua marina fluisce fino all'equilibrio, in questo modo le curvature subiscono notevoli discontinuità in corrispondenza delle linee di costa. La superficie è liscia e la sua forma è complessivamente sferoidale ma presenta continue ondulazioni e gibbosità conseguenti alle variazioni locali di densità e di dislocazione delle masse materiali. Si eleva in corrispondenza dei continenti e si abbassa in corrispondenza dei mari pur restando la sua curvatura globale ovunque positiva. Questa superficie, cui Listing (1873) ha dato il nome di **geoide**, ha dunque una sia pure approssimata realtà fisica per buona parte della sua estensione e può essere materializzata in corrispondenza di un mareografo (strumento atto a fornire, attraverso un lungo periodo di osservazioni, il livello medio del mare in un determinato punto della costa).

Per appropriati valori dei parametri che definiscono queste superfici e la loro posizione relativa, gli scostamenti radiali sono assai piccoli (dell'ordine della decina di metri); per tale fatto è lecita, a determinati fini ed entro certi limiti, la sostituzione di una superficie all'altra e in particolare dell'ellissoide al geoide.

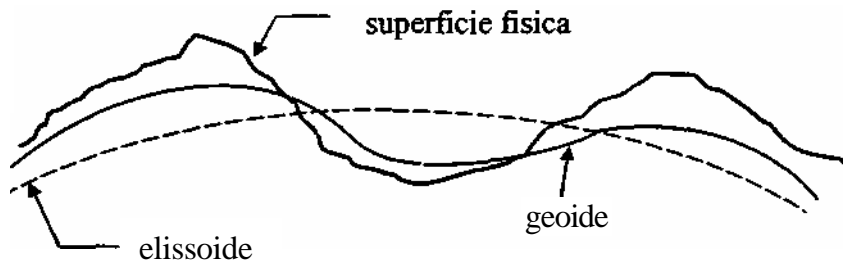


Fig. 1.3 – Superfici di approssimazione della terra

Il fatto che la terra abbia forma sferoidale e assai prossima a un ellissoide, può essere teoricamente giustificato nell'ipotesi di una primitiva fluidità della massa terrestre in rotazione che è andata progressivamente diminuendo con il raffreddamento senza che ne risultassero eccessivamente alterate le superfici di livello originarie.

Una massa fluida omogenea incompressibile, in quiete e isolata da ogni influenza esterna, le cui molecole siano soggette unicamente alla reciproca attrazione newtoniana assume come configurazione di equilibrio quella sferica (Liapounoff ha dimostrato che in queste ipotesi la sfera è l'unica configurazione di equilibrio possibile).

Attribuendo a tale sfera un moto di rotazione di velocità angolare costante, essa si deforma in un ellissoide di rotazione con semiasse minore coincidente con l'asse di rotazione a causa della forza centrifuga. Questo ellissoide resta in equilibrio relativo se la velocità angolare ω è contenuta entro certi limiti. Mac Laurin ha dimostrato che ciò è possibile se:

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} \leq 0,2247 \quad \text{dove } G \text{ è la costante di attrazione universale e } \rho \text{ la densità della massa ruotante.} \quad (1)$$

Se ω supera tale valore non si hanno più figure di equilibrio sferoidiche, ma solo anulari come nel caso del pianeta Saturno.

Quanto sopra detto è applicabile soltanto in via approssimata al problema della configurazione della terra, in quanto:

- > la massa terrestre non è, e non è mai stata, un fluido ideale omogeneo;
- > le molecole della massa terrestre non sono solo soggette alla forza di attrazione gravitazionale e alla forza centrifuga, ma anche alla attrazione newtoniana dei vari corpi celesti esterni alla terra e alle forze originate dai numerosi moti da cui la terra è animata¹. Per contro l'entità di queste forze nei confronti delle prime due è assai limitata e trascurarle non altera significativamente i risultati prima riportati.

¹ Questi moti sono: rivoluzione intorno al Sole, precessione degli equinozi, spostamento della linea degli apsidi, migrazione dei poli terrestri, traslazione del sistema solare entro la Galassia, traslazione della Galassia, moto del sistema terra - Luna intorno al suo baricentro, variazione secolare dell'obliquità dell'asse terrestre, variazione secolare di eccentricità dell'orbita, perturbazioni planetarie, spostamento del baricentro del sistema solare nella Galassia, rotazione della Galassia. Inoltre sono ancora da considerare le maree marine e della crosta conseguenti all'attrazione del Sole e della Luna.

1.3. DEFINIZIONE DELLA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO

Abbiamo già detto che il geoide è una superficie normale in ogni punto alla direzione della verticale. La verticale è la direzione della forza di gravità, definita in direzione e modulo in ogni punto collegato alla terra. La gravità costituisce un campo di forza che ha la caratteristica di essere conservativo e quindi di ammettere un potenziale.

Nel campo della gravità si possono individuare le linee di forza (= linee tangenti in ogni punto alla direzione della gravità). Queste linee sono curve gobbe (= non appartenenti a un piano) e prendono il nome di *verticali*. Quindi la direzione della gravità in un punto è tangente alla linea verticale che vi passa.

Il luogo dei punti aventi lo stesso valore del potenziale costituisce una superficie equipotenziale; le superfici equipotenziali del campo della gravità sono infinite e sono normali alle linee di forza del campo.

Se le superfici equipotenziali sono dotate di simmetria di rotazione attorno all'asse polare, le linee di forza sono curve piane contenute nei piani meridiani. Nello spazio esterno esse volgono in ogni punto la concavità verso l'asse polare e il loro raggio di curvatura vale circa

$$R = \frac{r}{0.0053 \cdot \sin 2\varphi} \quad (2)$$

dove: φ è la latitudine del punto considerato
 r è la distanza di tale punto dall'asse di rotazione

Il non parallelismo delle superfici equipotenziali porta notevoli complicazioni nella definizione della quota e del dislivello: vedremo in seguito che si ovvierà a tali difficoltà introducendo il concetto di quota dinamica.

Il geoide è una superficie equipotenziale della gravità che passa per un determinato punto cui viene attribuita quota nulla. Questo punto è definito in modo assoluto da un mareografo.

Riferiamo il corpo terrestre ad un sistema di coordinate cartesiane [O,XYZ] avente l'origine nel baricentro della terra, l'asse Z coincidente con l'asse di rotazione e gli assi X e Y coincidenti con gli assi principali di inerzia (*sistema geocentrico*).

Il vettore gravità g in un generico punto P è una funzione della posizione del punto:

$$g = g(X,Y,Z) \quad (4)$$

Come abbiamo visto, si può considerare composto da due forze:

> la forza F di attrazione newtoniana che è la risultante di tutte le forze elementari che ogni elemento di massa della terra esercita sull'unità di massa posta in P

>

> la forza centrifuga e sull'unità di massa dovuta alla rotazione della terra intorno all'asse polare Z, rotazione che avviene con velocità angolare $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5}$ rad/s.

Il vettore \mathbf{r} ha modulo $\sqrt{X^2 + Y^2}$ ed è diretto secondo la normale all'asse Z passante per P e orientato verso l'esterno della terra.

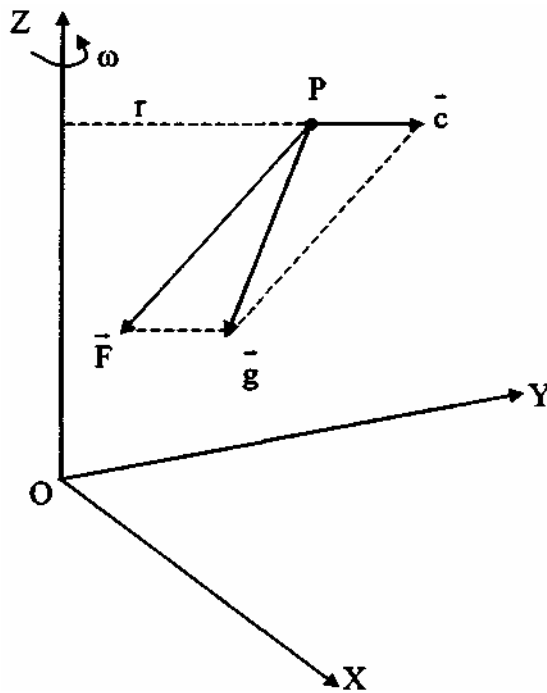


Fig. 1.5 - Forza centrifuga, newtoniana e di gravità

Il potenziale W in un punto P è una funzione della posizione del punto stesso:

$$W = W(X, Y, Z)$$

Come noto

$$\vec{g} = \text{grad } W$$

e quindi:

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \vec{g}_x \quad \frac{\partial W}{\partial Y} = \vec{g}_y \quad \frac{\partial W}{\partial Z} = \vec{g}_z$$

Se indichiamo con dP uno spostamento infinitesimo del punto P , vale la relazione:

$$dW = \vec{g} \cdot dP$$

ossia **la derivata del potenziale secondo una direzione dP fornisce la componente del vettore gravità in quella direzione.**

Se dP è tangente alla superficie equipotenziale passante per P , risulta:

$$dW = \vec{g} \cdot dP = 0$$

da cui si deduce **l'ortogonalità di \vec{g} rispetto alla superficie equipotenziale** generica.

Sia W che le sue derivate prime, sono funzioni continue e prive di singolarità per cui le superfici equipotenziali sono lisce e prive di spigoli o punti singolari.

In ogni loro punto esiste dunque una sola normale superficiale univocamente definita e variabile con continuità.

La distanza di due superfici di livello assai prossime $W = C$ e $W' = C + \Delta W$ vale:

$$-\Delta h = \frac{\Delta W}{g} \quad (9)$$

dove la quota h è assunta crescente verso l'esterno. Se g e g' sono i valori della gravità in due punti P e P' sulla superficie equipotenziale $W = C$ risulta:

$$\vec{g} \Delta h = \vec{g}' \Delta h' = \text{cost.} \quad (10)$$

e quindi poiché g e g' non sono mai uguali, risulta che **le superfici equipotenziali non sono geometricamente parallele** ma sono ravvicinate dove la gravità è più forte.

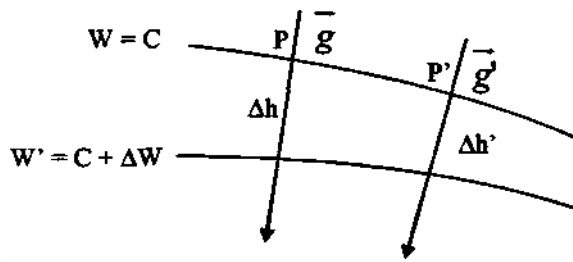


Fig. 1.6 - Superfici equipotenziali

Il potenziale W è una quantità scalare ed è pari alla somma dei potenziali della forza di attrazione universale F e della forza centrifuga c .

Per ricavare il potenziale della forza centrifuga e ricordiamo quanto già detto è cioè che la derivata del potenziale secondo una direzione fornirà la componente della forza in quella direzione:

$$\frac{dv}{dr} = \bar{c} = \omega^2 r$$

Il potenziale delle forza centrifuga e sarà quindi:

$$v(X, Y) = \int \omega^2 r dr = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2)$$

Più complessa è la determinazione del potenziale della forza di attrazione universale. Consideriamo un elemento infinitesimo di massa dm posto in un punto $Q(a, b, c)$. Se $d(a, b, c)$ è la densità della terra in tale punto, si ha:

$$dm = \delta(a, b, c) \cdot da \cdot db \cdot dc$$

Questo elemento infinitesimo di massa d_m provoca sulla massa unitaria posta in $P(X, Y, Z)$ una forza di attrazione il cui modulo vale:

$$dF = G \cdot \frac{dm \cdot 1}{(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2} = G \cdot \frac{dm}{l^2}$$

Dove $G =$ costante gravitazionale $= 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg s}^2$

dF è diretta da P verso Q

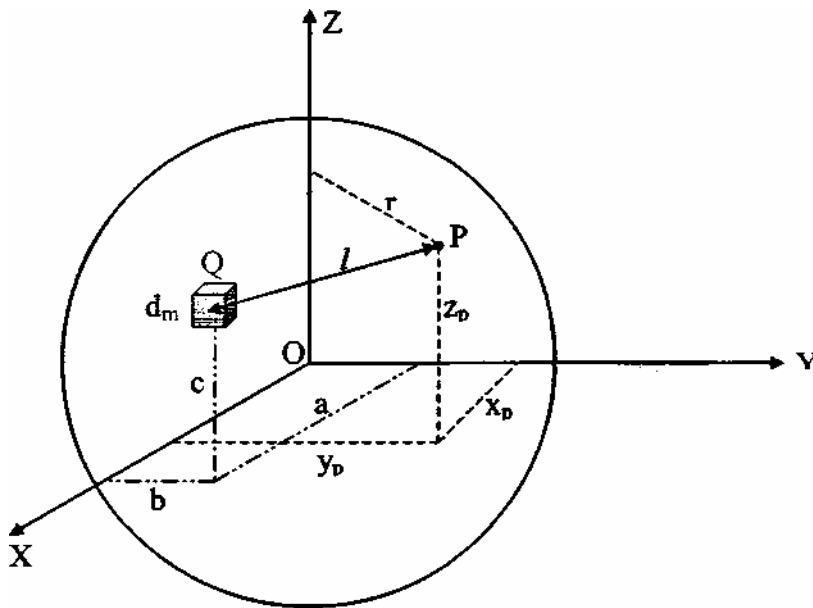


Fig. 1.7 - Definizione del campo gravitazionale

Ricordando la relazione esistente tra potenziale e forza:

$$\frac{\partial dV}{\partial l} = dF \text{ da cui il potenziale } dV, \text{ dovuto alla massa } dm \text{ vale: } dV = \int dF dl = \int \frac{Gdm}{l^2} dl = \frac{Gdm}{l} \quad (14)$$

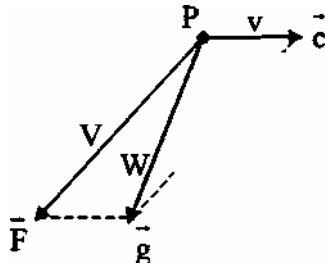
e quindi il potenziale dovuto a tutta la massa della terra:

$$V(X, Y, Z) = G \cdot \iiint \frac{dm}{l}$$

dove, ovviamente, l'integrale è esteso a tutto il volume della terra.

Dopo aver definito:

la forza centrifuga e il relativo potenziale	$\vec{c} = \omega^2 r$	$v = \frac{1}{2} \omega^2 r^2$
la forza gravitazionale e il relativo potenziale	$\vec{F} = G \iiint \frac{dm}{l^2}$	$V = G \cdot \iiint \frac{dm}{l}$
la forza di gravità e il relativo potenziale	\vec{g}	W



Il potenziale W risulta dalla somma del potenziale V relativo alla forza di attrazione gravitazionale e del potenziale v relativo alla forza centrifuga (i potenziali possono essere sommati perché sono funzioni scalari).

Se poniamo $W = \text{cost.}$
$$V(X,Y,Z) + v(X,Y) = \text{cost.} \quad (15)$$

definiamo l'equazione di una famiglia di superfici equipotenziali.

Le superfici equipotenziali del campo della gravità sono infinite in funzione degli infiniti valori che il potenziale può assumere.

La superficie equipotenziale del campo gravitazionale che passa per il punto di quota zero, definito dal livello medio del mare, si chiama GEOIDE:

$$W = V(X,Y,Z) + v(X,Y) = W_0$$

Per determinare il primo termine di tale equazione occorrerebbe conoscere la funzione $\rho(a,b,c)$, ovvero come varia la densità in ogni punto della terra. Purtroppo questo non è possibile; le indagini fatte forniscono dati abbastanza attendibili sulla variazione della densità dalla superficie al nucleo, ma sono comunque insufficienti per la dettagliata conoscenza del fenomeno richiesta dall'operazione di integrazione.

Risulta quindi impossibile determinare rigorosamente l'equazione del geoide.

Dobbiamo trovare un'espressione approssimata del potenziale $V(X,Y,Z)$.

L'integrale per il calcolo del potenziale della forza di attrazione universale, viene determinato mediante uno sviluppo in serie di funzioni sferiche dopo aver sostituito le coordinate geocentriche con le coordinate polari a, θ, ϕ .

Dopo aver sostituito le coordinate geocentriche con le coordinate polari σ, ψ, λ .

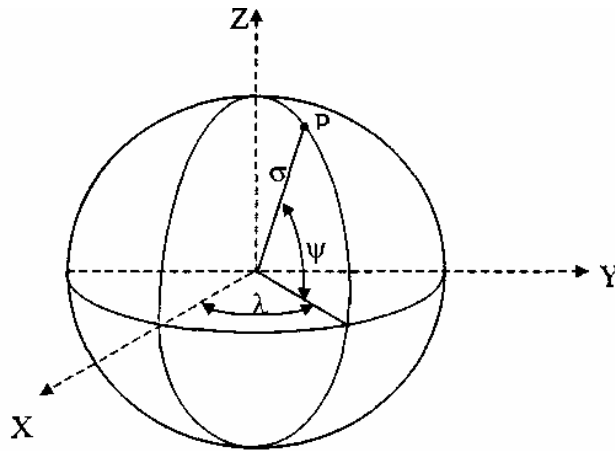


Fig. 1.8 - Sistemi di riferimento geocentrico e polare

$$\begin{aligned} X &= \sigma \cos \psi \cos \lambda \\ Y &= \sigma \cos \psi \sin \lambda \\ Z &= \sigma \sin \psi \end{aligned} \quad (16)$$

La superficie così definita è una superficie di rotazione e rappresenta lo sferoide.

Poiché il nostro intento è quello di definire una superficie di riferimento per i rilievi di forma e di dimensione della terra, occorre eliminare le costanti meccaniche sostituendole con dei parametri geometrici.

Lo sferoide è una superficie di rotazione e quindi gli unici parametri geometrici utilizzabili sono il semiasse equatoriale a e il semiasse polare c .

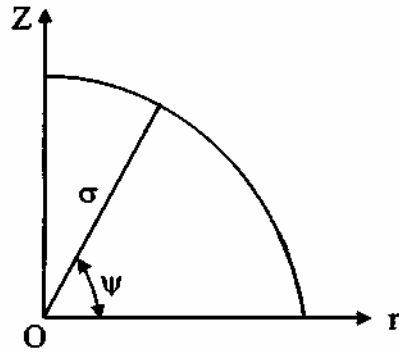
L'equazione dello **sferoide in coordinate polari** risulta dunque:

$$\sigma = a \cdot (1 - \alpha \cdot \sin^2 \psi)$$

dove α è un coefficiente denominato *schacciamento* e definito dalla relazione: (19)

$$\alpha = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$$

Nel sistema geocentrico lo sferoide ha equazione (vedi formula 19):



$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2} = a \cdot \left(1 - \alpha \cdot \frac{Z^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2)} \right)$$

Consideriamo ora un ellissoide di rotazione avente gli stessi semiassi a e c dello sferoide; esso sarà definito nel sistema geocentrico dalla seguente equazione:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

Dalla (20) risulta che $c = a(1-\alpha)$ per cui abbiamo:

$$c^2 = a^2(1-\alpha)^2 = a^2(1 + \alpha^2 - 2\alpha)$$

Lo schiacciamento α vale circa $1/300$ e quindi trascurando il termine in α^2 , pari a circa $1/90.000 = 1 \times 10^{-5}$, si commetterà un errore nella determinazione del semiasse minore e di circa 35 m (errore del tutto accettabile):

$$c^2 = a^2(1-\alpha)^2 = a^2(1 + \alpha^2 - 2\alpha) \quad \text{da cui} \quad c = 6.357.126,7 \text{ m}$$

$$c^2 = a^2(1-\alpha)^2 = a^2(1 - 2\alpha) \quad \text{da cui} \quad c = 6.357.091,1 \text{ m}$$

E quindi dopo questa approssimazione:

$$c^2 = a^2(1 - 2\alpha)$$

Con tale approssimazione l'equazione dell'ellissoide diviene:

$$X^2 + Y^2 + Z^2(1 - 2\alpha)^{-1} = a^2$$

La geometria ellissoidica, seppur complessa, è più semplice della geometria sferoidica. Inoltre come abbiamo visto, molti studi sperimentali hanno indicato nell'ellissoide di rotazione una superficie idonea a rappresentare la forma della terra, per cui si è convenuto internazionalmente di adottare l'ellissoide di rotazione come superficie di riferimento pratica per i rilievi della superficie fisica terrestre.

Il compito dei geodeti è quello di determinare i semiassi maggiore e minore a e c ovvero a e \mathfrak{a} . I metodi si basano su misure geometriche (misure di archi di meridiano e di parallelo), su misure di gravità e di tracciamento di orbite di satelliti artificiali.

Nel corso degli anni i molti geodeti che hanno lavorato su tale problema, hanno determinato valori diversi di a e α .

Ricordiamo i principali:

BESSEL(1841)	$a = 6.377.397$ m	$\alpha=1/299,2$
CLARKE(1880)	$a = 6.378.243$ m	$\alpha=1/293,5$
HAYFORD (1909)	$a = 6.378388$ m	$\alpha=1/297,0$
WGS84(1984)	$a = 6.378.137$ m	$\alpha=1/298,257223563$

L'Unione Geodetica e Geofisica Internazionale nel 1924 ha adottato l'ellissoide di Hayford come ellissoide internazionale e, attualmente, è utilizzato pressoché universalmente in tutte le cartografie ufficiali.

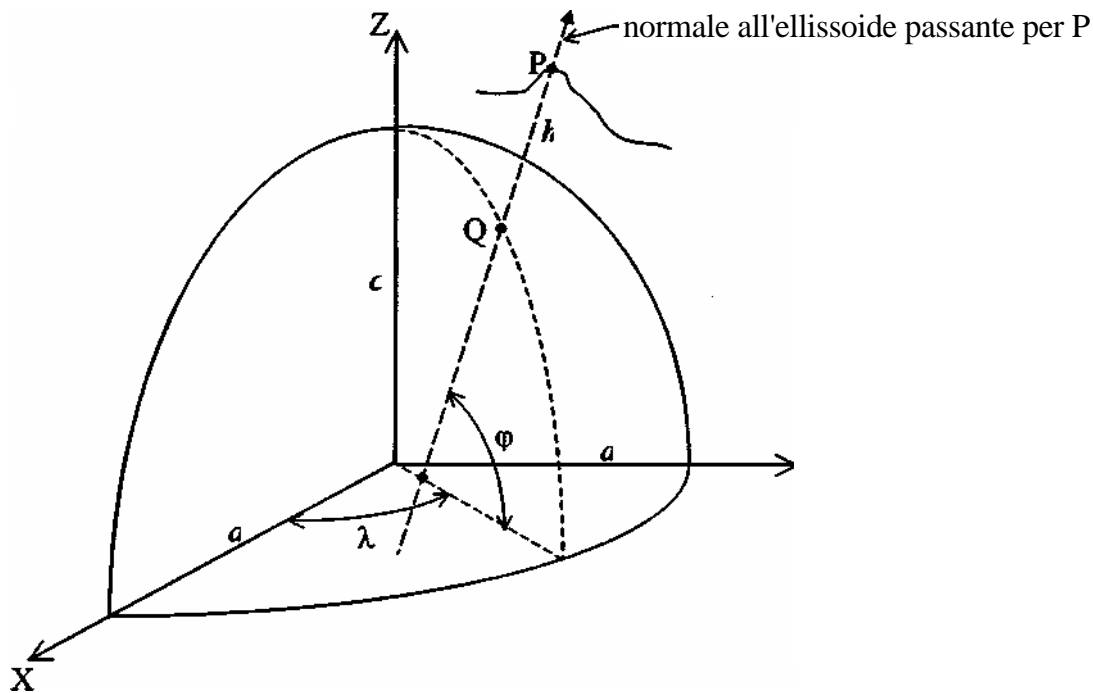


Fig. 1.9 — Ellissoide di rotazione

$a =$	semiasse maggiore
$c =$	semiasse minore
$\lambda =$	longitudine ellissoidica
$\varphi =$	latitudine ellissoidica
$h =$	altezza ellissoidica
$P(X,Y,Z) =$	coordinate geocentriche rettangolari
$P(\varphi,\lambda,h) =$	coordinate geografiche

Per quanto detto prima, esistono due superfici di riferimento che meglio approssimano la superficie terrestre: il GEOIDE e l'ELLISSOIDE.

In un punto P della superficie terrestre si potranno quindi definire due normali alle due superfici di riferimento: normale al geode (o verticale) e la normale all'ellissoide.

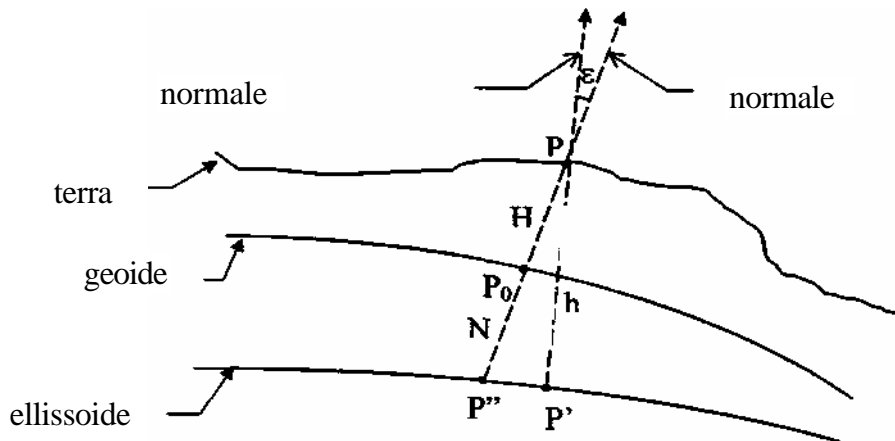


Fig. 1.10 — superficie terrestre e superfici di riferimento

Possiamo scrivere la relazione: $h = H + N$ (29)

Definiamo inoltre (vedi fig. 1.10):

- $PP' = h$ altezza ellissoidica del punto P
- $PP_0 = H$ altezza ortometrica o **quota** del punto P
- $P_0P'' = N$ ondulazione del geode. In Italia varia da + 37 m in Calabria a + 52 m in Val D'Aosta
- e** **deviazione della verticale.** E' un valore piccolo (poche decine di secondi sessagesimali) e varia da zona a zona.

1.3.1. COORDINATE GEOGRAFICHE, LATITUDINE RIDOTTA E GEOCENTRICA

Considerando un ellissoide di rotazione di parametri a e e noti, restano definite le seguenti quantità numeriche:

Schiacciamento: $\mathbf{a} = \frac{a - c}{a}$

Prima eccentricità: $e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$

Seconda eccentricità: $e'^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$

La generatrice, e di conseguenza ogni meridiano, è un ellisse di semiassi a e c detta *ellisse meridiana*.

Consideriamo un punto generico M appartenente all'ellissoide (vedi fig. 9) e la normale superficiale ad esso relativa N : questa incontra l'asse polare di rotazione in C_j che rappresenta il centro di curvatura della ellisse meridiana in M .

L'angolo acuto che N forma con il piano equatoriale $[XY]$ con segno concorde all'asse delle Z , prende il nome di *latitudine* φ del punto M .

L'angolo diedro che il semipiano meridiano per M forma con un semipiano meridiano origine (ad esempio il semipiano $Y=0$ con $X>0$) contato in un senso positivo assegnato, prende il nome di *longitudine* λ di M .

Le linee di uguale latitudine sono chiamate *paralleli*, quelle di uguale longitudine *meridiani*.

I parametri φ , λ , ogni coppia dei quali individua univocamente il punto M e la direzione N , costituiscono un sistema di coordinate curvilinee superficiali che prendono il nome di coordinate geografiche ellissoidiche.

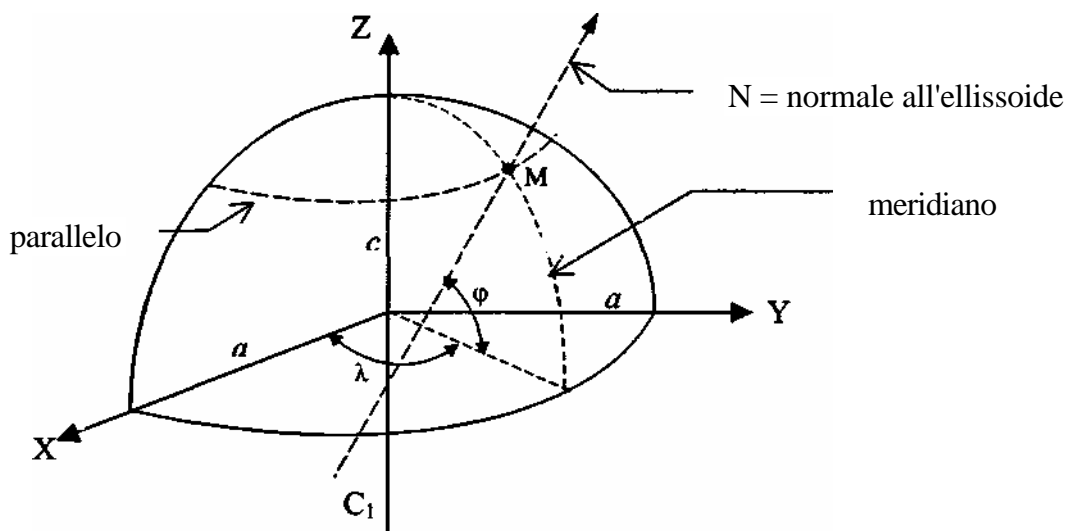


Fig. 1.11 - coordinate geografiche sull'ellissoide

Consideriamo ora la sezione meridiana dell'ellissoide che contiene il punto M e tracciamo l'arco di circonferenza di raggio $R = a$ avente il centro coincidente con l'origine del sistema geocentrico. A partire da M si innalzi una parallela all'asse Z e si definisca l'intersezione K tra questa retta e l'arco di circonferenza tracciato.

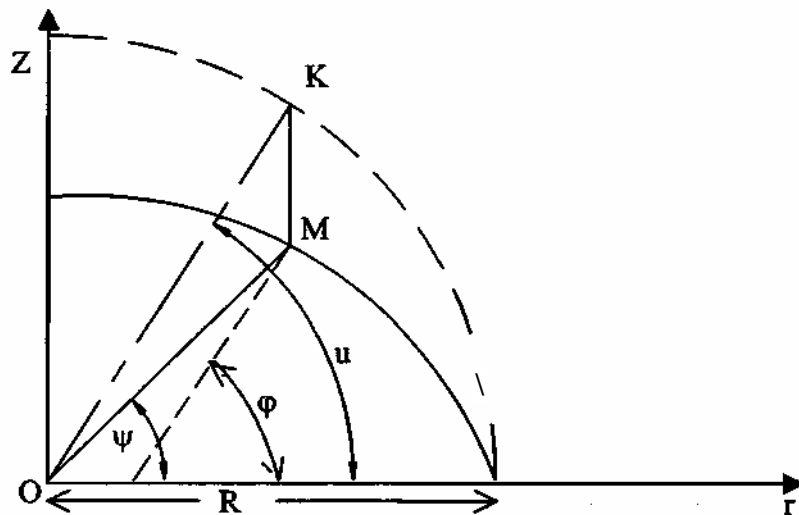


Fig. 1.12 - Latitudine ridotta e latitudine geocentrica

Si definisce *latitudine ridotta* u l'angolo compreso tra il segmento OK e l'asse r , mentre si definisce *latitudine geocentrica* gl'angolo compreso tra il segmento OM e l'asse r .

Tra le latitudini così definite (eccezione fatta per i poli e l'equatore) sussistono le seguenti relazioni:

$$\psi < u < \phi$$

1.3.2. EQUAZIONI PARAMETRICHE DELL'ELLISSOIDE

le equazioni parametriche dell'ellissoide sono:

$$\begin{cases} X = \frac{a \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda}{W} \\ Y = \frac{a \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda}{W} \\ Z = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi}{W} \end{cases} \quad \text{dove } W = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

Per un punto posto ad altezza ellissoidica h , queste diventano (vedi Fig. 1.14):

$$\begin{cases} X = \left(\frac{a}{W} + h \right) \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ Y = \left(\frac{a}{W} + h \right) \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ Z = \left[\frac{a}{W} (1 - e^2) + h \right] \sin \varphi \end{cases} \quad (35)$$

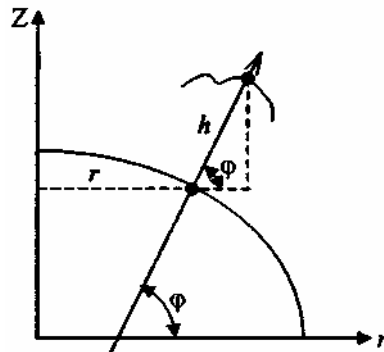


Fig. 1.14 - equazioni parametriche che tengono conto della quota ellissoidica h

Il passaggio inverso (da coordinate cartesiane geocentriche a geografiche), è più complesso in quanto non sono direttamente esplicitabili le relazioni di \mathbf{f} e di h .

Il passaggio avviene in forma iterativa (ma sono possibili anche altre soluzioni).

Il valore di \mathbf{l} è immediatamente deducibile dalle prime due equazioni delle 35:

$$\mathbf{l} = \arctg Y/X$$

dalle stesse, il raggio del parallelo risulta:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + H) \cos j$$

dividendo la terza delle 35 per il valore di r si ottiene:

$$\frac{Z}{r} = \frac{[N(1-e+h)]\text{sen } \varphi}{(N+h)\text{cos } \varphi} = \frac{(N+h)-e^2N}{N+h} \tan \varphi = \left(1 - \frac{e^2N}{N+h}\right) \tan \varphi$$

trascurando in prima approssimazione il valore piccolo $\left(1 - \frac{e^2N}{N+h}\right)$

si ottiene: $\varphi = \text{arctg} \frac{Z}{r}$

da cui il calcolo approssimato del raggio di curvatura:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \text{sen}^2 \varphi}}$$

dalla prima delle 35 si può ricavare un valore approssimato di

$$h = \frac{X}{\text{cos } \varphi \text{ cos } \lambda} - N$$

che inserito nella formula rigorosa di φ :

$$\varphi = \text{arctg} \frac{Z}{r \left(1 - \frac{e^2N}{N+h}\right)}$$

Il nuovo valore così ottenuto permette un ricalcolo iterativo di N, h e nuovamente \mathbf{f} . Le iterazioni terminano quando, posto un intervallo di convergenza s, accade che:

$$|\varphi_n - \varphi_{n-1}| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |h_n - h_{n-1}| < \varepsilon_h$$

Sono sufficienti poche iterazioni per ottenere valori stabili sia di \mathbf{f} che di h.

1.3.3. RAGGI DI CURVATURA DELL'ELLISSOIDE. SEZIONI NORMALI.

Consideriamo un punto P giacente su una sfera e la normale alla sfera passante per lo stesso punto P; tutti i piani che contengono la normale, ossia il fascio di piani aventi per costola la normale, intersecheranno la sfera secondo delle circonferenze di raggio R.

Quando invece il punto P giace su di un ellissoide il raggio di curvatura in P delle analoghe sezioni non sarà più unico e pari ad R e non sarà così immediato calcolarlo.

Distinguiamo subito tra *sezioni normali* e *sezioni oblique*.

Consideriamo un punto P giacente sull'ellissoide e la sua normale; tutti i piani che contengono la normale, ossia il fascio di piani aventi per costola la normale, intersecheranno l'ellissoide secondo delle linee piane chiamate *sezioni normali* (vedi Fig. 1.15).

Tutte le altre intersezioni tra l'ellissoide e un fascio di piani che non contiene la normale saranno chiamate *sezioni oblique*.

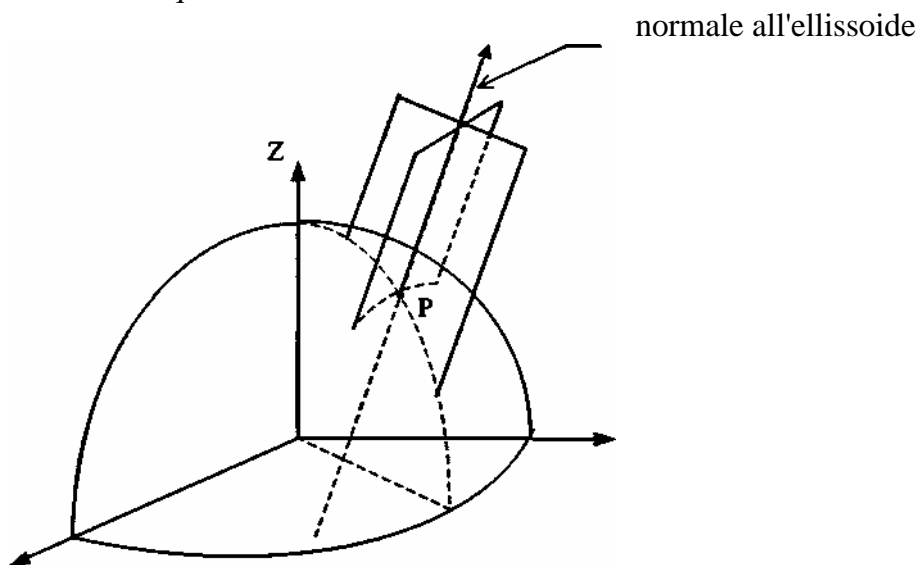


Fig. 1.15 - sezioni normali

Le sezioni normali avranno nel punto P raggi di curvatura diversi in funzione dell'angolo che la sezione normale generica forma con il piano che definisce la sezione normale "meridiano".

I raggi di curvatura delle sezioni normali varieranno con continuità da un valore minimo (r) ad un valore massimo (N).

Le sezioni normali che hanno rispettivamente il minimo e il massimo raggio di curvatura sono dette *sezioni normali principali* e i loro raggi di curvatura *raggi principali di curvatura*. Le sezioni normali principali sono tra loro ortogonali.

In particolare nelle superfici di rotazione, come è il caso dell'ellissoide terrestre, una sezione normale principale coincide sempre con il meridiano passante per il punto P e l'altra è perpendicolare al meridiano, corrisponde cioè al piano che contiene la tangente al parallelo passante sempre per P.

Il raggio di curvatura R_α di una sezione normale generica che forma un angolo α (vedi Fig. 1.16), chiamato azimut, con il meridiano, in funzione del raggio di curvatura minimo r e massimo N è dato dal **teorema di EULERO** che dice:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{r} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

(36)

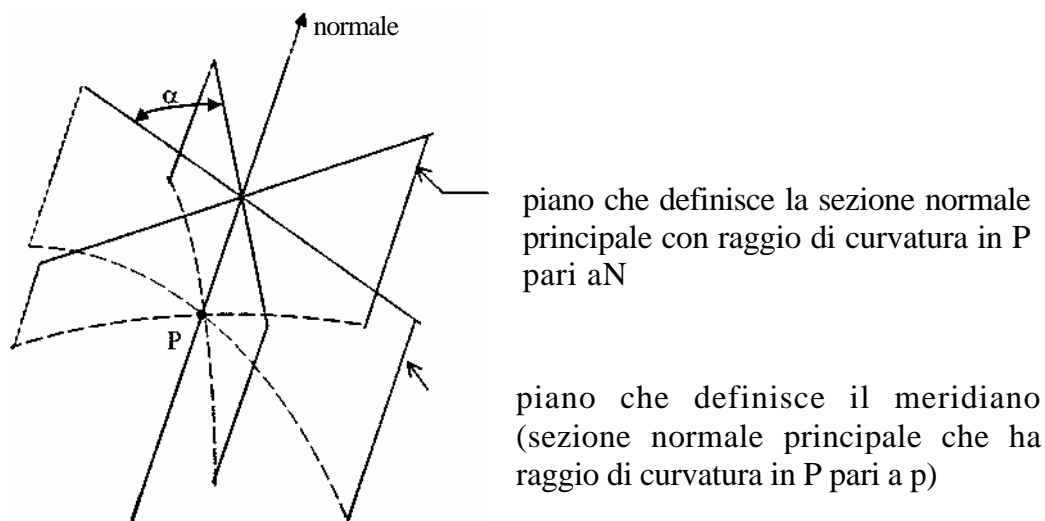


Fig. 1.16 - raggi di curvatura in P

Passiamo ora alla determinazione delle espressioni dei raggi principali di curvatura nel caso che la superficie considerata sia l'ellissoide di rotazione che abbiamo assunto come superficie di riferimento.

In questo caso, i meridiani sono ellissi tutte uguali tra loro con equazione $\frac{r^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2}$

Ricordando che in una curva piana il raggio di curvatura è il limite del rapporto tra un elemento di arco ds e l'angolo compreso fra le normali alla superficie condotte per gli estremi di tale elemento (vedi Fig. 1.17) e ricordando inoltre che tale angolo è pari alla differenza di latitudine dei due estremi in quanto punti avente uguale longitudine, otteniamo:

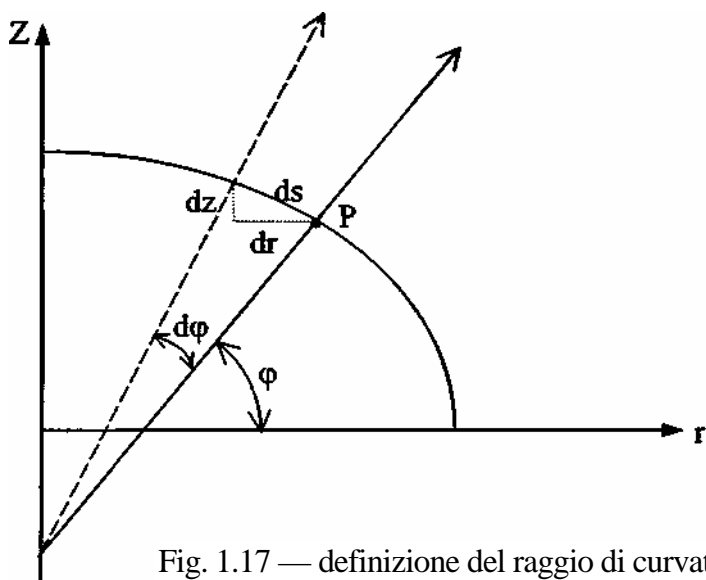


Fig. 1.17 — definizione del raggio di curvatura p

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{dr^2 + dZ^2}}{d\varphi}$$

Derivando le (32) e (33) rispetto a φ e ponendo $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = W$ si ottiene:

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}$$

Per trovare il valore del raggio di curvatura massimo N , applichiamo il teorema di Meusnier che dice: *il raggio di curvatura in un punto P di una sezione obliqua (r) è uguale al raggio di curvatura della sezione normale (N) corrispondente al piano che contiene la tangente in P alla sezione obliqua moltiplicato per il coseno dell'angolo formato dai piani delle due sezioni, (vedi Fig. 1.18)*

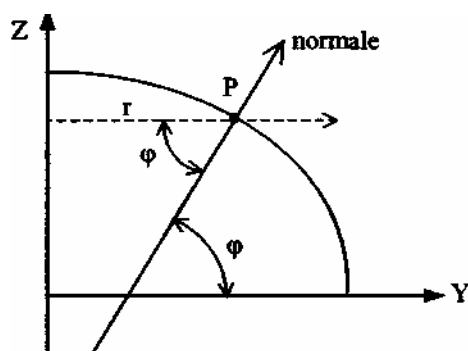


Fig. 1.18 teorema di Meusnier

Nel nostro caso pensiamo al parallelo passante per P come una sezione obliqua (sezione che non contiene la normale) e che avrà raggio di curvatura pari a r espresso dalla (32) (nell'ellissoide di rotazione i paralleli sono delle circonferenze).

Definiamo la tangente al parallelo nel punto P e consideriamo il fascio di piani che avrà per direttrice la tangente appena definita. Tra gli infiniti piani del fascio si troverà anche il piano che conterrà la normale alla superficie; questo piano definisce anche una delle due sezioni normali principali passanti per P e precisamente quella avente il raggio massimo pari a N .

Per il teorema di Meusnier, dunque si può scrivere:

$$r = N \cos\varphi$$

1.4. MISURA DI ANGOLI E DISTANZE SULLA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO

Seguendo il procedimento logico di rilievo descritto nel paragrafo 1.1, una volta definita la superficie di riferimento e proiettati i punti da rilevare, occorre misurare gli angoli e le distanze in modo da determinarne la posizione relativa.

E' necessario dunque immaginare che i punti siano congiunti da **linee appartenenti alla superficie di riferimento** e che la lunghezza della linea compresa fra due punti rappresenti la distanza misurabile tra questi.

Analogamente se si considerano due di tali linee uscenti da un punto P, si dovrà definire come angolo fra di queste, l'angolo che le tangenti alle linee nel punto P formano tra di loro. Se la linea che congiunge due punti deve rappresentare la distanza, valutata naturalmente sulla superficie, si dovrà scegliere quella linea che, fra tutte le possibili, abbia la minore lunghezza.

Questo particolare tipo di linea è chiamata *geodetica*.

La geodetica viene definita analiticamente come quella *linea della superficie di riferimento che gode della proprietà di avere la normale in ogni punto coincidente con la normale alla superficie*.

Ad esempio le geodetiche di una sfera sono archi di cerchio massimo, mentre le geodetiche del piano sono dei segmenti di retta (qualsiasi altra curva del piano ha la normale giacente sul piano stesso).

Nel caso del piano o della sfera, diventa naturale considerare, per quanto riguarda le misure, per le distanze, segmenti di retta o lunghezze di archi di cerchio massimo e per gli angoli, angoli fra rette o angoli fra tangenti a cerchi massimi. Per i calcoli bisognerà utilizzare rispettivamente la trigonometria piana o quella sferica.

Nel caso di superfici più complesse si può dimostrare che se due punti non sono molto distanti, la geodetica che li congiunge è unica e rappresenta anche il percorso di minima lunghezza.

Le geodetiche dell'ellissoide sono curve gobbe (non giacenti su di un piano).

Questo fatto non comporta problemi da un punto di vista teorico. Presenta invece notevoli difficoltà da un punto di vista pratico di misura in quanto risulta molto difficile la loro materializzazione e anche per quanto riguarda i calcoli si ha la complessità dell'uso delle formule della trigonometria ellissoidica.

1.4.1. EQUAZIONI DELLE GEODETICHE

Traducendo in formule la definizione data nel paragrafo precedente si possono ricavare le equazioni differenziali delle geodetiche.

In generale, data una superficie generica:

$$\phi(X, Y, Z) = 0$$

i coseni direttori della normale alla superficie valgono:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad \frac{1}{N} \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad \frac{1}{N} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \quad \text{dove} \quad N = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z}\right)^2}$$

Consideriamo ora una linea appartenente a tale superficie le cui equazioni parametriche siano:

$$\begin{cases} X = X(s) \\ Y = Y(s) \\ Z = Z(s) \end{cases}$$

i coseni direttori della normale di tale linea valgono:

$$\frac{1}{K} \frac{d^2 X}{ds^2} \quad \frac{1}{K} \frac{d^2 Y}{ds^2} \quad \frac{1}{K} \frac{d^2 Z}{ds^2}$$

Per imporre che tale linea sia la geodetica della superficie scelta le due normali ora definite devono coincidere, per cui si dovranno verificare le seguenti relazioni:

$$\frac{\frac{\partial \phi}{\partial X}}{\frac{d^2 X}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial Y}}{\frac{d^2 Y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial Z}}{\frac{d^2 Z}{ds^2}} \quad (41)$$

1.4.2. SVILUPPI DI PUISEUX-WEINGARTEN

Notevole importanza in geodesia, rivestono gli sviluppi di Puiseux - Weingarten i quali consentono di determinare le coordinate X, Y, Z di un punto P appartenente ad una geodetica, in un riferimento euleriano [O,XYZ] la cui origine appartiene alla geodetica considerata, in funzione dell'arco di geodetica s che unisce O e P e dell'azimut α di tale geodetica nel punto O.

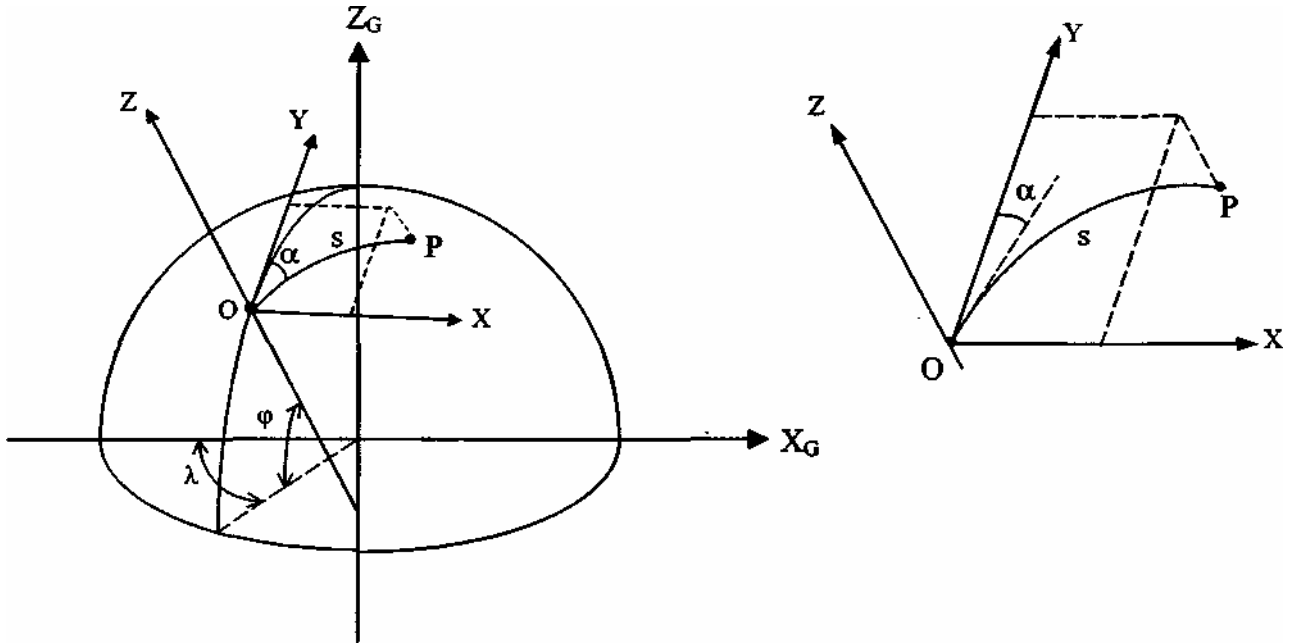


Fig. 1.20 - Tema euleriana

Nel riferimento euleriano l'asse delle Z coincide con la normale all'ellissoide in O, l'asse delle Y coincide con la tangente al meridiano in O ed è diretto verso Nord mentre l'asse delle X coincide con la tangente al parallelo in O ed è diretto verso Est.

Gli sviluppi di Puiseux-Weingarten servono a facilitare lo studio delle proprietà di curvatura della geodetica e in definitiva a caratterizzare il grado di approssimazione raggiungibile, in relazione alla distanza, nella soluzione dei più importanti problemi di Geodesia operativa.

A meno di termini di quarto ordine sono:

$$\begin{cases} X = s \sin \alpha \left[1 - \frac{s^2}{6\rho N} \left(1 - \frac{e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) \right] \\ Y = s \cos \alpha \left[1 - \frac{s^2}{6\rho N} \left(1 + \frac{e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1 - e^2} \right) \right] \\ Z = -s \left(\frac{s}{2R_a} + \frac{s^3}{6R_a^2} \frac{3e^2 \sin^2 \varphi \cos \alpha}{1 - e^2 \sin^2 \varphi - e^2 \sin^2 \alpha} \right) \end{cases} \quad (46)$$

← Si trascura perché è quantità 4° ordine più piccola

Queste relazioni rappresentano la forma utilizzata degli sviluppi di Puiseux-Weingarten.

1.4.3. MISURE ESEGUITE SULLA SUPERFICIE FISICA TERRESTRE E MISURE

SULLA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO.

La geometria sulla superficie di riferimento (ellissoide) si può costruire considerando figure geometriche i cui lati siano archi di geodetiche ellissoidiche.

Abbiamo già detto come sia difficile, se non addirittura impossibile, misurare l'angolo fra due geodetiche o la lunghezza di un arco di geodetica.

E' opportuno dunque definire le misure che un geodeta o un topografo possono eseguire.

DISTANZA FRA DUE PUNTI. Considerati due punti A' e B' sulla superficie fisica terrestre, gli strumenti e i metodi di misura impiegati permettono di definire la lunghezza s' dell'arco di sezione normale che congiunge le proiezioni A e B sulla superficie di riferimento. Le sezioni normali che congiungono questi punti sono due. Una è la traccia s del piano che contiene la verticale per A e il punto B, l'altra è la traccia s' del piano che contiene la verticale per il punto B e il punto A. Tali tracce non coincidono se le due verticali sono sghembe,

AZIMUT DI UN PUNTO. Considerati due punti A e B, l'azimut di B rispetto a A, misurabile con osservazioni astronomiche o con teodoliti giroscopici, è l'angolo che la sezione normale AB forma con la tangente al meridiano in A diretta verso Nord. L'azimut si valuta in senso orario a partire dalla direzione del Nord e può assumere tutti i valori da 0 a 2π .

ANGOLO AZIMUTALE FRA DUE PUNTI. Considerati due punti A' e B' e un terzo punto C', l'angolo azimutale ACB, che si può misurare con un teodolite è l'angolo fra le sezioni normali CA e CB.

DISTANZA ZENITALE. Considerati due punti A' e B' della superficie fisica terrestre, la distanza zenitale f_{ab} misurabile con un teodolite se B è visibile da A, è l'angolo che la congiungente AB forma con la verticale in A.

DISLIVELLO. Considerati due punti A e B il dislivello fra A e B, indicato con D_{ab} è la differenza tra la quota di A (Q_A) e la quota di B (Q_B).

Le misure prima descritte fanno riferimento alla verticale vera, cioè alla normale al geoide in quanto tutti gli strumenti di misura hanno assi che si possono con facilità e precisione orientare rispetto a tale direzione.

Assumendo come superficie di riferimento l'ellissoide sarebbe naturale definire ed eseguire le misure con riferimento alla normale all'ellissoide.

Questo non è possibile perché in un rilievo, la normale all'ellissoide si può far coincidere con la normale al geoide solo in un punto.

Negli altri punti la normale all'ellissoide non è fisicamente materializzabile e quindi si è costretti a riferire le restanti misure alla normale al geoide.

Le misure eseguite equivalgono quindi, a misure fra sezioni oblique dell'ellissoide.

Teoricamente si potrebbe procedere in questo modo: inizialmente si accetta l'incongruenza e si esegue il rilievo che conduce alla determinazione della posizione di punti che si reputano appartenere all'ellissoide. Quindi per ogni punto si determina l'angolo tra la verticale vera e la normale all'ellissoide (deviazione della verticale), si correggono le misure eseguite e si ripetono i calcoli per determinare le posizioni ellissoidiche dei punti.

Gli errori di misura strumentale, che inevitabilmente accompagnano i risultati delle misure, determinano incertezze nella determinazione della posizione ellissoidica dei punti che sono dello stesso ordine di grandezza delle correzioni che si dovrebbero apportare procedendo nel modo prima indicato.

L'incongruenza viene dunque accettata e si procede nell'ipotesi che le misure eseguite sulla superficie fisica terrestre siano effettivamente riferite all'ellissoide.

1.4.4. TEOREMI DELLA GEODESIA OPERATIVA

Rimane ancora un problema da superare. Come già visto si possono misurare angoli e distanze solo lungo sezioni normali e non lungo le geodetiche come sarebbe teoricamente esatto. Consideriamo due punti sull'ellissoide P e Q, l'arco di sezione normale s' che li congiunge avente azimuth α' e l'arco s di geodetica che li congiunge di azimuth α .

Per archi di alcune centinaia di chilometri, trascurando termini dell'ordine di $(s/N)^8$ si può dimostrare, utilizzando gli sviluppi di Puiseux-Weingarten la seguente relazione:

$$\frac{s'-s}{s} = \frac{1}{360} \frac{s^4}{N^2 R_\alpha^2} \left(\frac{e^2}{1-e^2} \right)^2 \sin^2 2\alpha \cos^4 \varphi$$

Per $s = 1000$ km, la quantità sopra riportata è dell'ordine di 10^{-8} (circa 10 mm al chilometro).

Poiché i metodi di misura utilizzati non consentono di raggiungere precisioni superiori a $10^{-6} - 10^{-7}$ è perfettamente giustificato ritenere che misure eseguite secondo archi di sezione normale diano gli stessi risultati delle misure eseguite secondo archi di geodetica.

Per quanto riguarda la differenza tra i due azimuth il primo sul geoide e l'equivalente sull'ellissoide sempre ricorrendo agli sviluppi in serie di Puiseux-Wengarten si può dimostrare che sussiste la seguente relazione:

$$\alpha' - \alpha = \frac{s^2}{12NR_\alpha} \frac{e^2}{1-e^2} \sin 2\alpha \cos^2 \varphi$$

Si noti che a parità di s , tale differenza è massima all'equatore e nulla ai poli dove sezioni normali, geodetiche e meridiani, coincidono.

Considerando una geodetica di 100 km e $\alpha = \pi/4$ la (48) fornisce i seguenti risultati:

$$\alpha' - \alpha = 0.03'' \text{ all'equatore}$$
$$\alpha' - \alpha = 0.01'' \text{ alla latitudine di } \pi/4$$

Tali differenze aumentano di 10 volte considerando archi di geodetica di circa 300 km. Se si tiene conto che la precisione di misura degli angoli raggiunge al massimo qualche decimo di secondo sessagesimale e che non è possibile, per effetto della curvatura terrestre, effettuare misure fra punti distanti più di 200 km, si può concludere che una misura di azimuth, anche se effettuata con riferimento a una sezione normale può sempre considerarsi riferita a una geodetica.

Analoga conclusione si può trarre per la misura degli angoli azimutali dato che per un angolo azimutale, che può essere considerato come differenza tra due azimuth, al massimo si potrebbero avere discrepanze doppie rispetto a quelle appena messe in evidenza.

Quanto sin qui esposto costituisce la sostanza dei **teoremi della geodesia operativa** ovvero, in sintesi, il fatto che *qualunque misura di azimuth, angolo o distanza eseguita con i mezzi a disposizione dei topografi può ritenersi eseguita con riferimento ad archi di geodetiche dell'ellissoide di riferimento.*

1.5 ESECUZIONE DEI CALCOLI SULLA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO

Accettati i teoremi della geodesia operativa, la risoluzione di un qualsiasi problema deve essere eseguita con gli algoritmi propri della trigonometria ellissoidica.

Questa però è piuttosto complessa, per cui è opportuno esaminare la possibilità di eseguire i calcoli in maniera più semplice limitando opportunamente le lunghezze dei lati considerati

D'ora in poi considereremo la quantità 10^{-2} come quantità piccola del primo ordine. Per le formule che seguiranno si esprimeranno le approssimazioni in termini di potenze di tale quantità.

Ad esempio, considerando archi di geodetica $s = 50$ km, sono quantità piccole del primo ordine

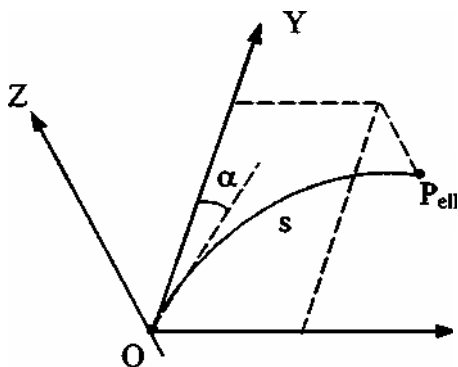
$$\frac{s}{\rho} \quad \frac{s}{N} \quad \frac{s}{R_\alpha} \quad e^2 \quad \alpha$$

A conclusione della breve trattazione che seguirà si vedrà che se gli archi di geodetica che compongono le figure oggetto del calcolo non eccedono i 100 km, i calcoli eseguiti con gli algoritmi della trigonometria sferica risultano "praticamente uguali" a quelli che si otterrebbero usando la trigonometria ellissoidica.

Ancora, se le dimensioni non eccedono i 20 km i risultati che si ottengono con la trigonometria piana sono "praticamente uguali" a quelli che si otterrebbero con la trigonometria ellissoidica. Si definiscono "praticamente uguali" i risultati di due calcoli eseguiti con algoritmi diversi tutte le volte che le differenze sono decisamente inferiori alle incertezze derivanti dalle misure.

1.5.1 CAMPO GEODETICO

Riscriviamo gli sviluppi di Puiseux-Weingarten che esprimono le coordinate euleriane X, Y, Z di un punto P_{ell} appartenente all'ellissoide in funzione delle sue *coordinate geodetiche polari* s (arco di geodetica tra l'origine della terna euleriana e P) e α (azimut di tale geodetica nell'origine del riferimento euleriano).



La geodetica OP_{ell} giace sull'ellissoide

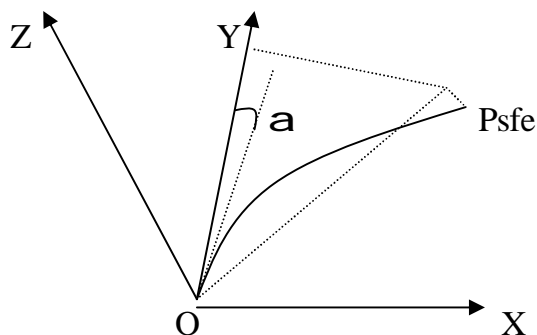
Fig. 1.21 - Terna euleriana

$$\begin{cases} X_{P_{ell}} = s \cdot \sin \alpha \cdot \left[1 - \frac{s^2}{6\rho N} \left(1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) \right] \\ Y_{P_{ell}} = s \cdot \cos \alpha \cdot \left[1 - \frac{s^2}{6\rho N} \left(\frac{e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha}{1 - e^2} \right) \right] \\ Z_{P_{ell}} = -\frac{s^2}{2R_\alpha} \end{cases} \quad (49)$$

Si è trascurato il secondo addendo della Z in quanto quantità piccola del quarto ordine.

I medesimi sviluppi possono essere scritti per una sfera di raggio tangente all'ellissoide nel punto O.

Consideriamo la stessa tema euleriana (O,X,Y,Z) e un punto P_{sfe} appartenente alla sfera avente le stesse *coordinate geodetiche polari* s e a del punto P_{ell} appartenente all'ellissoide. In questo caso gli sviluppi di Puiseux-Weingarten esprimeranno le coordinate euleriane del punto P_{sfe} .



La geodetica OP_{sfe} giace sulla sfera

Fig. 1.22 - Tema euleriana

$$\begin{cases} X_{P_{sfe}} = s \cdot \sin \alpha \cdot \left[1 - \frac{s^2}{6R^2} \right] & \left(-\frac{s^2}{6\rho N} \right) \\ Y_{P_{sfe}} = s \cdot \cos \alpha \cdot \left[1 - \frac{s^2}{6R^2} \right] = s \cdot \cos \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6\rho N} \right) \\ Z_{P_{sfe}} = -\frac{s^2}{2R} = -\frac{s^2}{2\sqrt{\rho N}} \end{cases}$$

Infatti nella sfera di raggio R risultano: $\rho = N = R_\alpha = R$ $e^2 = 0$

L'errore che si commette considerando il punto P proiettato sulla sfera di raggio R anziché sull'ellissoide si ottiene valutando le differenze delle coordinate euleriane di P nelle due ipotesi.

$$\begin{cases} X_{P_{sfe}} - X_{P_{ell}} = -s \cdot \sin \alpha \frac{s^2}{6\rho N} \frac{e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \\ Y_{P_{sfe}} - Y_{P_{ell}} = -s \cdot \cos \alpha \frac{s^2}{6\rho N} \frac{e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1 - e^2} \\ Z_{P_{sfe}} - Z_{P_{ell}} = \frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\rho N}} \right) \end{cases}$$

Il massimo delle prime due differenze si ha per $\varphi = 0$ e $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi/2$.

Considerando $s = 100$ km tali differenze non superano i 27 mm e quindi risultano decisamente inferiori alle incertezze di posizione derivanti dalle misure.

Quindi i problemi di calcolo riguardanti figure ellissoidiche comprese nell'intorno di un punto di raggio pari a 100 km possono essere risolti con la trigonometria sferica assumendo come raggio della sfera la media geometrica dei raggi di curvatura delle sezioni normali principali del punto di tangenza.

Tale sfera prende il nome di *sfera locale* e l'intorno operativo così definito, *campo geodetico* o di *Puiseux- Weingarten*.

Per quanto riguarda le quote occorre precisare meglio la questione.

Trascurando e^4 , cioè a meno di termini del secondo ordine, valgono le relazioni:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{N} (1 + e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi) \quad \frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{\rho} (1 - e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi)$$

per cui risulta:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho N} (1 + e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi) (1 - e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi)$$

e quindi con la stessa approssimazione abbiamo:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\rho N}} \left[1 + \frac{1}{2} (e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi) \right] = \frac{1}{\sqrt{\rho N}} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \varphi \cos 2\alpha \right)$$

Sostituendo nell'ultima delle (51) risulta:

$$Z_{P_*} - Z_{P_{el}} = \frac{s^2}{\sqrt{\rho N}} \frac{1}{4} e^2 \cos^2 \varphi \cos 2\alpha \tag{52}$$

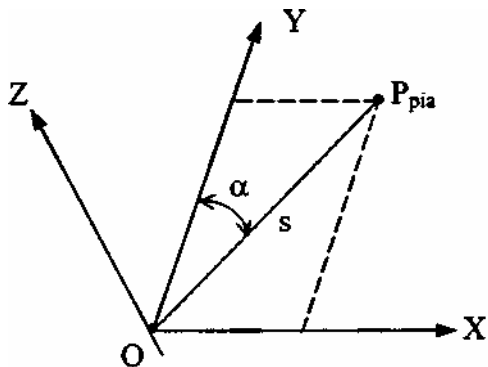
Questa differenza si annulla ai poli e assume i valori massimi all'equatore. Considerando $\varphi = 45^\circ$ i valori assoluti massimi forniti dalla (52) in funzione della lunghezza di s sono riassunti nella seguente tabella:

s [km]	1	10	20	50	100
$ Z_{P_{sfe}} - Z_{P_{ell}} $ [mm]	0.13	1.3	54	330	1300

Quindi per calcoli relativi a quote di punti i limiti entro cui si può assumere come superficie di riferimento la sfera locale sono più ristretti di quelli evidenziati per la planimetria. **Solitamente si assume la sfera locale come superficie di riferimento se le distanze in gioco sono inferiori a 20 km.** Negli altri casi è opportuno inserire nelle formule per il calcolo del dislivello il raggio della sezione normale.

1.5.2. CAMPO TOPOGRAFICO

Consideriamo la stessa terna euleriana (O,X,Y,Z) e un punto P_{pia} appartenente al piano X,Y avente le stesse *coordinate geodetiche polari* s e α del punto P_{ell} appartenente all'ellissoide. In questo caso gli sviluppi di Puiseux-Weingarten esprimeranno le coordinate euleriane del punto P_{pia} .



La geodetica OP_{pia} giace sul piano X,Y

Fig. 1.23 - Terna euleriana

$$\begin{cases} X_{P_{pia}} = s \cdot \sin \alpha \\ Y_{P_{pia}} = s \cdot \cos \alpha \\ Z_{P_{pia}} = 0 \end{cases}$$

in quanto il raggio di curvatura del piano è infinito e l'eccentricità nulla.

Gli errori che si commettono rispetto all'ipotesi di lavorare nel campo geodetico sono:

$$\begin{cases} X_{P_{pia}} - X_{P_{ge}} = \frac{s^2}{r} \cdot \sin \alpha \\ Z_{P_{pia}} - Z_{P_{ge}} = \frac{s^2}{r} \end{cases}$$

Per quanto riguarda le coordinate planimetriche, fino a valori di $s = 15$ km gli errori sono dell'ordine di 10^{-6} e quindi trascurabili.

Questo significa che in un raggio di 15 km i problemi planimetrici possono essere risolti con gli algoritmi propri della trigonometria piana.

Questa zona viene chiamata **campo topografico**.

Per quanto riguarda l'altimetria, non si può fissare un limite ben definito nell'intorno di un punto nel quale sia lecito approssimare l'ellissoide con un piano perché l'errore che si commette in questo caso è sempre maggiore della precisione strumentale e quindi, per quanto riguarda l'altimetria non è definibile un "campo topografico".

La sottostante tabella riporta i valori di questi errori:

s [km]	0.1	0.5	1	5	10
$ Z_{P_{pia}} - Z_{P_{sfe}} $ [mm]	0.8	20	80	2000	7800

I metodi di misura dei dislivelli consentono di avere precisioni di qualche decimo di millimetro su distanze di alcune centinaia di metri, per cui risulta necessario tenere conto, anche in questi casi, della sfericità della terra.

1.5.3. IL TEOREMA DI LEGENDRE

Il teorema di Legendre permette di risolvere un triangolo sferico (dunque contenuto nel campo geodetico) con gli algoritmi della trigonometria piana.

Innanzitutto occorre precisare che in un triangolo sferico la somma dei tre angoli interni eccede il valore π di una quantità detta eccesso sferico ($3e$).

Si può dimostrare che l'eccesso sferico è numericamente valutabile con il rapporto tra l'area del triangolo sferico e il quadrato del raggio della sfera cui il triangolo appartiene:

$$3\varepsilon = \frac{\text{Superficie}}{R^2}$$

Il teorema di Legendre afferma: sia dato un triangolo sferico i cui lati l siano una piccola frazione del raggio R della sfera di appartenenza e si assuma la quantità l/R come quantità piccola del primo ordine; commettendo un errore dell'ordine di $(l/R)^4$ gli angoli del triangolo piano che ha i lati della stessa lunghezza dei lati del triangolo sferico si possono derivare dagli angoli di quest'ultimo sottraendo ad ognuno di essi un terzo dell'eccesso sferico.

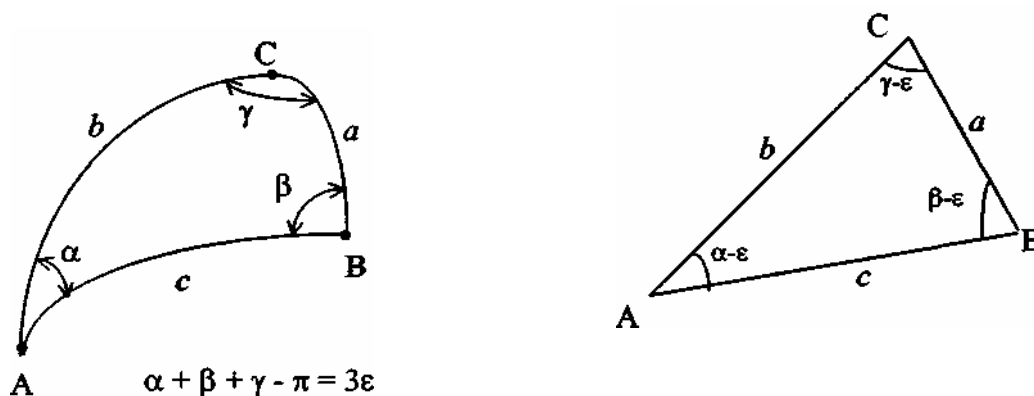


Fig. 1.24 - Teorema di Legendre

Ad esempio un triangolo sferico di lati pari a 60 km ha una superficie di circa 1.600 km² e un eccesso sferico $3e = 0.0024$ gon.

Applicando il teorema di Legendre, l'errore con cui si ricavano gli elementi del triangolo piano è pari a 0.0000006 gon (= 10^{-8} rad).

Volendo limitare l'errore massimo ammissibile a 10^{-6} , e cioè ponendo $(l/R)^4 < 10^{-6}$ si può dedurre che i lati del triangolo sferico non devono eccedere i 200 km circa.

$$\left(\frac{l}{R}\right)^4 = 1 \cdot 10^{-6} \quad \text{da cui } l = 202 \text{ km}$$

Quindi il teorema di Legendre può essere applicato a tutti i triangoli contenuti nel campo geodetico.

Per la valutazione dell'area del triangolo sferico, si può dimostrare che, sempre a meno di termini in $(l/R)^4$ essa si può calcolare con le formule della trigonometria piana utilizzando gli elementi sferici noti.

1.6. CALCOLO DELLE COORDINATE CURVILINEE DI PUNTI SULL'ELLISSOIDE

Consideriamo un insieme di punti di inquadramento sull'ellissoide congiunti a due a due da archi di geodetica (lati) e si supponga di aver eseguito un numero sufficiente di misure di angoli e distanze in modo che, o per misura diretta o per calcolo, siano note tutte le lunghezze dei lati e le ampiezze degli angoli fra i lati, (vedi Fig. 25)

Nel punto O sono state determinate le coordinate astronomiche f_0, l_0 e l'azimut a_0 di una geodetica uscente da O e passante per uno degli altri punti di inquadramento.

Tali misure vengono considerate come se fossero riferite all'ellissoide; questo in altre parole significa far sì che in O la normale al geoide e la normale all'ellissoide coincidano, cioè che nel punto O l'ellissoide di rotazione sia tangente al geoide.

Per fissare completamente l'ellissoide, che può ancora ruotare attorno alla normale, si considera che l'azimut astronomico a_0 coincida con l'azimut ellissoidico.

Quindi la determinazione delle coordinate curvilinee dei punti di inquadramento è un problema che può essere enunciato in questo modo:

dato un punto O di cui si conoscono le coordinate geografiche ellissoidiche f_0, l_0, a_0 noti la lunghezza s dell'arco di geodetica compreso tra O e un punto P e l'azimut a di tale geodetica in O, calcolare le coordinate geografiche ellissoidiche f e l , di P e l'azimut a della stessa geodetica in P. (primo problema fondamentale della geodesia).

Occorre a questo punto, prima di procedere alla soluzione del problema, fare alcune precisazioni.

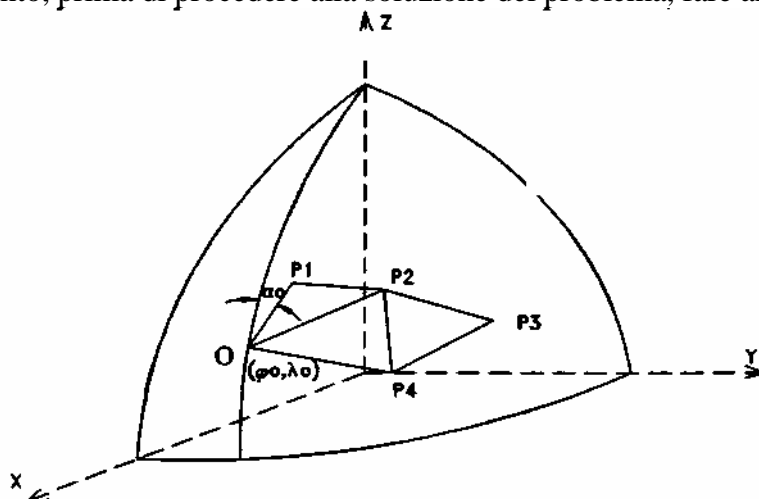


Fig. 1.25 - Rete di inquadramento sull'ellissoide di rotazione

- > L'operazione di orientamento dell'ellissoide riguarda le reti dei punti di inquadramento rilevate quando nella zona non esiste alcun rilievo geodetico precedente. Nel caso più comune, nella zona del rilievo esistono già punti rilevati cui riferirsi; quindi è sempre disponibile un punto O di coordinate geografiche note che viene inserito nel rilievo e un azimut di partenza desunto da un altro punto O' anch'esso di coordinate geografiche note e inserito nella rete da rilevare.
- > Il calcolo dell'azimut α in P è richiesto perché in generale a partire dal punto P si dovranno in seguito determinare le coordinate geografiche di altri punti.
- > Anche se le lunghezze dei lati e gli angoli sono stati determinati con le semplificazioni legittimate dai teoremi della geodesia operativa e dalle considerazioni fatte a proposito dell'opportunità di lavorare in particolari condizioni di campo geodetico o topografico, il calcolo delle coordinate curvilinee va eseguito tenendo conto che i lati sono archi di geodetica ellissoidica.

Il problema inverso (o **secondo problema fondamentale della geodesia**) del trasporto delle coordinate geografiche consiste nel determinare le coordinate geodetiche polari (α e s) del punto P rispetto al punto O note che siano f_o, l_o e f_p, l_p .

Di questi due problemi, per ragioni di struttura del corso di Topografia, diamo solo l'enunciato e non gli sviluppi analitici.

1.6.1. COORDINATE GEODETICHE POLARI E COORDINATE GEODETICHE RETTANGOLARI

Mentre le coordinate geografiche f, l definiscono la posizione assoluta di un punto P sull'ellissoide, i valori s, α definiscono la posizione di P rispetto ad un altro punto dell'ellissoide O. Esse sono quindi coordinate locali e vengono chiamate *coordinate geodetiche polari*.

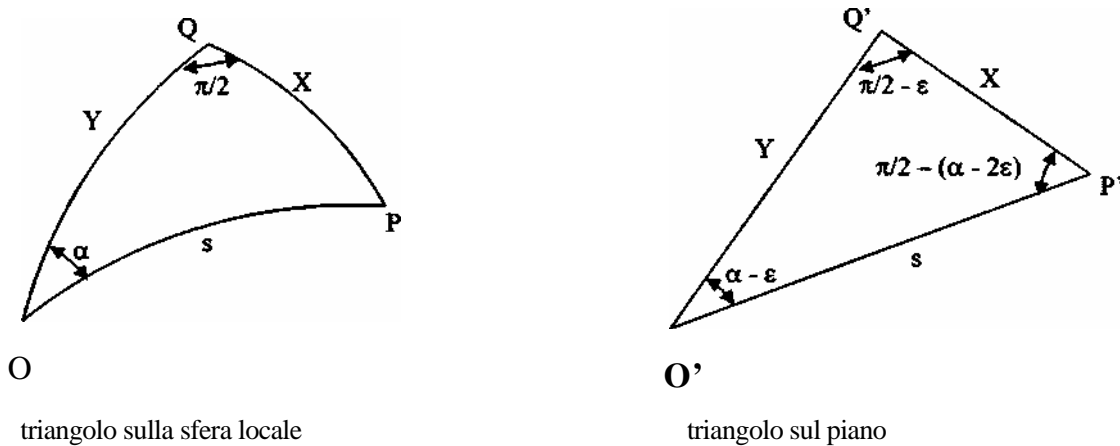


Fig. 1.26 - Coordinate geodetiche polari e rettangolari

Un altro modo per definire la posizione di P rispetto ad un altro punto dell'ellissoide è rappresentato dalle *coordinate geodetiche rettangolari* X, Y.

Si consideri un punto O dell'ellissoide assunto come origine e un secondo punto P. Si consideri ancora la geodetica passante per P e normale al meridiano di O; tale geodetica interseca il meridiano considerato in un punto Q.

In questo caso, la coordinata geodetica rettangolare X è l'arco di geodetica PQ mentre l'arco di meridiano OQ rappresenta la coordinata geodetica rettangolare Y.

Limitando le operazioni al campo geodetico si possono trovare le relazioni che consentono di passare dalle coordinate geodetiche polari a quelle rettangolari e viceversa. Appliciamo il teorema di Legendre al triangolo OPQ (vedi Fig. 26).

In base a tale teorema gli angoli del triangolo sferico OPQ si possono derivare da quelli del triangolo piano O'P'Q' di lati uguali a quello sferico.

Applichiamo il teorema di Legendre al triangolo OPQ (vedi Fig. 26).

In base a tale teorema gli angoli del triangolo sferico OPQ si possono derivare da quelli del triangolo piano O'P'Q' di lati uguali a quello sferico.

Se con ϵ si indica un angolo pari a 1/3 dell'eccesso sferico, gli angoli del triangolo piano valgono:

$$\hat{Q}'\hat{O}'\hat{P}' = \alpha - \epsilon \quad \hat{P}'\hat{Q}'\hat{O}' = \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad \hat{O}'\hat{P}'\hat{Q}' = \pi - \left[(\alpha - \epsilon) + \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon \right) \right] = \frac{\pi}{2} - (\alpha - \epsilon)$$

Applicando il teorema dei seni a tale triangolo, otteniamo:

$$\frac{X}{\sin(\alpha - \epsilon)} = \frac{Y}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - 2\epsilon)\right]} = \frac{s}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)} \Rightarrow \frac{X}{\sin(\alpha - \epsilon)} = \frac{Y}{\cos(\alpha - 2\epsilon)} = \frac{s}{\cos \epsilon} \quad (56)$$

L'eccesso sferico $3\varepsilon = \text{superficie}/R^2$ (vedi 55) è una quantità piccola del secondo ordine, per cui mantenendo l'approssimazione accettata applicando il teorema di Legendre, ossia trascurando i termini minori di ε^2 abbiamo:

$$\cos \varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \cong 1$$

e quindi le (56) consentono di ricavare:

$$\begin{cases} X = s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon) \\ Y = s \cdot \cos(\alpha - 2\varepsilon) \end{cases}$$

relazioni che permettono il calcolo delle coordinate geodetiche rettangolari in funzione delle coordinate geodetiche polari.

A meno di termini del quarto ordine, l'eccesso sferico si può valutare con la relazione:

$$3\varepsilon = \frac{s^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\rho N}$$

Per ottenere le relazioni che consentono di determinare le coordinate geodetiche polari in funzione di quelle rettangolari, si procede nel seguente modo.

Sviluppiamo le (57):

$$\begin{aligned} X &= s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon) = s \cdot (\sin \alpha \cos \varepsilon - \cos \alpha \sin \varepsilon) \\ Y &= s \cdot \cos(\alpha - 2\varepsilon) = s \cdot (\cos \alpha \cos 2\varepsilon + \sin \alpha \sin 2\varepsilon) \end{aligned}$$

e ricordando che a meno di termini in ε^2

$$\cos \varepsilon \cong \cos 2\varepsilon \cong 1$$

$$\sin \varepsilon \cong \varepsilon$$

$$\sin 2\varepsilon \cong 2\varepsilon$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} X &= s \cdot \sin \alpha - \varepsilon \cdot s \cdot \cos \alpha \\ Y &= s \cdot \cos \alpha + 2\varepsilon \cdot s \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

..

2.3.9. Trasformate delle geodetiche sul piano della rappresentazione di Gauss

Se fissiamo sul terreno tre punti (P_{stazione} , A_{avanti} , I_{indietro}) e misuriamo l'angolo azimutale $A-I = \alpha$ facendo stazione in P e collimando successivamente in A e poi in I , il valore che otteniamo, grazie ai teoremi della geodesia operativa, è del tutto equivalente all'angolo formato dalle tangenti alle geodetiche PA e PI .

Lo stesso angolo α sul piano della rappresentazione (cartografia conforme di Gauss) dovrebbe essere misurato tra le tangenti alle trasformate delle geodetiche PA e PI .

La trasformata di una geodetica tra due punti, tuttavia, non è facilmente rappresentabile, mentre è immediata la rappresentazione della corda tra gli stessi punti.

Un semplice metodo che consente di definire l'andamento della trasformata di una geodetica sul piano della rappresentazione è la "*regola del vento*" che semplicemente dice che la trasformata della geodetica si ottiene pensando a come si gonfia una vela tesa tra gli estremi PA sotto l'effetto del vento che per la parte che sta a destra dal meridiano centrale soffia verso EST e per la parte che sta a sinistra soffia verso OVEST:

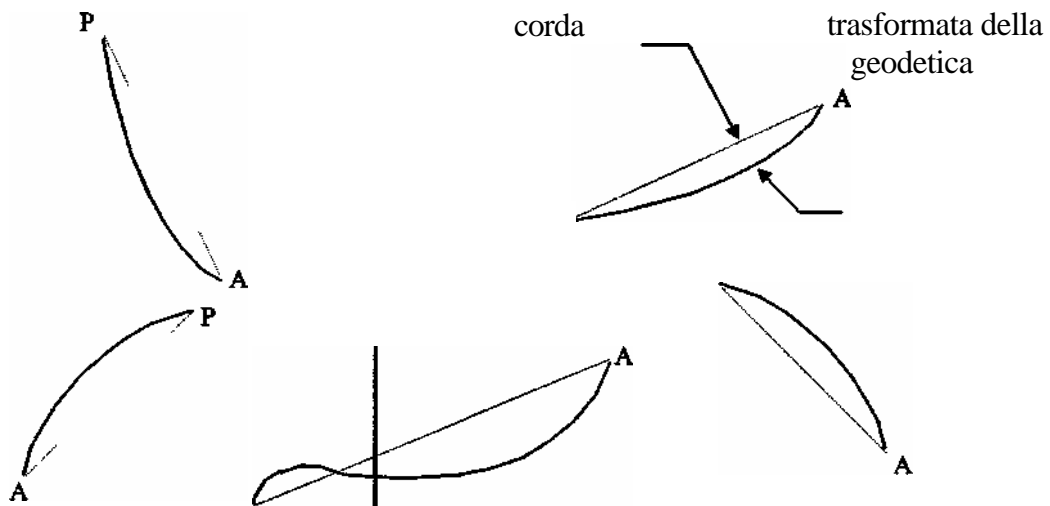


Fig. 2.22 regola del vento

Se determiniamo lo scostamento angolare tra la tangente alla trasformata della geodetica e la relativa corda sarà possibile ridurre l'angolo azimutale misurato sul terreno (tra geodetiche) all'equivalente angolo sulla cartografia misurato tra le rispettive "corde" ed operare quindi su figure a lati rettilinei anziché su figure a lati curvilinei. Lo scostamento suddetto viene chiamato "*riduzione alla corda*".

Nel punto P è definito l'azimut a di una geodetica PA sull'ellissoide come l'angolo compreso tra le tangenti al meridiano passante per P e alla geodetica stessa.

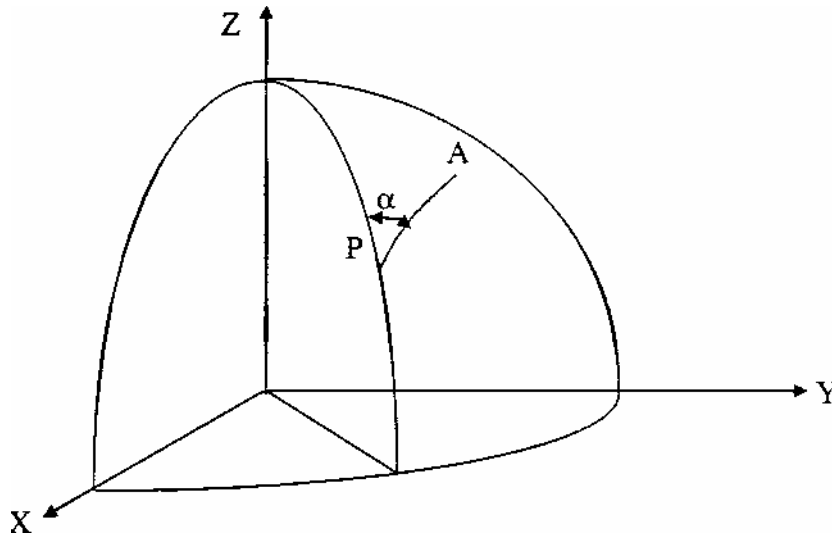


Fig. 2.23 azimut sulla superficie di riferimento Lo

stesso azimut a viene rappresentato sul piano di Gauss nel seguente modo:

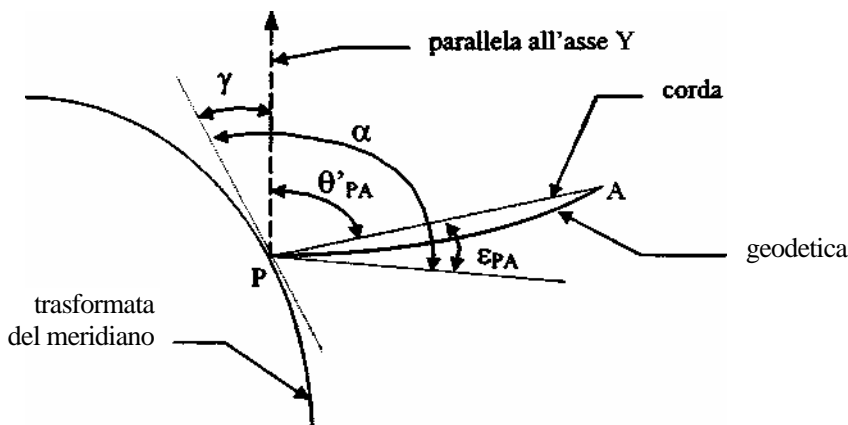


Fig. 2.24 azimut sul piano di GAUSS

Sulla cartografia sono facilmente determinabili le coordinate (Est, Nord) del punto P e del punto A.

base a queste coordinate è possibile calcolare l'azimut q_{PA} come $q'_{PA} = \text{arc tan} \frac{E_A - E_P}{N_A - N_P}$ In

Per poter rendere confrontabili l'azimut misurato sulla carta (q'_{PA}) con quello determinato sull'ellissoide (a) è necessario apportare le correzioni di convergenza del meridiano (l) e di riduzione alla corda (e_{PA}).

$$a = q'_{PA} + g - e_{PA}$$

Il segno dell'angolo e_{PA} sarà dato dalla seguente regola empirica:

segno - se ruotando in senso orario la direzione positiva dell'asse Y si incontra prima la corda e poi la trasformata; segno + il viceversa.

La convergenza del meridiano l sarà positiva quando il punto P si trova a destra dell'asse Y (Nord) e sarà negativa quando il punto P si trova a sinistra.

Dallo studio della trasformata della geodetica si può dedurre che l'angolo e_{PA} (riduzione alla corda) è pari a:

$$\varepsilon_{PA} = \frac{(Y_P - Y_A)(2X_P + X_A)}{6\rho_C N_C}$$

dove ρ_C e N_C sono i raggi principali di curvatura calcolati in un punto C che divide la geodetica PA in due parti di 1/3 e 2/3 a partire da P. In pratica, anche per distanze di 300 km possono essere semplicemente calcolati alla latitudine media di PA.

Si può anche notare che $\varepsilon_{AP} \neq \varepsilon_{PA}$

$$\varepsilon_{AP} = \frac{(Y_A - Y_P)(2X_A + X_P)}{6\rho_C N_C}$$

Il segno dell'angolo e_{ij} è definito con la "regola del vento" già vista.

Alla luce di quanto visto sopra, un angolo B (tra due geodetiche) misurato sulla superficie terrestre con il teodolite corrisponderà all'equivalente angolo B' (tra le corde) misurato sulla cartografia di Gauss secondo le seguenti regole:

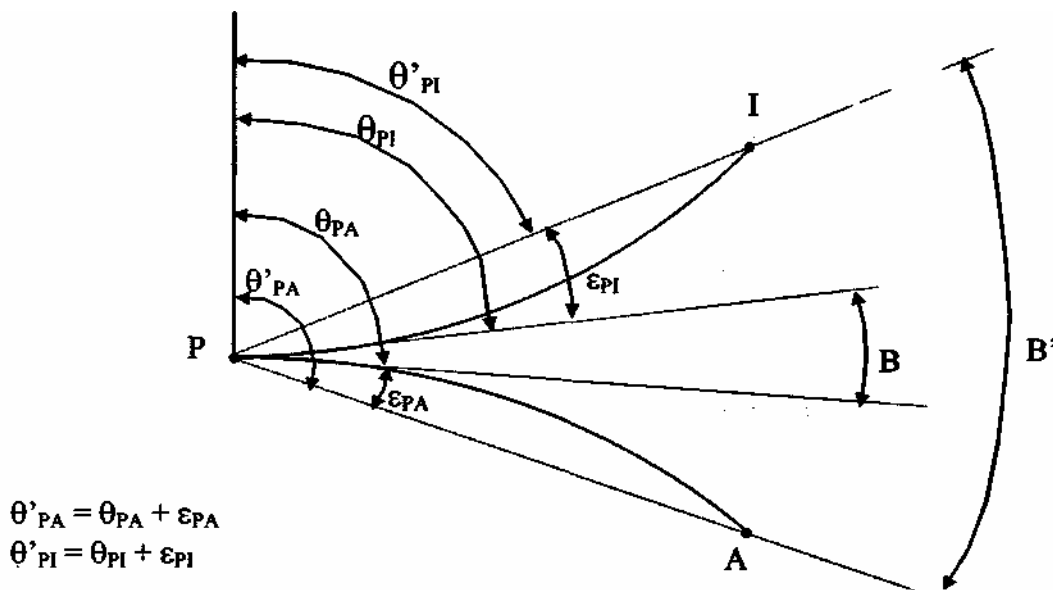


Fig. 2.25 riduzione alle corde di un angolo azimutale

e quindi l'angolo B' misurabile sulla cartografia sarà uguale all'angolo B misurato sulla superficie terrestre depurato dalle correzioni alle corde:

$$B' = \alpha_{PA} - \alpha_{PI} = 0 \quad \alpha_{PA} + E_{PA} - \alpha_{PI} - E_{PI} = B + E_{PA} - E_{PI}$$

Vediamo l'ordine di grandezza di queste correzioni per i valori massimi indicati:

$$\lambda \leq 3^\circ$$

$$\rho_C = N_C = 6,3 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$\Delta_Y = \Delta_X$	200 km	100 km	10 km
ϵ''	100''	25''	0,25''

Nelle condizioni più sfavorevoli per lati di 15 km il valore (B' - B) è di 0,5" ed è dunque logico, al disotto di queste distanze, cioè nel campo topografico, non tenere conto di queste correzioni. Sarà quindi possibile compensare una rete geodetica di questa estensione senza applicare le riduzioni angolari alla corda..

2.4. LA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA

Esistono molti provvedimenti legislativi in materia di cartografia, emanati dall'unità d'Italia ad oggi. La legge 2/2/1960 n° 68 definisce gli *organi cartografici dello Stato*:

1. I.G.M. - Istituto Geografico Militare
2. I.I.M. - Istituto Idrografico della Marina
3. C.I.G.A. - Centro di Informazioni Geotopografiche dell'Aeronautica
4. Catasto - Direzione Centrale del Catasto e dei servizi Geotopocartografici e della conservazione dei registri immobiliari
5. Servizio Geologico

La cartografia ufficiale è quindi costituita dalle carte:

- > topografiche
- > nautiche
- > aeronautiche
- > catastali
- > geologiche

Nel 1970 sono nate le Regioni a statuto ordinario e con esse sono nati anche i programmi di cartografia tecnica a grande scala (C.T.R.) 1:10.000 e 1:5.000.

Anche le 102 Province Italiane hanno competenza cartografica.

I loro programmi prevedono, normalmente, la costruzione di cartografia tecnica (tradizionale o/e numerica) alla scala 1:5.000

Gli 8.102 Comuni italiani hanno programmi di produzione di cartografia tecnica alle scale 1:500 - 1:1.000-1:2.000.

La realizzazione di cartografia tradizionale o/e numerica è estremamente disomogenea: si va dal nulla alla copertura totale.

I principali sistemi cartografici adottati in Italia sono i seguenti:

proiezione conica conforme di Lambert:

proiezione conforme di Mercatore:

proiezione conforme stereografica polare:

proiezione di Cassini - Soldner (afilattica):

rappresentazione conforme di Gauss:

IGM carta 1:500.000 e 1:1.000.000

IIM carta a scale varie da 1:100.000 a 1:1.000.000

IGM carta 1:1.000.000 per le calotte polari

CATASTO carte a scale variabili da 1:500 a 1:4.000

IGM carta in scala 1:25.000

IGM carta in scala 1:50.000 IGM carta in scala

1:100.000 IGM carta in scala 1:200.000 IGM

carta in scala 1:250.000 CATASTO nuove carte a scale variabili da 1:500 a 1:4.000

Tutta la cartografia ufficiale italiana è nella rappresentazione conforme di Gauss così come la pratica totalità della cartografia del mondo.

Vediamo le principali tappe che hanno portato l'Italia all'attuale cartografia:

=> la carta ufficiale dell'IGM in scala 1:100.000 (284 fogli) è stata ultimata alla fine del secolo scorso mentre quella in scala 1:25.000 lo fu solo negli anni cinquanta con le seguenti caratteristiche:

- > origine delle longitudini: meridiano di Roma Monte Mario
- > origine delle latitudini: equatore
- > ellissoide di riferimento: BESSEL
- > proiezione: naturale policentrica di Sanson - Flamsteed

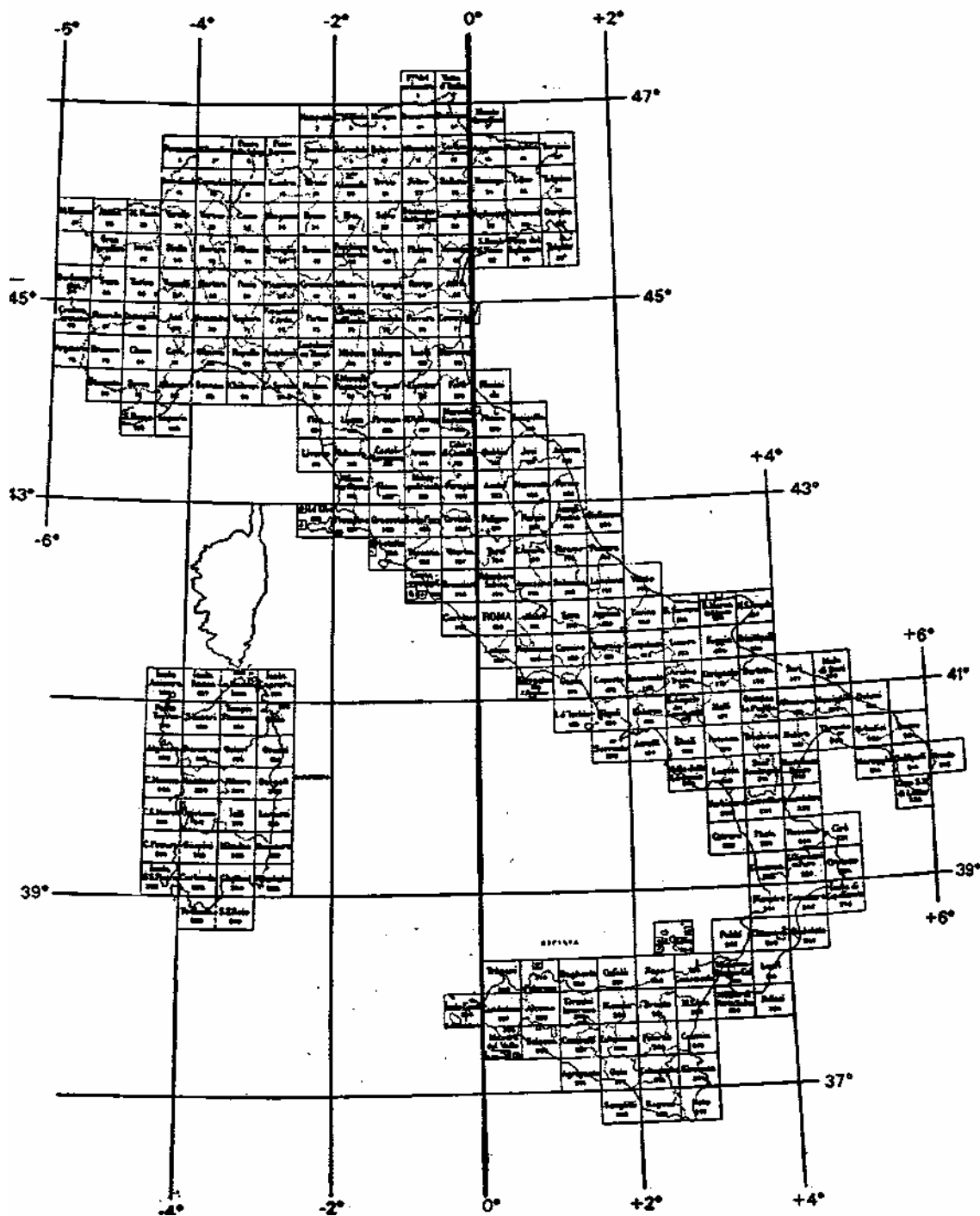


Fig. 2.26 la prima cartografia ufficiale italiana

Nel 1940 la Commissione Geodetica Italiana decise di adottare l'ellissoide internazionale (Hayford) come superficie di riferimento. L'ellissoide è stato "orientato a Roma - Monte Mario" cioè è stato reso tangente al geode in questo punto, annullando la deviazione della verticale.

Nel 1941 la rete geodetica nazionale fu ricalcolata sul piano di Gauss dal Prof. Boaga (come riconoscimento di ciò, la proiezione è stata chiamata *proiezione di Gauss - Boaga*).

Nel 1948 fu stabilito di adottare la proiezione di Gauss anche per la cartografia. La trasformazione è avvenuta conservando tutto il vecchio materiale cartografico, sovrastampandovi soltanto il nuovo reticolato gaussiano.

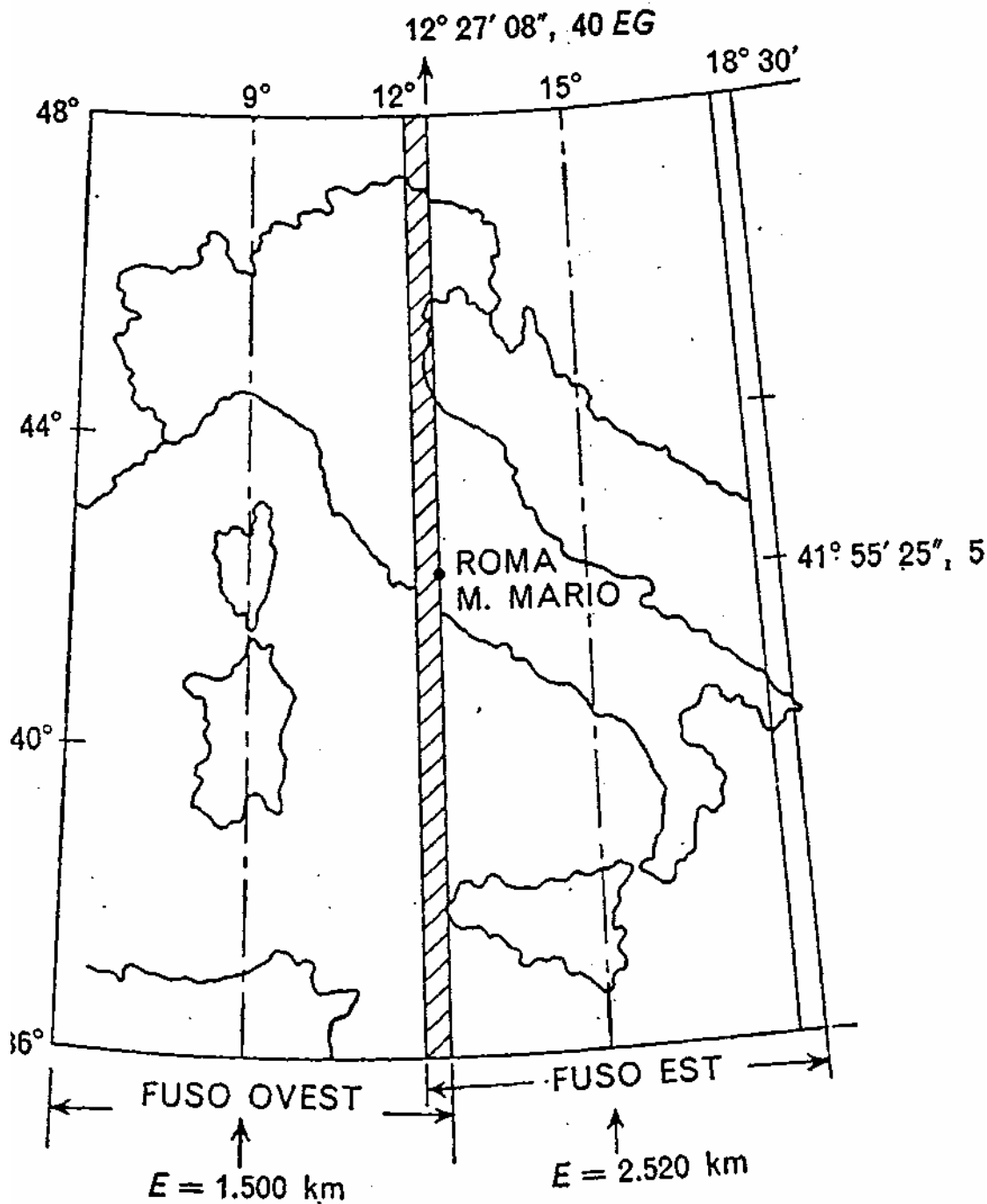


Fig. 2.27 la nuova cartografia ufficiale italiana

Le norme adottate per la nuova cartografia sono state le seguenti:

1. il taglio dei fogli di tutta la cartografia ufficiale (fogli, quadranti e tavolette) è rimasto quello geografico originario (secondo le **trasformate di meridiani e di paralleli**), avente per origine il meridiano di Roma Monte Mario a cui è stato attribuito il valore di $12^{\circ} 27' 08",40$ Est di Greenwich.

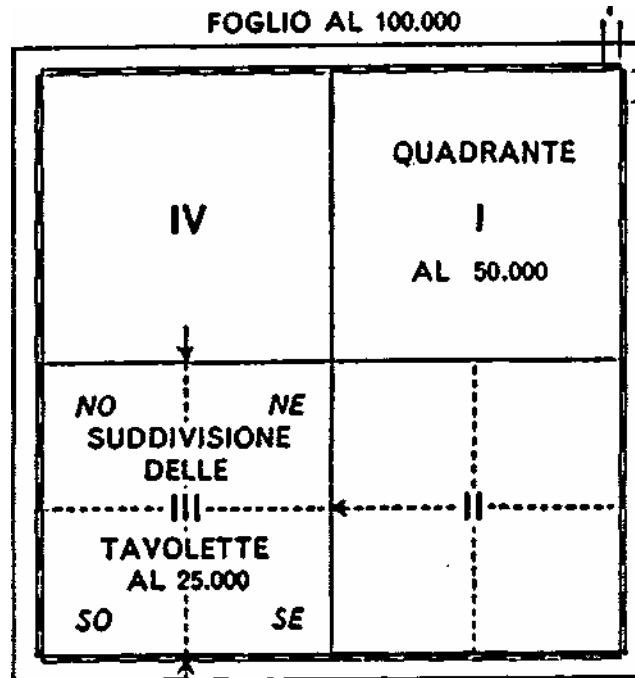


Fig. 2.28 taglio dei fogli della nuova cartografia ufficiale italiana

La dimensione geografica della cartografia ufficiale è la seguente:

tipo	scala	$\Delta\lambda$	$\Delta\phi$
FOGLIO	1:100.000	30'	20'
QUADRANTE	1:50.000	15'	10'
TAVOLETTA	1:25.000	7' 30"	5'

2. tutto il territorio nazionale è compreso in due fusi di 6° di longitudine detti fuso Ovest e fuso Est

fuso	estensione
OVEST	da 6° a $12^{\circ} 30'$ (zona di sovrapposizione)
EST	da 12° a $18^{\circ} 30'$ (per includere tutta l'Italia)

3. I meridiani centrali dei due fusi sono quelli di 9° e 15° di longitudine Est di Greenwich. Per evitare coordinate negative sono state attribuite delle costanti Est ai meridiani centrali pari a 1.500 km per il fuso Ovest e 2.520 km per il fuso Est

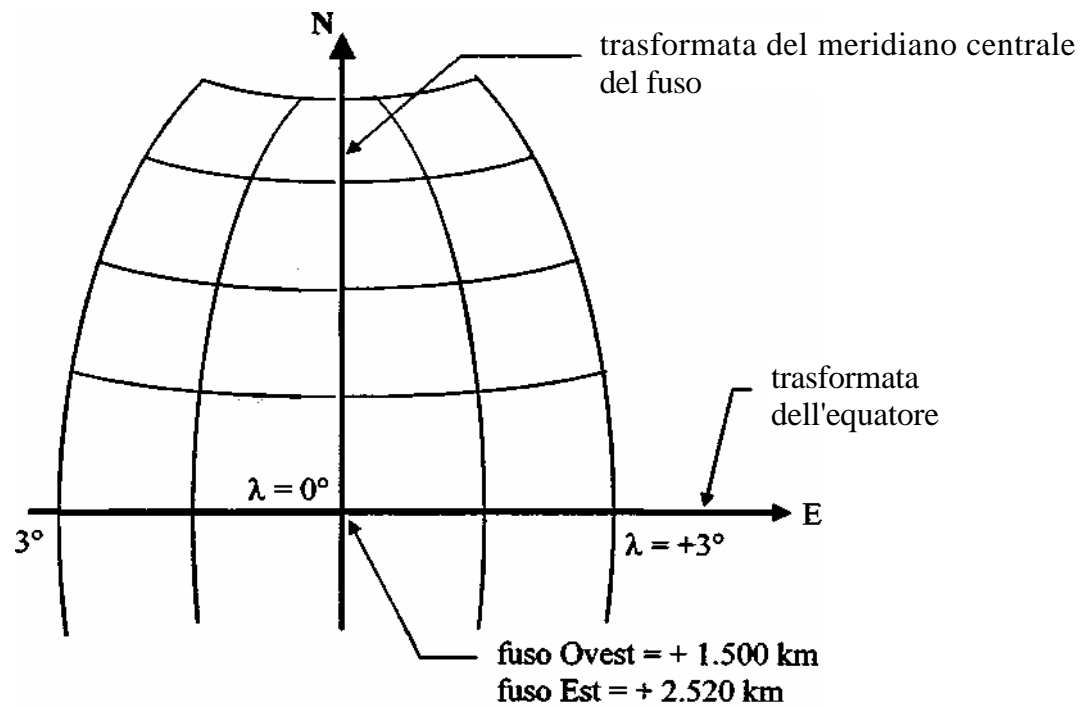


Fig. 2.29 falsa origine dei fusi

4. Su tutta la cartografia ufficiale è stato tracciato il *reticolato chilometrico* per facilitare la misura delle coordinate.

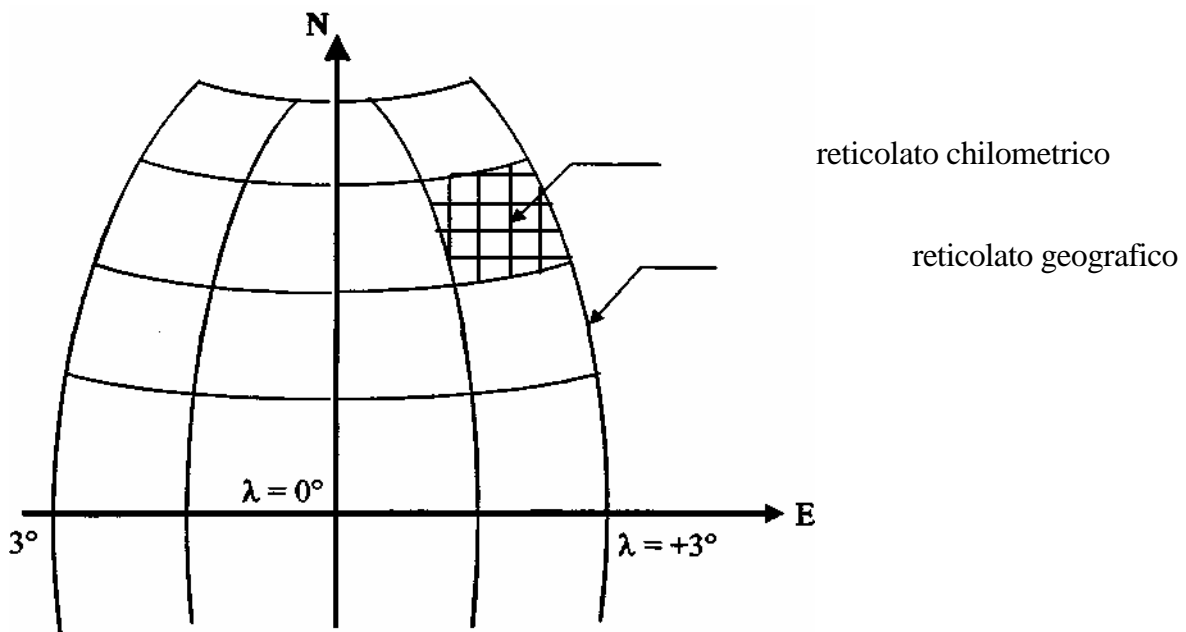


Fig. 2.30 reticolato chilometrico

5. A tutto il piano della rappresentazione è stato applicato un **coefficiente di contrazione pari a 0,9996**; ciò per rendere più piccole dell'errore di graficismo (0,2 mm) le entità massime delle deformazioni lineari della rappresentazione ossia per rendere la carta *praticamente equidistante* nell'ambito di ogni elemento.

Nel fuso di 6° il modulo di deformazione lineare varia tra:

longitudine	m_1
$\lambda = 0^\circ$	1
$\lambda = + 3^\circ$ o $\lambda = - 3^\circ$	1,0008

dopo l'applicazione del coefficiente di contrazione (0,9996) a tutta la cartografia avremo:

longitudine	m_1
$\lambda = 0^\circ$	0,9996
$\lambda = + 3^\circ$ o $\lambda = - 3^\circ$	1,0004

Vediamo quali saranno le deformazioni lineari in una tavoletta IGM posta all'estremità del fuso ($l = \pm 3^\circ$) prima e dopo l'applicazione del coefficiente di contrazione:

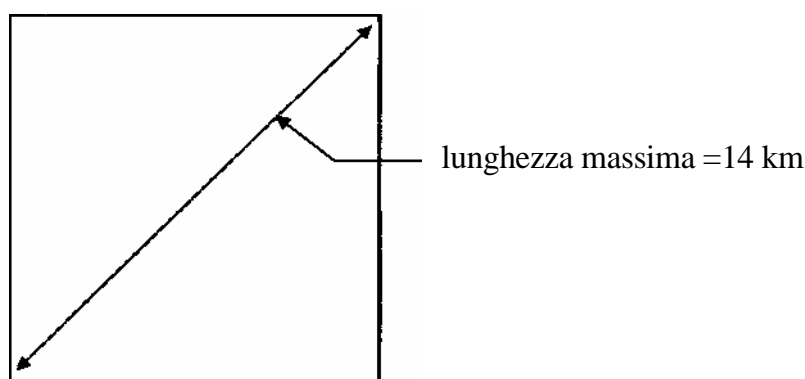


Fig. 2.31 tavoletta IGM in scala 1:25.000

Il segmento massimo rappresentabile su una tavoletta in scala 1:25.000 è la sua diagonale pari ad una distanza di circa 14 km

Questa lunghezza corrisponde, su una carta ideale (senza deformazioni) in scala 1:25.000, ad un segmento di 560 mm.

Sulla carta di Gauss, all'estremità del fuso, a parità di scala e senza l'applicazione del coefficiente di contrazione avremo: $14.000 \text{ m} * 1,0008 = 14.011 \text{ m} \Rightarrow 560,45 \text{ mm}$ che supera il valore massimo ammissibile di 560 mm più l'errore di graficismo (0,2 mm).

Dopo l'applicazione del coefficiente di contrazione e nelle stesse condizioni operative avremo:

all'estremità del fuso $14.000 \text{ m} * 1,0004 = 14.006 \text{ m} \Rightarrow 560,22 \text{ mm}$

sul meridiano centrale $14.000 \text{ m} * 0,9996 = 13.994 \text{ m} \Rightarrow 559,78 \text{ mm}$

Entrambi i valori praticamente soddisfano la condizione che la deformazione massima sia contenuta entro l'errore di graficismo.

Le espressioni analitiche del modulo di deformazione lineare che abbiamo calcolato [33] e [34] diventano quindi:

$$m_l = 0,9996 \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \right) \text{mi espresso in funzione della longitudine } X \text{ e della latitudine } \varphi$$

$$m_l = 0,9996 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(\text{Est} - \text{falsa origine})^2}{\rho N 0,9996^2} \right) \text{mi espresso in funzione della distanza del punto dal meridiano centrale del fuso}$$

mi di un segmento di retta che congiunge, sulla rappresentazione, un punto P1 di coordinate X1 Y1 ed un punto P2 di coordinate X2 Y2 (vedi [35]) sarà dato dalla relazione:

$$m_{1-2} = 0,9996 \left(1 + \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{6 \rho_m N_m 0,9996^2} \right)$$

dove le ascisse X1 e X2 sono pari al valore della rispettiva coordinata Est letta sulla cartografia depurata della falsa origine e dal coefficiente di contrazione.

L'applicazione del coefficiente di contrazione 0,9996 equivale a sostituire idealmente il cilindro tangente al meridiano centrale con un cilindro secante.

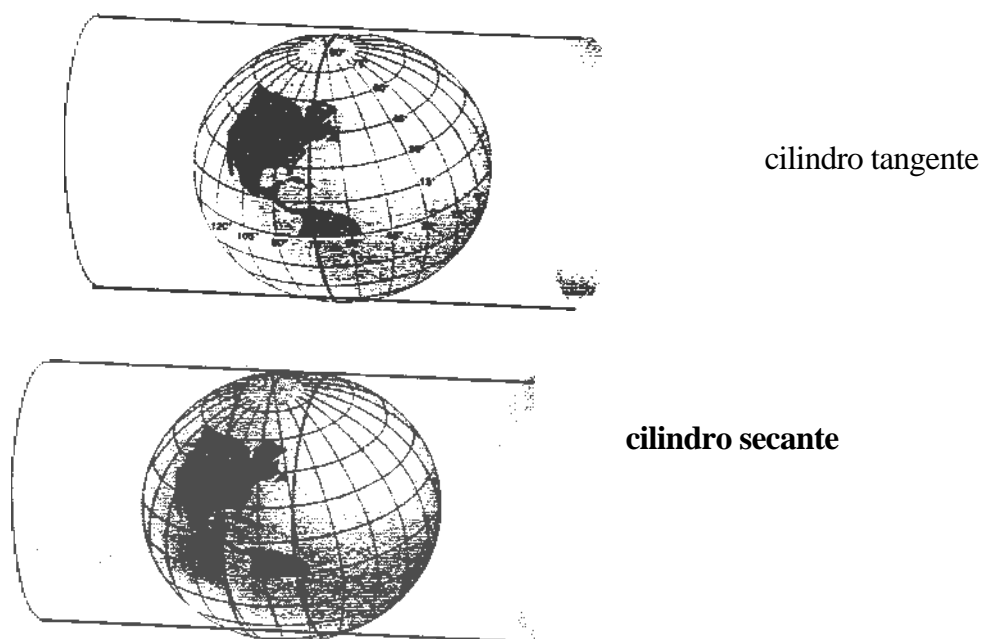


Fig. 2.32 schema geometrico della proiezione di Gauss - Boaga

Per meglio comprendere lo schema geometrico della rappresentazione di Gauss - Boaga immaginiamo di sezionare l'ellissoide secondo un piano Y-Z.

Alla nostra latitudine risulta che il cilindro secante (piano di Gauss) intersecherà l'ellissoide a circa 180 km dal meridiano centrale del fuso secondo il seguente schema:

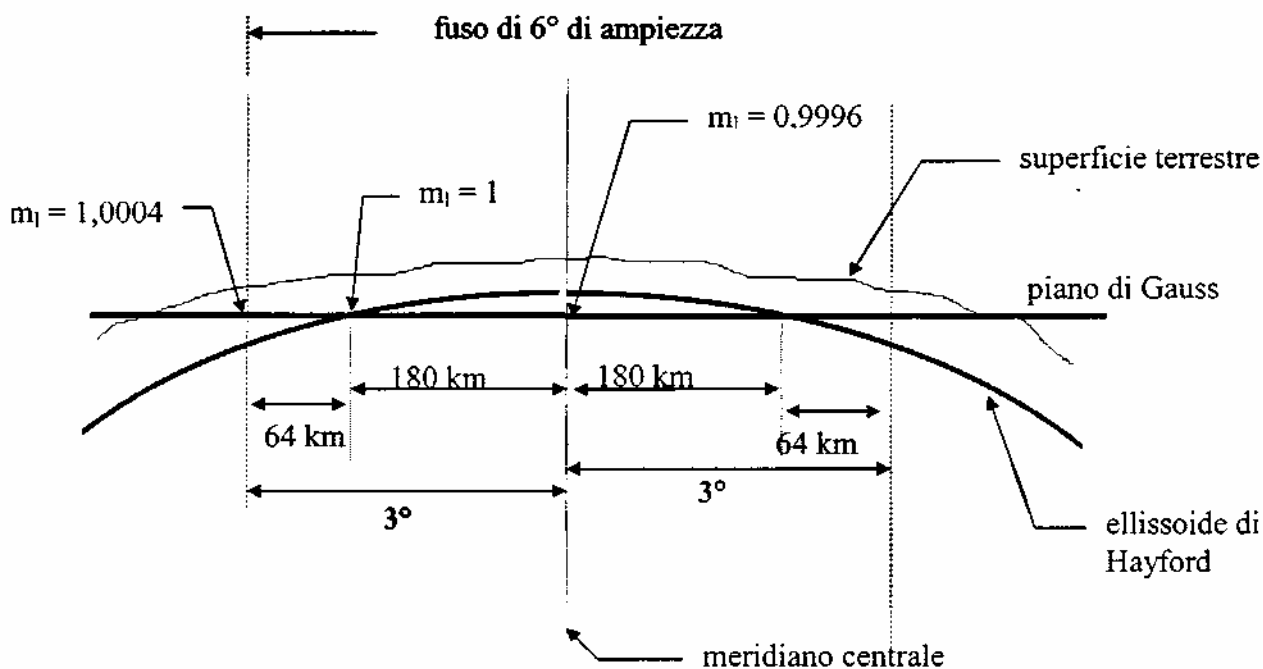


Fig. 2.33 sezione di un fuso di 6° di ampiezza

Se rappresentiamo il modulo di deformazione lineare m_1 in funzione della Est avremo un grafico ad andamento parabolico:

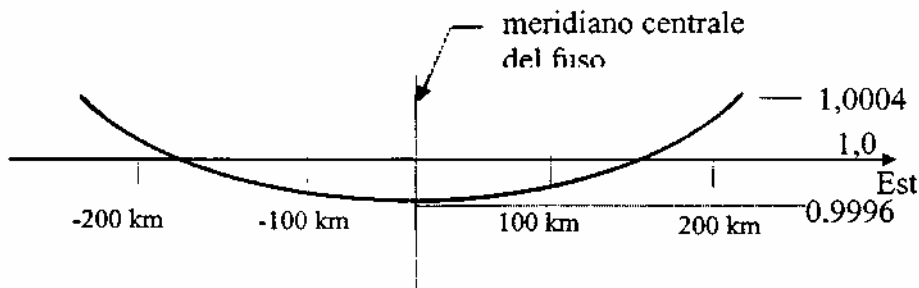


Fig. 2.34 variazione del modulo di deformazione lineare

2.4.1. IL SISTEMA UNIVERSALE UTM

Nei Paesi anglosassoni la proiezione di Gauss è nota come proiezione trasversa di Mercatore.

Durante e dopo la seconda guerra mondiale molte nazioni introdussero la rappresentazione di Gauss nella propria cartografia per ragioni di uniformità. Fu adottato il fuso di 6° di ampiezza con un coefficiente di contrazione pari a 0,9996 e fu concordato un taglio standard.

Tale sistema è stato chiamato Universal Transverse Mercator Projection (UTM).

La terra è stata suddivisa in 60 fusi di 6° di longitudine numerati in senso orario a partire dall'antimeridiano di Greenwich.

L'Italia è compresa nei fusi 32 - 33 e per una piccolissima parte nel 34.

Le sole coordinate non possono individuare in maniera univoca un punto qualunque della superficie terrestre perché esse si ripetono uguali in ciascun fuso.

Per ovviare a questo inconveniente (problema essenzialmente militare), ciascun fuso è stato suddiviso in 20 fasce di 8° di latitudine e ciascuna fascia in quadrati di 100 km di lato individuati da una coppia di lettere.

Qualunque punto della terra è univocamente individuabile da:

fuso	2 cifre	32
fascia	1 lettera	T
quadrato	2 lettere	PQ
Est	4 cifre (omettendo le cifre delle centinaia di km e limitando la risoluzione al decametro)	3456
Nord	4 cifre	7890

denominazione del punto: 32TPQ34567890

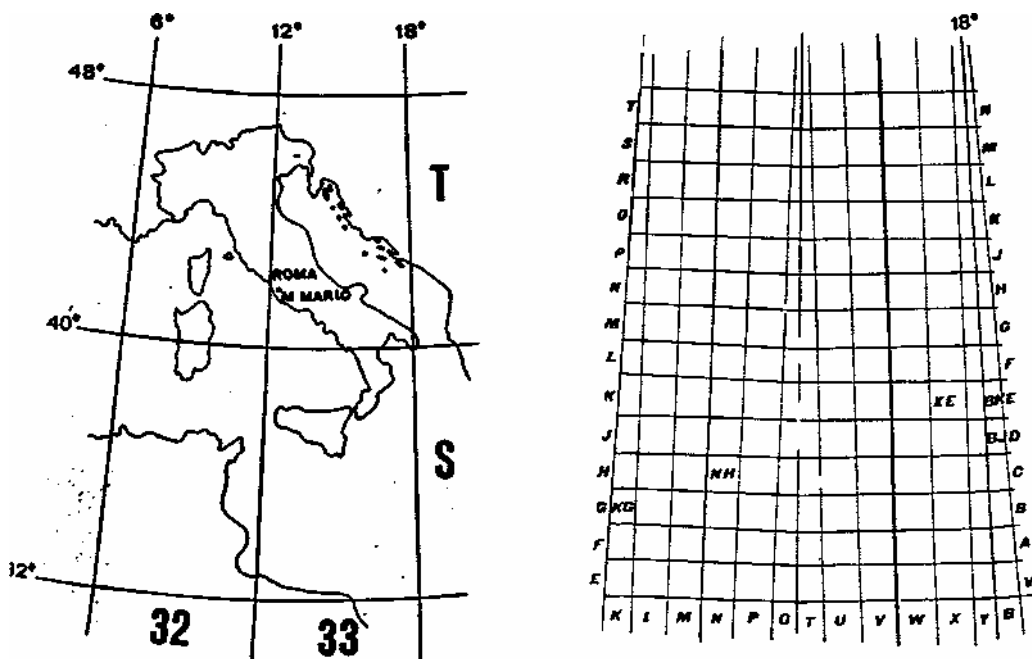


Fig. 2.35 il sistema UTM

La longitudine è misurata dal meridiano di Greenwich. I meridiani centrali dei due fusi (32 e 33) che riguardano l'Italia hanno una longitudine pari a 9° e 15° .

Per evitare coordinate negative è stata attribuita una costante Est al meridiano centrale (uguale per tutti i fusi) pari a **500 km**.

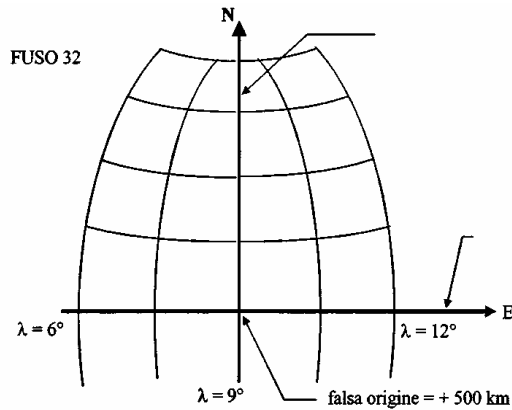


Fig. 2.36 falsa origine nel sistema UTM

trasformata del
meridiano centrale del
fuso

trasformata
dell'equatore

2.4.2. IL SISTEMA DI RIFERIMENTO UNIFICATO EUROPEO (ED50)

Nel 1940 la Commissione Geodetica Italiana decise di adottare l'ellissoide internazionale (Hayford) come superficie di riferimento.

L'ellissoide è stato "*orientato a Roma - Monte Mario*" cioè è stato reso tangente al geode in questo punto, annullando la deviazione della verticale.

Analogamente all'Italia, ogni Stato aveva adottato un proprio sistema di riferimento nazionale rendendo così incompatibili le coordinate di punti appartenenti a Stati diversi.

Dopo la seconda guerra mondiale fu deciso di unificare i sistemi di riferimento nell'ambito dell'AIG (Associazione Internazionale di Geodesia) mediante un calcolo di compensazione generale delle reti geodetiche europee (eseguito dal Coast and Geodetic Survey e Army Map Service statunitensi) con i seguenti criteri:

- > superficie di riferimento: ellissoide internazionale (Hayford)
- > centro di emanazione: osservatorio di Postdam (Germania)
- > origine della longitudine: meridiano di Greenwich

Nel centro di emanazione non è stata annullata la deviazione della verticale ma è stata lasciata una deviazione residua in modo da minimizzare le deviazioni nelle altre reti nazionali. In altri termini è stato definito *l'orientamento medio europeo o European Datum 1950 (ED50)*.

Il nuovo orientamento dell'ellissoide di riferimento comporta la variazione delle coordinate di tutti i punti rappresentati.

Ad esempio le coordinate di Roma M. Mario nei due sistemi di riferimento saranno:

orientamento ellissoide	longitudine λ	Latitudine ϕ
Roma Monte Mario	0° 0 12° 27' 08",40	41° 55' 25",51
ED50 (Potsdam)	12° 27' 10",93	41° 55' 31",49

Dopo le operazioni di compensazione generale delle reti, le coordinate dei punti trigonometrici italiani hanno ovviamente assunto valori diversi da quelli del sistema nazionale. Tra le coordinate di uno stesso punto, nei due sistemi, non vi è alcuna possibilità di definire delle relazioni analitiche di trasformazione.

La figura seguente mostra le differenze in latitudine ed in longitudine (esprese in secondi) riscontrate tra i due sistemi (ellissoide di Hayford orientato a Roma Monte Mario ed ellissoide di Hayford orientato a Postdam)

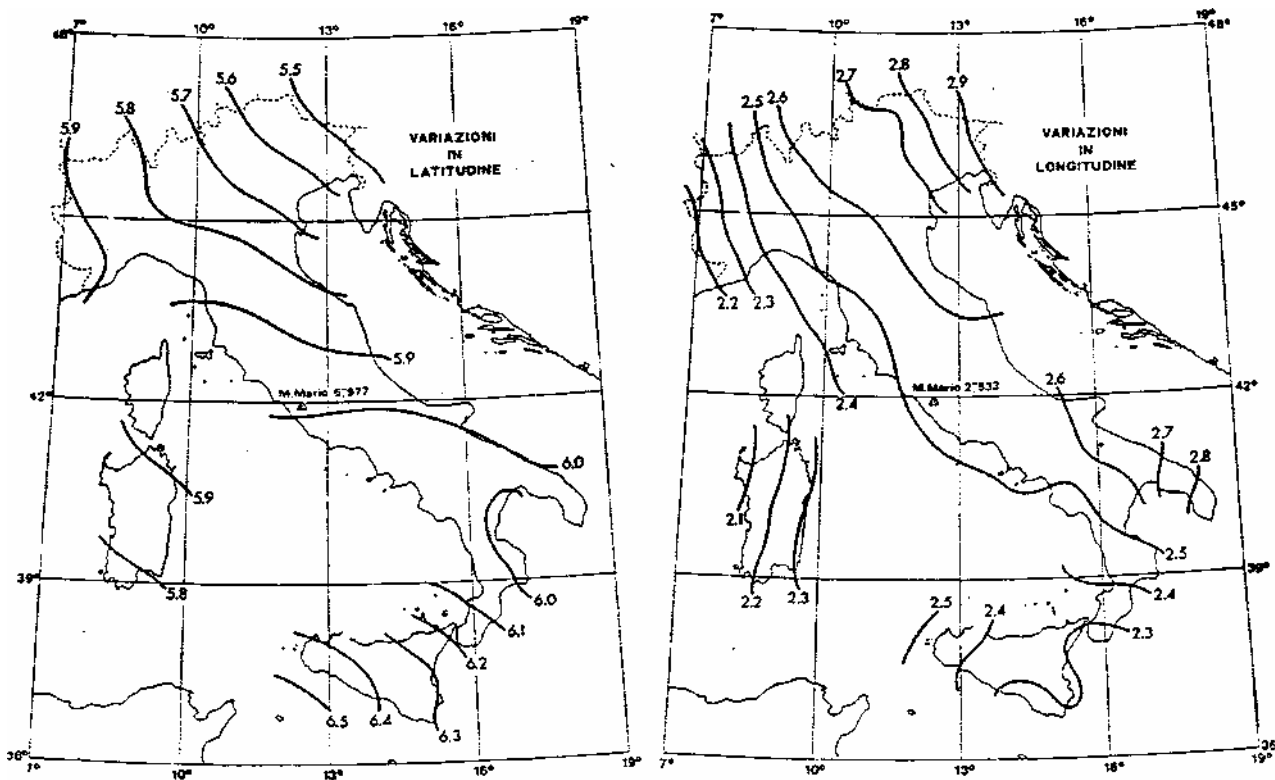


Fig. 2.37 curve isotransitive di conversione da Gauss-Boaga a UTM

Il sistema europeo è stato adottato in parte anche da alcune nazioni africane ed asiatiche:

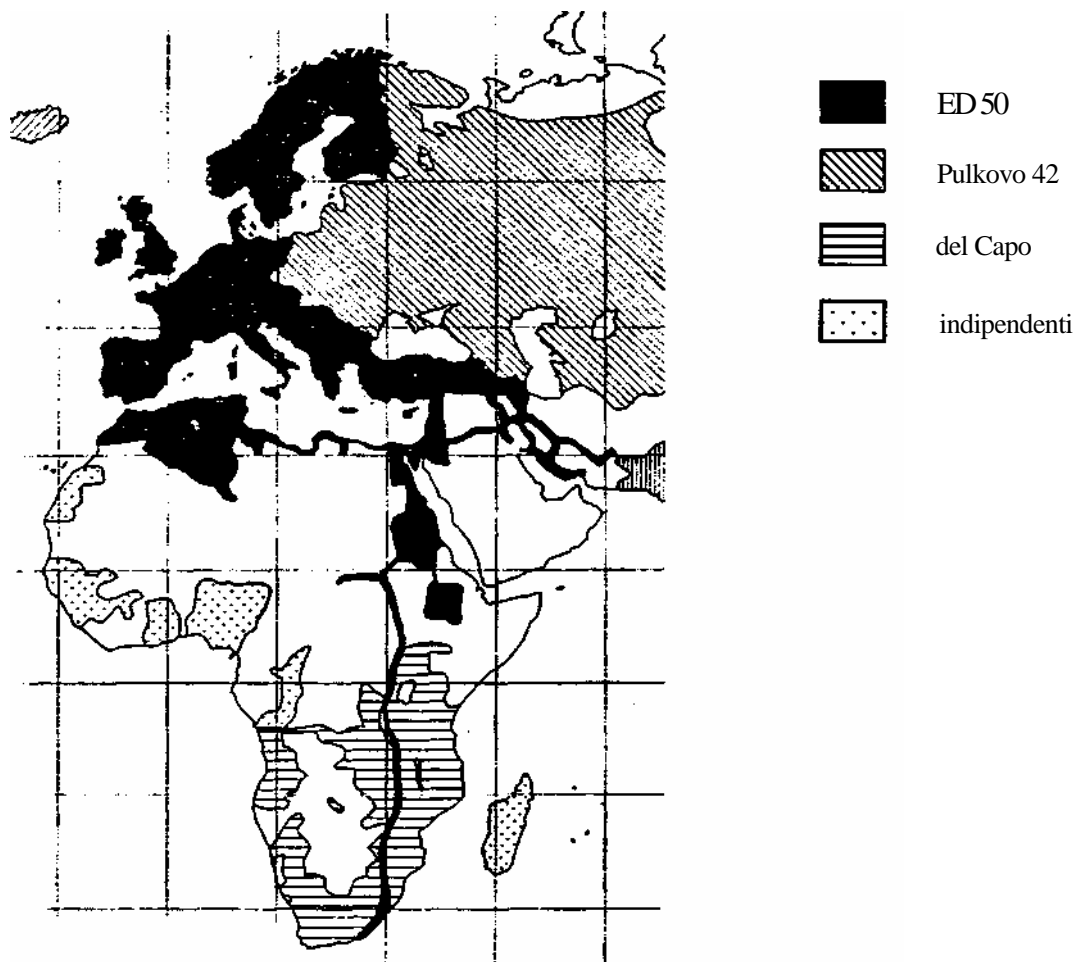


Fig. 2.38 Nazioni che hanno adottato il sistema ED50

Anche il sistema UTM prevede un taglio geografico dei fogli (secondo le trasformate di meridiani e di paralleli) così come era previsto dalla cartografia nazionale italiana.

Naturalmente il taglio è diverso da quello adottato dalla nuova cartografia ufficiale italiana La cartografia IGM che viene prodotta oggi, segue questo nuovo taglio (UTM) che ha come riferimento il foglio in scala 1:50.000 e tutti i relativi sottomultipli come indicato in Fig. 39.

La dimensione geografica della cartografia ufficiale è la seguente:

tipo	scala	$\Delta\lambda$	$\Delta\varphi$
FOGLIO	1:50.000	20'	12'
SEZIONE	1:25.000	10'	6'
SEZIONE	1:10.000	5'	3'
ELEMENTO	1:5.000	2' 30"	1' 30"
MAPPA	1:2.000	1'	36"
MAPPA	1:1.000	30"	18"

3.1. TRATTAMENTO STATISTICO DELLE MISURE

Misurare una grandezza significa paragonarla con un'altra della stessa specie ed esprimere il rapporto tra le due mediante un numero che costituisce il risultato della misura.

L'associazione è del tutto arbitraria; infatti una stessa grandezza può essere associata a numeri diversi senza creare ambiguità.

Ad esempio:

una lunghezza può essere espressa in	metri (m)
	pollici (inch)
un angolo retto può essere espresso da	90°
	100^{gon}
	$\pi/2^{\text{rad}}$

Il numero è funzione del sistema di misura.

Definito il sistema di misura, l'arbitrarietà della scelta del numero cade.

Come si misura una grandezza?: conosciamo tre tipi di operazioni di misura

> MISURE DIRETTE:

la *misura diretta* di una grandezza è definita logicamente nel seguente modo:

- si costruisce una grandezza della stessa specie di quella da misurare costituita da un numero intero di quantità uguali (unità di misura) definendo delle unità campione;
- si sommano opportunamente le unità campione (unità costruita) in modo da avere una quantità uguale a quella da misurare utilizzando uno strumento che permetta il confronto di uguaglianza tra quantità da misurare e quantità costruita;
- si conta il numero di unità campione contenute nella quantità costruita: tale numero si chiama misura diretta della grandezza.

esempio: pesata di un oggetto

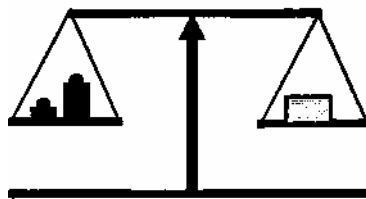


Fig. 3.1 misura diretta di una grandezza

Spesso le misure dirette che si eseguono sono soggette a condizioni geometriche (ad esempio la somma degli angoli interni di un triangolo deve essere pari a π , ecc.). Queste condizioni, che a volte assumono forma anche molto complessa, sono utili per verificare la presenza di errori grossolani, consentono di valutare la precisione globale delle misure e possono essere utilizzate per *compensare* le misure eseguite. Compensare una serie di misure significa correggere opportunamente tali misure in modo che le condizioni geometriche cui esse devono obbedire siano soddisfatte.

La misura diretta assocerà un numero alla grandezza in esame.

A priori è *impossibile predire* in modo deterministico il risultato della misura: se ripetiamo l'operazione in un momento successivo e se lo strumento di misura è sufficientemente preciso troveremo un secondo numero da associare alla stessa grandezza.

Nell'esempio della pesata notiamo che se vogliamo stimare il peso dell'oggetto al mg, ripetendo l 87
misura più volte, otterremo numeri diversi tra loro, mentre, se limitiamo la precisione al g, il
risultato delle varie misure fornirà sempre lo stesso valore.

Questo fatto non è spiegabile razionalmente: *ripetendo più volte la misura di una grandezza si dovrebbe ottenere sempre lo stesso valore*. Nella pratica operativa ciò non si verifica mai. L'indeterminazione si presenta però solo quando la precisione di misura dell'apparato usato è massima

Dobbiamo concludere che:

esiste una **misura vera, mai raggiungibile**, ed infinite **stime** di tale misura più o meno approssimate.

Per chiarire ulteriormente la discrasia esistente tra la pratica operativa della misura e l'aspettativa teorica del risultato, consideriamo l'esempio consueto del tiro a segno.

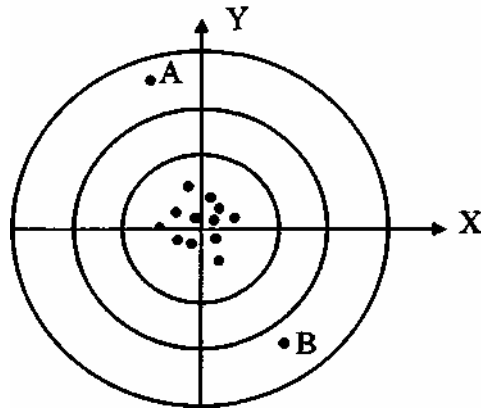


Fig. 3.2 errori accidentali e grossolani

notiamo che:

- > la maggior parte dei fori si addensa intorno al centro
- >• gli scostamenti dal centro sono distribuiti in modo abbastanza uniforme
- > i grossi scostamenti sono assai rari (A e B)

Possiamo concludere che gli **errori piccoli** sono frequenti ed inevitabili ed hanno una distribuzione del tutto casuale attorno al centro del bersaglio.

Gli **errori grossi** sono rari. I primi li chiamiamo **errori accidentali** i secondi **errori grossolani**.

Quando la misura di una grandezza fisica viene realizzata in modo corretto, cioè avendo cura di eliminare eventuali errori grossolani e sistematici, la ripetizione di tale operazione consente di evidenziare alcuni fenomeni:

- > i risultati dell'operazione di misura cambiano ad ogni ripetizione in modo imprevedibile;
- > le differenze tra i vari risultati così ottenuti sono piccole rispetto alla precisione dello strumento e lo scarto massimo è tanto più piccolo quanto più è accurata la metodologia di misura adottata;
- > se le ripetizioni sono in numero considerevole, si può notare che il rapporto tra il numero di volte in cui ogni valore si è presentato e il numero totale di misure (*frequenza relativa*) tende a stabilizzarsi.

In questo caso si dice che ogni operazione di misura è affetta da un *errore accidentale*, intendendo con tale termine l'effetto di una serie non definita di cause che provocano errori sulle misure non prevedibili a priori e di limitata entità.

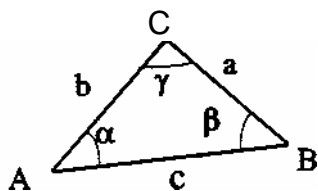
A questo punto il problema consiste nel determinare quale sarà, tra tutti i valori ottenuti, quello da utilizzare in fase di calcolo.

La scienza che studia questi fenomeni è la statistica matematica.

Potremmo definire la statistica come *la scienza che tenta di descrivere con certezza l'incertezza*.

Questi errori non sono eliminabili ma si possono controllare solo in modo statistico.

Gli **errori grossolani** sono i più banali anche se spesso sono i più difficili da individuare. Si parla di *errori grossolani* quando la loro causa risiede essenzialmente in distrazioni dell'operatore oppure in uso non corretto dello strumento di misura. Solitamente questi errori sono di entità notevole per cui è sufficiente sottoporre a verifiche periodiche i risultati di misura per poterli evidenziare e dunque eliminare. In topografia e in fotogrammetria generalmente si adottano schemi di misura tali da consentire un sistematico controllo delle misure eseguite (ad esempio di un triangolo, invece di misurare solo due angoli e determinare il terzo come supplementare della somma dei due misurati, si misurano tutti e tre gli angoli e si controlla che la loro somma rispetti, a meno di errori accidentali, la condizione geometrica).



Quando non è possibile adottare uno schema di controllo, si ricorre alla ripetizione **indipendente** delle misure (es.: poligonale aperta di tracciamento di una galleria)

il risultato sul bersaglio si può anche presentare in questa forma:

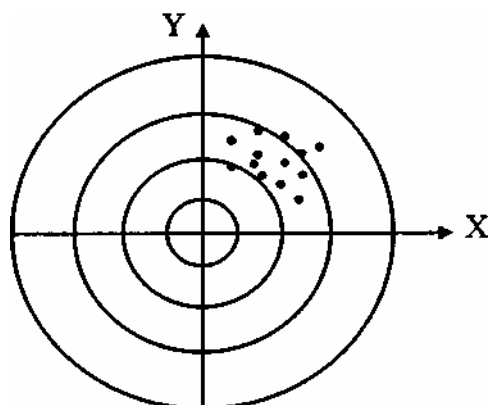


Fig. 3.3 errori sistematici

La rosa dei colpi è simile alla precedente ma è tutta spostata rispetto al centro. Le cause possono essere molteplici: mirino non ben tarato, difetto di vista del tiratore, difetto della carabina.

Si definiscono **errori sistematici** quelli che sono causati essenzialmente dalle srettifiche degli strumenti di misura. Essi possono essere messi in evidenza mediante la ripetizione delle misure con strumenti diversi. La natura degli errori sistematici fa sì che essi possano influire sulle misure sempre con una determinata legge, ma presentarsi con valori e segni diversi a seconda delle condizioni operative nelle quali viene eseguita la misura. Durante lo studio degli strumenti e dei metodi operativi di misura saranno evidenziati vari tipi di errore sistematici (esempio: errori residui di inclinazione e di collimazione nel teodolite, ecc.) e i relativi accorgimenti pratici di eliminazione come per esempio la regola di Bessel nella misura degli angoli azimutali. In particolare le strade seguite per l'eliminazione degli errori sistematici possono essere così sintetizzate:

- > si eseguono le tarature e le rettifiche degli strumenti di misura con precisioni superiori a quelle richieste durante il lavoro;
- > si adottano particolari procedure operative che ne consentano l'eliminazione automatica;
- > si cerca di renderli variabili in valore e segno variando in modo casuale le condizioni operative di misura in modo che mediando i risultati gli effetti degli errori sistematici si "autocompensino" come per esempio la procedura di rimessa in stazione del teodolite per l'eliminazione dell'errore residuo di verticalità nella misura degli angoli azimutali.

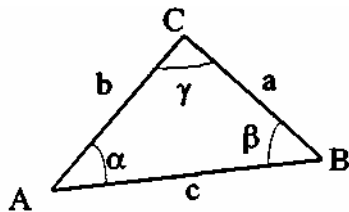
Sia gli errori grossolani sia quelli sistematici devono comunque essere eliminati dall'operatore prima di una qualsiasi elaborazione dei risultati delle misure.

> MISURE INDIRETTE:

La *misura indiretta di una grandezza* è definita da un legame funzionale che lega tale grandezza ad altre grandezze direttamente misurabili. In questo contesto il legame funzionale costituisce lo strumento di misura della grandezza in oggetto.

La *misura indiretta simultanea di più grandezze* si basa sulla definizione di un sistema di equazioni che lega grandezze misurabili direttamente alle grandezze che si vogliono misurare in modo indiretto. L'equazione che lega grandezze incognite a grandezze misurate direttamente si chiama *equazione alle misure*.

Ad esempio:



La misura indiretta simultanea di più grandezze è realizzabile attraverso un sistema di equazioni che se misuriamo direttamente: a , α , β possiamo ricavare la misura indiretta di b tramite la relazione:

$$b = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \beta$$

legano le grandezze misurabili direttamente alle grandezze incognite da ricavare indirettamente.

Ad esempio nelle reti topografiche di triangolazione, poligonali, intersezioni si misurano direttamente angoli e distanze e si ricavano indirettamente le coordinate dei vertici della rete.

> MISURE DIRETTE CONDIZIONATE

sono misure dirette legate fra loro da un legame funzionale;

ad esempio la misura diretta di tre angoli di un triangolo piano deve verificare la legge:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

3.1.1. VARIABILE STATISTICA AD UNA DIMENSIONE

IL termine *statistica* risale al XVII secolo e fu usato per la prima volta da professori tedeschi di scienze politiche per indicare una scienza che forniva tutte le indicazioni riguardanti uno Stato. Nel tempo si sono convogliate in questa disciplina nozioni fondamentali provenienti da altri campi di indagine che ne hanno trasformato gradualmente la struttura (ad esempio la Dottrina della Sorte, l'Aritmetica Politica, l'Astronomia, la Geodesia, la Topografia).

La statistica inizialmente consentiva applicazioni esclusivamente descrittive ossia di classificazione e descrizione di un evento noto e censito (*statistica descrittiva*).

Successivamente, grazie all'influsso del Calcolo delle Probabilità, sono state constatate analogie, permanenze, forme generali di legami strutturali che hanno permesso di formulare ipotesi teoriche legate ai fenomeni osservati (*studio dei modelli probabilistici*). Accanto a questi due filoni storici esiste il campo dell'*inferenza statistica* ossia quell'insieme di metodologie che permettono di decidere in base a campioni di ampiezza limitata sulla correttezza o meno di ipotesi fatte in precedenza sul comportamento del fenomeno in esame.

Questi ultimi due campi rappresentano per noi l'interesse preminente. Risulta però necessario, per comprendere in modo soddisfacente il problema, fissare alcuni concetti di statistica descrittiva (variabili statistiche a una e due dimensioni) e di calcolo delle probabilità.

La terminologia adottata è la seguente:

POPOLAZIONE: è un insieme ben definito di *individui* ognuno dei quali è caratterizzato da un *attributo X* che può assumere valori diversi.

INDIVIDUI: sono i soggetti dell'indagine statistica

ATTRIBUTO: è una caratteristica degli individui che viene analizzata statisticamente

VALORE ARGOMENTALE: è la misura dell'attributo

Studiare una popolazione dal punto di vista di un suo attributo significa esaminare come si distribuiscono le varie forme dell'attributo sugli individui della popolazione. Per poter raggiungere questo scopo è necessario che si verifichino le seguenti condizioni:

- > ogni individuo della popolazione deve possedere un solo valore argomentale dell'attributo;
- > parecchi individui della popolazione possono avere lo stesso valore argomentale dell'attributo;
- > l'attributo deve essere presente, con diversi valori argomentali, in tutti gli individui della popolazione;
- > devono esistere almeno due individui nella popolazione in possesso di valori argomentali dell'attributo diversi.

Classificare la popolazione secondo l'attributo prescelto, significa individuare il valore argomentale che spetta a ciascun individuo della popolazione.

Per mezzo della classificazione secondo l'attributo X degli N individui costituenti la popolazione C si raggruppano insieme quegli individui che possiedono lo stesso valore argomentale dell'attributo (X_1, X_2, \dots, X_n). In questo modo si determinano le numerosità F_1, F_2, \dots, F_n degli individui compresi nelle classi definite dai valori argomentali corrispondenti.

Con queste due serie di valori in corrispondenza biunivoca si costruisce una *rappresentazione analitica* della popolazione C classificata secondo l'attributo X:

$$C \begin{cases} X_1 & X_2 & X_3 & \dots & X_n \\ F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_n \end{cases} \quad \sum_{i=1}^n F_i = N$$

nella quale la prima riga rappresenta la successione dei valori argomentali, mentre nella seconda riga sono riportati i valori delle numerosità F_i di individui della popolazione che possiedono l'argomento X sotto le rispettive forme $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

Le quantità F_i si chiamano *frequenze assolute* del valore X_i dell'argomento nella popolazione. Un altro tipo di rappresentazione analitica si ottiene dalla (1) sostituendo alle frequenze assolute i valori $f_i = F_i/N$ detti *frequenze relative*.

(2)

$$C \begin{cases} X_1 & X_2 & X_3 & \dots & X_n \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n \end{cases} \quad \sum_{i=1}^n f_i = 1$$

Le uguaglianze riportate nella (1) e nella (2) non sono inutili aggiunte, ma esprimono la garanzia che la popolazione sia stata analizzata per intero e che tutti i suoi individui siano sinteticamente rappresentati in C .

Le frequenze sia assolute che relative, sono additive: quindi se si considerano indifferenziati due valori argomentali $x^\circ = x_i + x_j$ la frequenza assoluta di x° sarà $F^\circ = F_i + F_j$ e quella relativa sarà $f^\circ = f_i + f_j$. La C rappresentata dalla (1) o dalla (2) prende il nome di **variabile statistica a una dimensione.**

In alcuni casi la classificazione di una popolazione secondo un determinato attributo può essere fatta usando non più i singoli valori argomentali dell'attributo, ma delle classi di opportuna ampiezza.

Ad esempio si può determinare il numero di individui il cui valore argomentale sia compreso fra X_i e X_j estremi inclusi, e associare alla classe $X_i | - | X_j$ tale numero, che verrà quindi chiamato frequenza assoluta della classe. Ogni classe sarà inoltre contraddistinta da un valore medio o punto medio della classe e da due limiti di classe che generalmente non coincidono con i dati osservati.

La variabile C può essere rappresentata anche in svariate forme grafiche.

Si riportino, in scala opportuna, su di una semiretta, i valori numerici dell'argomento X , dopo averli disposti in ordine crescente; essi risulteranno tutti distribuiti sul segmento $x_1 x_n$. In corrispondenza di ciascun valore x_i si riporti in direzione normale alla semiretta $x_1 x_n$, un segmento di lunghezza proporzionale alla frequenza totale F_i di quel valore argomentale. Si avrà così un diagramma di frequenza.

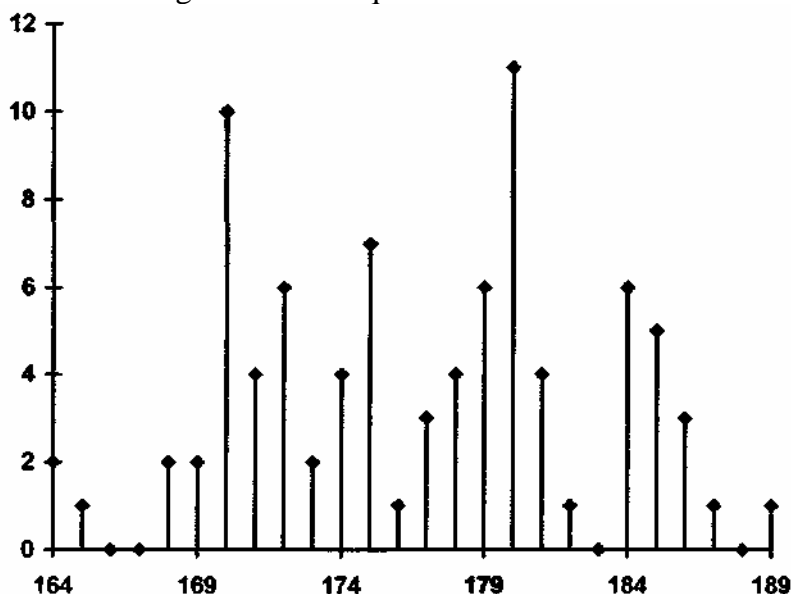


Fig. 3.4 Diagramma di frequenza di una variabile statistica

Quando la serie dei valori argomentali è molto numerosa e compresa in un intervallo x_i-x_n assai limitato, allora può essere conveniente un'altra rappresentazione grafica della variabile statistica. La serie di valori argomentali riportata graficamente su una retta viene suddivisa in tanti intervalli o classi, ciascuno contenente un certo numero di valori argomentali. Siano x'_1, x'_2, \dots, x'_m i punti di separazione o limiti delle classi che, per evitare ambiguità, è meglio non coincidano con i valori argomentali propri della variabile statistica. Si costruisca sopra ogni intervallo costituito dal segmento x'_i, x'_{i+1} , un rettangolo di area proporzionale al numero di individui della popolazione in possesso di valore argomentale compreso entro i limiti X'_i, X'_{i+1} . La figura risultante si chiama istogramma:

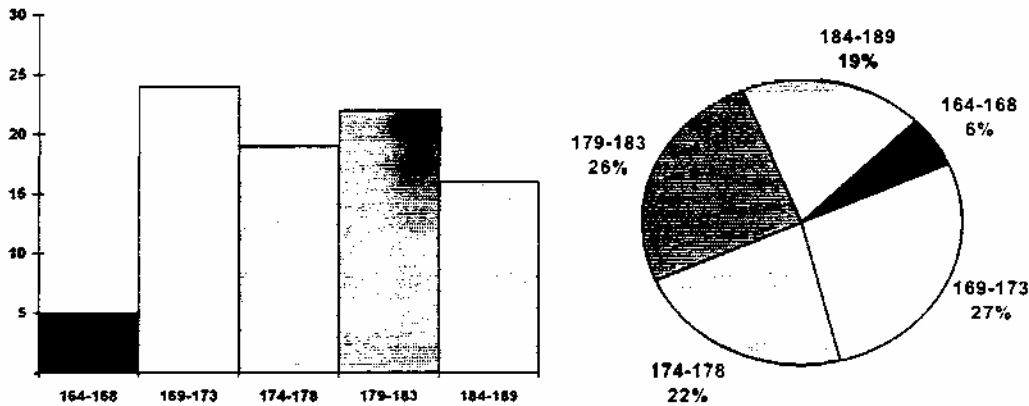


Fig. 3.5 Istogramma della variabile statistica (rappresentazione a barre e a torta)

n numero che esprime l'area racchiusa dall'istogramma coincide con la numerosità della popolazione. Se anziché riferirsi alle frequenze assolute si costruiscono i rettangoli in modo che le singole aree coincidano con le frequenze relative degli individui appartenenti alle singole classi l'area totale racchiusa dall'istogramma sarà pari all'unità e in questo caso si parlerà di istogramma normalizzato.

Si definisce *funzione cumulativa di frequenza o funzione di distribuzione* della variabile statistica C la seguente doppia successione in corrispondenza biunivoca

$$C \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ G_1 = \frac{F_1}{N} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 \\ G_2 = \frac{F_1 + F_2}{N} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_n \\ G_n = \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_n}{N} \end{array} \right. \quad (3)$$

cioè una variabile statistica avente i medesimi valori argomentali della variabile statistica in esame e frequenze relative pari alla somma delle frequenze relative di tutti i valori argomentali minori o uguali a quello in esame.

Si dice *diagramma cumulativo delle frequenze o diagramma di distribuzione* l'istogramma della funzione cumulativa di frequenza.

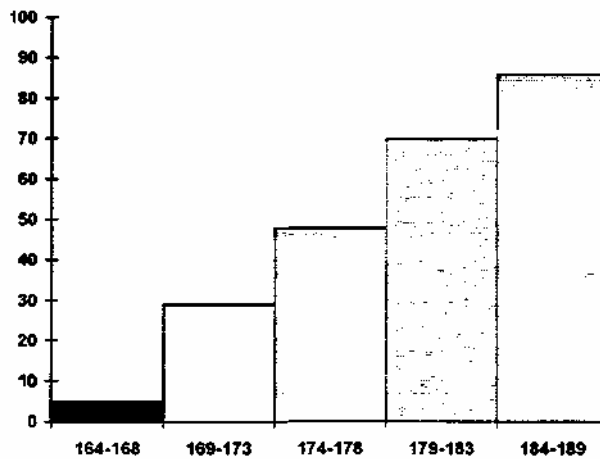


Fig. 3.6 Diagramma cumulativo di frequenza

Nella serie di valori argomentali ve ne sono alcuni di particolare importanza per la descrizione della variabile statistica a cui essi si riferiscono.

Quando la variabile statistica è rappresentata nella forma (1) si possono definire le seguenti caratteristiche:

- > *la moda* è quel valore argomentale per cui è massima la frequenza;
- > *la mediana* è quel valore argomentale che divide l'istogramma in due aree uguali

La doppia serie di numeri [(1) e (2)] o gli istogrammi visti prima descrivono perfettamente la variabile statistica. Per consentire una descrizione più matematica della variabile statistica in esame si introducono alcuni indici che, ricavati usando tutti i dati che compongono la variabile, ne precisano alcune caratteristiche essenziali. Tali indici vengono chiamati nel loro insieme *statistiche*.

Si possono calcolare dei parametri che forniscono informazioni globali anche se incomplete; questi parametri sono chiamati *momenti*:

Si definisce momento k-esimo rispetto al polo θ di una variabile statistica a una dimensione la seguente espressione:

$$m_{k,\theta} = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^k \frac{F_i}{N} \quad (4)$$

La serie dei momenti di una variabile statistica, rispetto ad un particolare valore del polo (ad esempio lo 0) è sufficiente per rappresentare tutte le caratteristiche della sua distribuzione.

I momenti più significativi che descrivono una variabile statistica sono i seguenti:

momento di 1° grado o **media**

$$m_{1,0} = \sum_{i=1}^n x_i f_i \quad (5)$$

momento di 2° grado o **valore quadratico medio**

$$m_{2,0} = \sum_{i=1}^n x_i^2 f_i \quad (6)$$

Dalla *variabile statistica* C è possibile derivare una *variabile statistica scarto* V avente la stessa distribuzione e valori argomentali:

$$V_i = X_i - m_{1,0}$$

la nuova variabile scarto V avrà lo stesso istogramma della variabile C ma l'origine delle ascisse coinciderà con il valore della media $m_{1,0}$ (media nulla).

Un parametro caratteristico della nuova distribuzione V è:

il momento di secondo grado della variabile scarto o varianza S^2 :

$$m_{2,m} = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_{1,0})^2 f_i$$

la radice quadrata della varianza prende il nome di *scarto quadratico medio* o *deviazione standard*.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Dalle definizioni date derivano le seguenti proprietà:

1. La media m è il valore del polo per cui è minimo il valore quadratico medio:

proponiamoci di voler trovare il valore di θ per il quale è minima la funzione $m_{2,\theta} = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 f_i$ deriviamo la funzione rispetto alla variabile θ e cerchiamo il valore per cui tale derivata si

annulla: $-2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) f_i = 0 \Rightarrow \theta = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ **valore che coincide con la media della popolazione.**

2. La media m della popolazione dagli scarti è nulla; infatti per la definizione di media risulta:

$$m_{1,m} = \sum_{i=1}^n (x_i - m) f_i = \sum_{i=1}^n x_i f_i - m = 0$$

3. Tra i tre indici prima definiti sussiste la relazione:

$$\sigma_x^2 = m_{2,0}(x) - m_{1,0}^2(x)$$

infatti sviluppando il quadrato contenuto nella definizione di varianza si ottiene:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_{1,0})^2 f_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 f_i + m_{1,0}^2 \sum_{i=1}^n f_i - 2m_{1,0} \sum_{i=1}^n x_i f_i = m_{2,0} + m_{1,0}^2 - 2m_{1,0}^2 = m_{2,0} - m_{1,0}^2$$

Media e varianza descrivono sinteticamente la popolazione.

La media può essere considerata il valore a cui *tendono* tutti gli individui della popolazione.

La *varianza* indica la maggiore o minore dispersione degli individui attorno al valore della media.

Confrontando due distribuzioni che hanno la stessa media e varianza diverse, si può notare che gli individui sono più dispersi, rispetto al valore della media, nella distribuzione a varianza maggiore.

Per comprendere meglio il significato di media e di varianza pensiamo ad un'analogia meccanica: Se i valori delle frequenze di una variabile statistica vengono interpretati come valori di masse disposte lungo un asse, aventi come ordinata il relativo valore argomentale, la media, così come è stata definita, coincide con il baricentro delle masse.

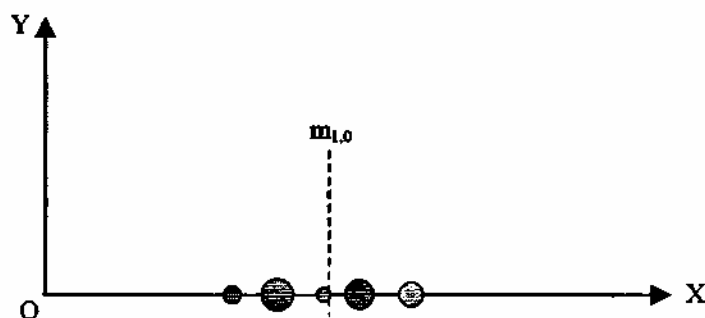


Fig. 3.7 Analogia meccanica della media di un v.s.

Analogamente la varianza rappresenterà il momento d'inerzia di un sistema nel quale si interpretino le frequenze relative come masse e i valori argomentali della variabile scarto associata come distanze dal baricentro di tale sistema.

Come noto dalla meccanica razionale il momento d'inerzia aumenta all'aumentare della dispersione delle masse attorno al loro baricentro (la media) e quindi la varianza è propriamente un indice di dispersione dei valori argomentali attorno al valore della media della variabile statistica.

Inoltre ricordando che la somma delle frequenze relative è pari all'unità, la varianza rappresenta il rotore, cioè quella distanza dall'asse di rotazione in cui si potrebbe concentrare tutta la massa per mantenere invariato il momento d'inerzia.

Riassumendo quanto detto prima si può dire che la moda esprime una proprietà della curva interpolatrice della distribuzione, la mediana una proprietà dell'area individuata dalla curva stessa, mentre la media e la varianza rappresentano delle proprietà meccaniche della distribuzione. Tra la media, la mediana e la moda sussiste una relazione per cui il valore della mediana è sempre compreso fra quello della media e quello della moda.

Una distribuzione si dice asimmetrica quando i tre valori predetti sono diversi fra loro. Una misura dell'asimmetria è data dall'indice di SKEWNESS (S):

$$S = \frac{\text{media} - \text{moda}}{s}$$

Un secondo modo per misurare l'asimmetria di una distribuzione è dato dal coefficiente g e così definito:

$$g = \sum_{i=1} \left(\frac{x_i - m}{s} \right)^3 \frac{F_i}{N}$$

che risulta nullo se la distribuzione è simmetrica, positivo se il diagramma di frequenza presenta una coda verso destra e negativo nel caso contrario.

La condizione $g = 0$ è necessaria ma non sufficiente per dimostrare la simmetria di una distribuzione

(cioè tutte le distribuzioni simmetriche hanno g nullo, ma non tutte le distribuzioni con g nullo sono simmetriche).

3.1.2 DISUGUAGLIANZA DI TCHEBYCHEFF

Si vuole dimostrare che la maggior parte degli individui di una distribuzione sono contenuti nell'intervallo $m + 3s$ e $m - 3s$ **qualunque sia la distribuzione.**

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_{1,0})^2 f_i \quad \text{corrispondente a} \quad \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 f_i$$

avremo:

Esplicitando la varianza secondo la definizione:

$$\sigma_x^2 = v_1^2 f_1 + v_2^2 f_2 + v_3^2 f_3 + \dots + v_n^2 f_n$$

fissiamo un valore dello scarto v_m compreso tra v_l e v_n e poniamo a zero tutti i valori degli scarti inferiori o uguali a v_m e uguali a v_m tutti gli scarti superiori:

$$\begin{array}{ccccccc} v_1^2 f_1 & + & v_2^2 f_2 & + & v_m^2 f_m & + & v_{m+1}^2 f_{m+1} & + & v_{m+2}^2 f_{m+2} & + & v_n^2 f_n \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & & 0 & & 0 & & v_m^2 & & v_m^2 & & v_m^2 \end{array}$$

si ha che:

$$\sigma_x^2 \geq v_m^2 (f_{m+1} + f_{m+2} + \dots + f_n)$$

La somma dei termini tra parentesi definisce la frequenza relativa f^* degli scarti che hanno un valore assoluto superiore a v_m .

Poiché la somma di tutte le frequenze relative è uguale a 1, la frequenza relativa degli scarti inferiori o uguali a v_m (f_*) sarà:

$$\begin{aligned} f_* &= 1 - f^* \\ \sigma_x^2 &\geq v_m^2 (1 - f_*) \\ \sigma_x^2 &\geq v_m^2 - v_m^2 f_* \\ v_m^2 f_* &\geq v_m^2 - \sigma_x^2 \\ f_* &\geq 1 - \frac{\sigma_x^2}{v_m^2} \end{aligned}$$

se poniamo $v_m = \lambda \sigma_x$ avremo:

$$f_* \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2} \tag{10}$$

La disuguaglianza è significativa per valori di $|t| > 1$

$$\begin{array}{ll} v_m = 2 \sigma_x & f. = 1 - \frac{1}{4} = 0,75 \\ v_m = 3 \sigma_x & f. = 1 - \frac{1}{9} = 0,89 \end{array}$$

In una distribuzione qualsiasi, i valori argomentali della popolazione si distribuiranno attorno al valore della media secondo le seguenti percentuali:

il 75% degli individui saranno contenuti nell'intervallo $m \pm 2S$

l'89% degli individui saranno contenuti nell'intervallo $m \pm 3S$

3.1.3. SIGNIFICATI COLLATERALI DEL TERMINE MEDIA

La media di una distribuzione ha un significato molto limitato in quanto dice quasi nulla sulla struttura interna della variabile statistica in esame.

In molti casi, e in particolare in quelli che ci riguarderanno più da vicino, alla media viene però attribuito un significato che trascende il suo senso descrittivo; nei casi che analizzeremo in questo corso, la media esprime la tendenza della popolazione intera a voler assumere quel valore senza differenziazioni tra gli individui. La media assume allora il significato di struttura interna della popolazione che alcuni agenti perturbatori hanno mascherato nei singoli individui dietro una variabilità contingente.

In altri casi si cerca di semplificare una questione che coinvolge un insieme di individui sintetizzando con un solo valore i differenti valori argomentali posseduti dagli individui.

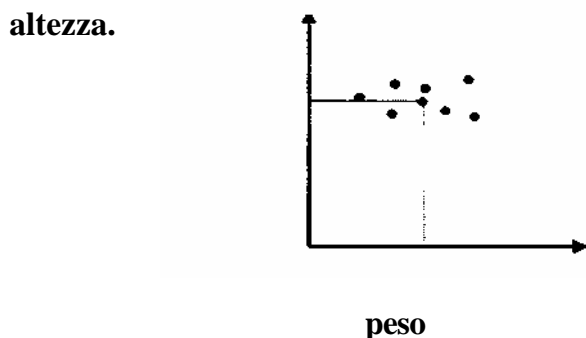
Questo valore di media viene utilizzato come se fosse il valore argomentale posseduto univocamente da tutti gli individui della popolazione.

Questo significato relativo di media è di uso frequentissimo nel parlare comune; per esempio, ogni volta che si parla di consumo medio per abitante di un certo prodotto, tale valore medio non viene calcolato in vista del consumatore che non si sente per nulla rappresentato da tale numero, né tanto meno in vista di una indagine sulla distribuzione statistica dei consumi, ma solamente dal punto di vista delle necessità di approvvigionamento del prodotto. In questo contesto non interessa come il prodotto viene suddiviso nel consumo fra i diversi individui, ma solo il consumo medio di ogni individuo.

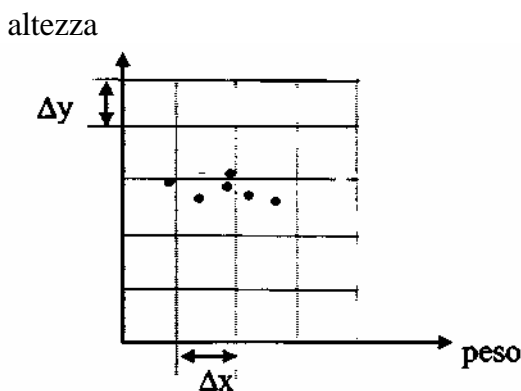
Ogni volta che si sente parlare di media è importante avere presenti questi significati e saperli applicare correttamente.

3.1.4. VARIABILE STATISTICA A DUE DIMENSIONI

Supponiamo che gli individui di una popolazione siano caratterizzati da due attributi che possono assumere forme diverse (ad esempio per ogni abitante di una città si possono considerare il peso e l'altezza).



I valori argomentali assumono il significato di coordinate dell'individuo nell'ambito della popolazione. Analogamente a quanto visto per la variabile statistica ad una dimensione, gli individui possono essere raggruppati in classi, ognuna delle quali è caratterizzata da due valori argomentali x_i e y_j^* e nella quale vanno raggruppati tutti gli individui che hanno valori argomentali compresi in un intervallo D_x nell'intorno di x_i ed in un intervallo D_y nell'intorno di y_j .



Il risultato di un censimento della popolazione considerando due attributi può essere raccolto in una tabella a doppia entrata del tipo di quella qui sotto rappresentata.

$y \Downarrow x \Rightarrow$	x_1	x_2	x_3		x_r	
y_1	F_{11}	F_{21}	F_{31}		F_{r1}	m_1
y_2	F_{12}	F_{22}	F_{32}		F_{r2}	m_2
y_3	F_{13}	F_{23}	F_{33}		F_{r3}	m_3
y_s	F_{1s}	F_{2s}	F_{3s}		F_{rs}	m_s
	n_1	n_2	n_3		n_r	N

Distribuzione condizionata della Y per $x = x_2$ (arrow to F_{21}, F_{22}, F_{23})
 distribuzione marginale della Y (arrow to m_1, m_2, m_3, m_s)
 distribuzione condizionata della X per $y = y_2$ (arrow to F_{12}, F_{22}, F_{32})
 numerosità della popolazione (arrow to N)
 distribuzione marginale della X (arrow to n_1, n_2, n_3, n_r)

Fig. 3.8 tabella a doppia entrata

Ogni F_{jk} della tabella rappresenta la frequenza assoluta degli individui caratterizzati dai valori argomentali X_j, Y_k . Il risultato di tale classificazione si chiama distribuzione a due dimensioni. Nell'ultima colonna della tabella vi sono le somme delle frequenze di ogni riga; questi dati rappresentano la distribuzione marginale della Y cioè una variabile statistica a una dimensione che definisce la distribuzione dell'attributo Y senza tenere conto dei valori argomentali assunti dall'attributo X .

Analogamente i valori riportati nell'ultima riga definiscono la distribuzione marginale dell'attributo X , cioè la variabile statistica monodimensionale che si sarebbe ottenuta censendo la popolazione nei soli riguardi dell'attributo X .

Ovviamente, la somma dei valori dell'ultima riga o dell'ultima colonna, N , è pari al numero totale di individui.

Una generica riga della tabella è una distribuzione condizionata della X , cioè rappresenta il modo in cui si distribuisce l'attributo X tra gli individui della popolazione caratterizzati da un unico valore dell'attributo Y .

Analogamente una generica colonna rappresenta la distribuzione condizionata dell'attributo Y .

Ai valori delle frequenze assolute, possono essere sostituite le frequenze relative. Nelle caselle della tabella a doppia entrata possono essere scritte le frequenze relative f_{jk} ottenute dividendo le frequenze assolute F_{jk} per il numero totale N di individui della popolazione.

$y \downarrow x \Rightarrow$	x_1	x_2	x_3		x_r	
y_1	f_{11}	f_{21}	f_{31}		f_{r1}	μ_1
y_2	f_{12}	f_{22}	f_{32}		f_{r2}	μ_2
y_3	f_{13}	f_{23}	f_{33}		f_{r3}	μ_3
y_s	f_{1s}	f_{2s}	f_{3s}		f_{rs}	μ_s
	v_1	v_2	v_3		v_r	1

Per ottenere le frequenze relative μ e v delle distribuzioni marginali, i numeri dell'ultima colonna e quelli dell'ultima riga vanno divisi anch'essi per il numero N e si ottiene in particolare che:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^r f_{ik} \quad v_i = \sum_{k=1}^s f_{ik} \quad (11)$$

Inoltre risulta evidente che :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s f_{ik} = 1$$

In una distribuzione a due dimensioni x, y valgono le seguenti relazioni:

il momento di primo grado o media della x $m_{1(x)} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s x_i f_{ik} = \sum_{i=1}^r x_i \sum_{k=1}^s f_{ik} = \sum_{i=1}^r x_i v_i$

momento di 2° grado o **valore quadratico medio** della x $m_{2(x)} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s x_i^2 f_{ik} = \sum_{i=1}^r x_i^2 \sum_{k=1}^s f_{ik} = \sum_{i=1}^r x_i^2 v_i$

varianza della x $\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s (x_i - m_{1(x)})^2 f_{ik} = \sum_{i=1}^r (x_i - m_{1(x)})^2 \sum_{k=1}^s f_{ik} = \sum_{i=1}^r (x_i - m_{1(x)})^2 v_i \quad (15)$

Analoghe relazioni si possono ricavare per la variabile y . Come si può notare, le tre statistiche di una delle variabili di una distribuzione a due dimensioni coincidono con le analoghe statistiche calcolate in base alle distribuzioni marginali.

Si può inoltre calcolare il *momento misto*:

$$m_{xy} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s x_i y_k f_{ik}$$

e il momento misto rispetto alle medie chiamato covarianza:

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s (x_i - m_{l(x)})(y_k - m_{l(y)}) f_{ik}$$

Sviluppando la (17) e ricordando la (13) e

l'analogia espressione della media per l'attributo y si può dimostrare che sussiste la seguente relazione:

$$\sigma_{xy} = m_{xy} - m_{l(x)} m_{l(y)}$$

I momenti di secondo grado di una variabile statistica a due dimensioni possono essere considerati quali elementi di una matrice quadrata *simmetrica* chiamata **matrice di varianza - covarianza**:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{vmatrix}$$

In una variabile statistica ad n dimensioni la matrice di varianza - covarianza (es. $n = 3$) sarà:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{vmatrix}$$

La correlazione fra le due variabili di una distribuzione a due dimensioni è una specie di dipendenza, diversa però da quella funzionale in quanto ad un valore di una variabile possono corrispondere più valori della seconda variabile.

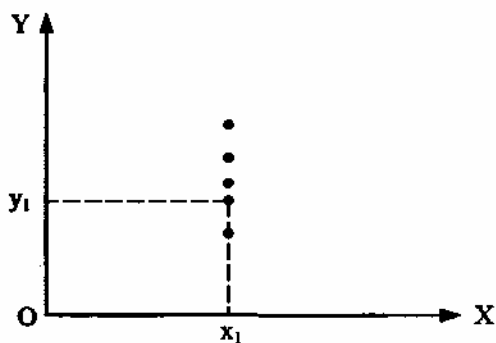


Fig. 3.9 concetto di correlazione

La correlazione può essere forte o debole; una correlazione debole è caratterizzata dal fatto che le distribuzioni condizionate variano poco al variare dell'altra variabile; in una correlazione forte i valori delle due variabili sono quasi legate da una dipendenza funzionale.

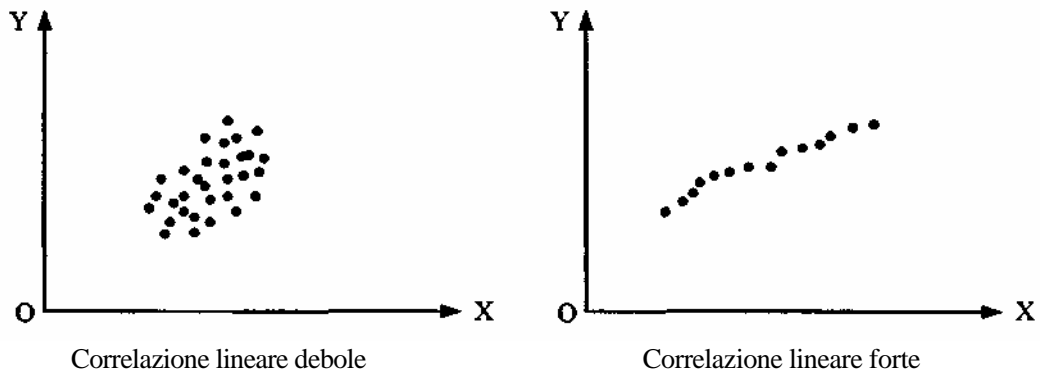


Fig. 3.10 correlazione lineare

La misura della correlazione deve essere indipendente dal valore che assumono le variabili considerate e questo avviene considerando le variabili scarto standardizzate:

$$u = \frac{x - m_{l(x)}}{\sigma_x} \quad v = \frac{y - m_{l(y)}}{\sigma_y}$$

Si definisce *coefficiente di correlazione lineare* la quantità:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Il termine al numeratore della (21) è uguale al momento misto, o covarianza, per cui il coefficiente di correlazione lineare assume la forma:

$$r = \frac{\sum (x_j - m_{l(x)})(y_j - m_{l(y)})}{N \sigma_x \sigma_y}$$

Con riferimento alla tabella prima citata la condizione di indipendenza si esprime con le relazioni:

$$\frac{F_{11}}{n_1} = \frac{F_{21}}{n_2} = \dots = \frac{F_{r1}}{n_r} \quad \frac{F_{12}}{n_1} = \frac{F_{22}}{n_2} = \dots = \frac{F_{r2}}{n_r} \quad \frac{F_{1s}}{n_1} = \frac{F_{2s}}{n_2} = \dots = \frac{F_{rs}}{n_r}$$

ovvero:

$$\frac{F_{1j}}{n_1} = \frac{F_{2j}}{n_2} = \dots = \frac{F_{rj}}{n_r} \quad j = 1, 2, \dots, s$$

Applicando la regola del componendo si ottiene inoltre:

$$\begin{aligned} \frac{F_{1j}}{n_1} &= \frac{F_{1j} + F_{2j} + \dots + F_{rj}}{n_1 + n_2 + \dots + n_r} = \frac{m_j}{N} = \mu_j \\ \frac{F_{2j}}{n_2} &= \frac{F_{1j} + F_{2j} + \dots + F_{rj}}{n_1 + n_2 + \dots + n_r} = \frac{m_j}{N} = \mu_j \\ &\dots \\ \frac{F_{rj}}{n_r} &= \frac{F_{1j} + F_{2j} + \dots + F_{rj}}{n_1 + n_2 + \dots + n_r} = \frac{m_j}{N} = \mu_j \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_{ij}}{m_i} = \frac{m_j}{N}$$

102

Quindi se le variabili sono indipendenti le distribuzioni condizionate di una di esse sono uguali fra loro e coincidono con la distribuzione marginale.

Se la y non è correlata con la x , anche la x risulta non essere correlata con la y per cui è valida anche la seguente relazione:

$$\frac{F_{ij}}{m_j} = \frac{n_i}{N}$$

Inoltre si ha :

$$\frac{F_{ij}}{N} = f_{ij} = \frac{n_i}{N} \cdot \frac{m_j}{N} = v_i \cdot \mu_j$$

Da questa ultima relazione discende la seguente proprietà fondamentale:

in una distribuzione bidimensionale in cui le variabili non sono correlate, la frequenza relativa che compete a ogni intervallo bidimensionale, è uguale al prodotto delle frequenze relative delle distribuzioni marginali situate sulla stessa riga e sulla stessa colonna.

Se le variabili sono correlate allora la (24) non è verificata e quindi si può porre:

$$\frac{F_{ij}}{N} = f_{ij} = \frac{n_i}{N} \cdot \frac{F_{ij}}{n_i} = v_i \frac{F_{ij}}{n_i} \quad \text{oppure} \quad \frac{F_{ij}}{N} = f_{ij} = \frac{m_j}{N} \cdot \frac{F_{ij}}{m_j} = \mu_j \frac{F_{ij}}{m_j}$$

Da questa relazione discende la seguente proprietà:

quando le variabili di una distribuzione bidimensionale sono correlate la frequenza relativa della coppia di valori X_i, Y_j è uguale al prodotto della frequenza relativa della x_i nella distribuzione marginale per la frequenza relativa del valore y_j nella distribuzione condizionata per $x = j$.

NOTA : in una distribuzione a n dimensioni in cui le variabili sono indipendenti, la frequenza relativa corrispondente a una nuvola di valori X_1, X_2, \dots, X_n è pari al prodotto delle frequenze relative dei valori X_1, X_2, \dots, X_n nelle distribuzioni marginali.

3.3.1. DISTRIBUZIONE NORMALE A DUE DIMENSIONI

Consideriamo due variabili casuali di tipo normale (X e Y) fra loro **indipendenti**; la probabilità legata all'individuo caratterizzato dai valori argomentali x e y è data dal prodotto delle singole probabilità:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}$$

È più complesso determinare l'espressione della densità di probabilità normale a due dimensioni nell'ipotesi che le due variabili x e y siano **correlate** e distribuite con legge normale. Diamo questa espressione senza dimostrazione:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_{1(x)}}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_{1(x)}}{\sigma_x}\frac{y-\mu_{1(y)}}{\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_{1(y)}}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

Il parametro ρ che interviene a definire la distribuzione è espresso dal seguente rapporto:

$$\rho = s_{xy} / s_x * s_y$$

Si può dimostrare che la (57) è in accordo con tutte le definizioni e proprietà delle distribuzioni continue a due dimensioni.

Inoltre è evidente che la (57) è l'equazione $z=f(x,y)$ di una superficie la cui rappresentazione grafica rispetto a tre assi coordinati x,y,z è riportata in figura 13.

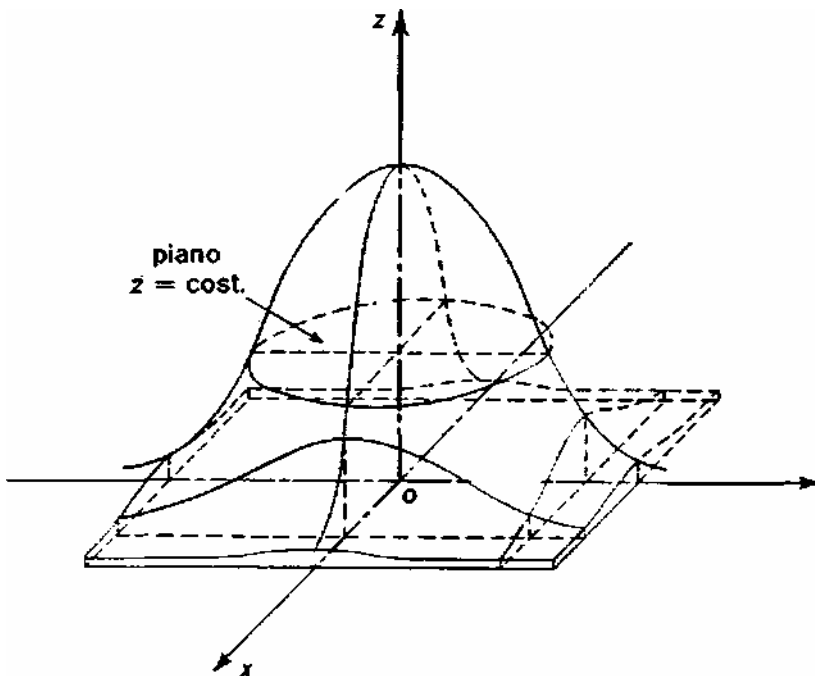


Fig. 3.15 - Rappresentazione grafica di una distribuzione normale a due dimensioni

Per le applicazioni alla teoria delle misure è utile studiare le curve di intersezione di questa superficie con i piani $z = K$.

Come si può facilmente dimostrare esse sono delle ellissi le cui dimensioni variano al variare della costante K .

L'ellisse che corrisponde al valore $K = 1$ si chiama ellisse standard (vedi Fig. 3.16) i cui semiassi maggiore e minore (a e b) sono forniti dalle seguenti relazioni:

$$a^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

$$b^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

Inoltre l'angolo φ che il semiasse maggiore dell'ellisse forma con l'asse delle x si può determinare con la seguente relazione :

$$\tan 2\varphi = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}$$

Si può dimostrare infine che se **un ellisse standard ha gli assi paralleli agli assi coordinati, non vi è correlazione fra le due variabili.**

Da un punto di vista statistico l'ellisse standard rappresenta l'area all'interno della quale si ha il 39% di probabilità di trovare un individuo estratto a caso dalla popolazione. In un'ellisse di dimensioni doppie tale probabilità sale a circa l'80% , mentre in un'ellisse di dimensioni pari a 3 volte l'ellisse standard la probabilità supera il 99%.

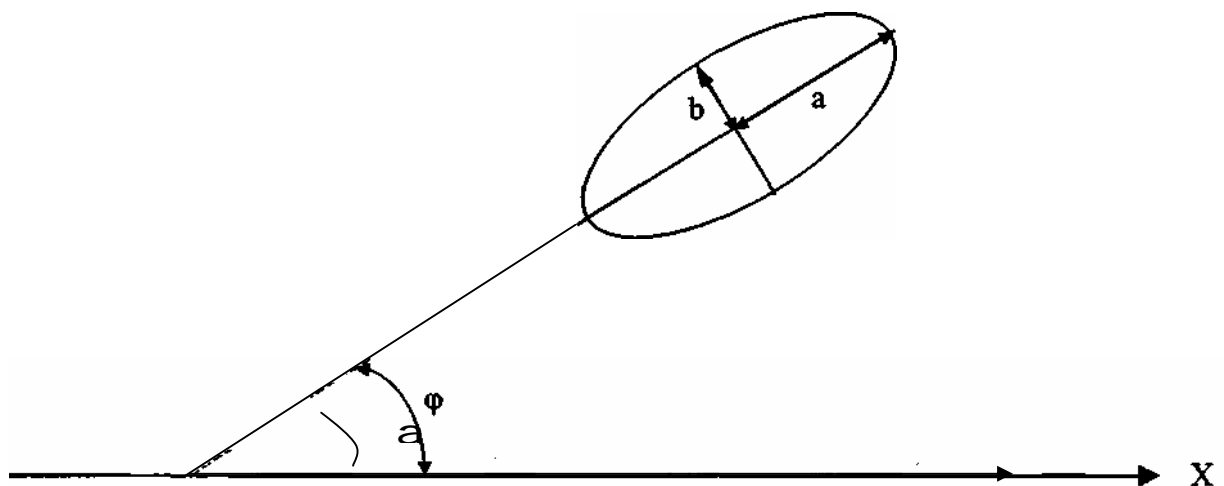


Fig. 3.16-parametri dell'ellisse standard

3.4. IL PROBLEMA DELLA STIMA

Abbiamo detto che ogni operazione di misura di una grandezza fisica, purché affetta da soli errori accidentali aventi mediamente lo stesso ordine di grandezza, equivale all'estrazione casuale da una densità di distribuzione normale o gaussiana.

Inoltre abbiamo visto che per definire in modo completo una qualsiasi distribuzione normale occorre determinare il valore dei due parametri di media e di varianza.

D'ora in avanti definiremo:

stima il valore numerico che assoceremo a m e S_2 ;

stimatore la relazione analitica, funzione di un campione limitato di estrazioni casuali, che consente di definire la stima.

3.4.1. IL PRINCIPIO DI MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

Partiamo dall'assunto che per ogni grandezza esista un unico numero che ne esprime la *misura vera*, e che le fluttuazioni dei risultati siano dovuti ad *errori accidentali* presenti in maniera imprevedibile in ogni operazione di misura.

Tecniche di misura più raffinate dovrebbero ridurre gli errori entro limiti sempre più stretti onde avvicinarsi sempre di più alla situazione ideale di biunivocità fra grandezza e misura.

Nella pratica operativa ad ogni grandezza corrisponde sempre una molteplicità di valori leggermente diversi tra loro.

Occorre risolvere il problema di come combinare questi risultati in modo da ricavare un unico valore che sia il più vicino alla misura vera e la sua attendibilità.

Il risultato di una singola operazione di misura è un evento aleatorio, che si può configurare come una estrazione a caso dalla popolazione di misure possibili.

Misurare una grandezza equivale a definire i parametri (media e varianza) della distribuzione delle misure possibili sulla base di un certo numero, molto limitato, di misure ripetute.

Si stabilisce così una relazione biunivoca fra la grandezza e la distribuzione delle misure possibili.

Misurare direttamente una grandezza significa:

1. individuare il modello matematico (la distribuzione) che la rappresenta adeguatamente
2. definire i parametri della popolazione (media e varianza)

La ricerca del modello matematico che rappresenta adeguatamente una distribuzione di misure possibili deve necessariamente partire da risultati sperimentali.

Questa indagine porta ad affermare che la **distribuzione gaussiana** si presta bene a rappresentare una popolazione di misure possibili.

Ad una legge di distribuzione di tipo gaussiano conduce anche una indagine teorica basata sulla ipotesi che il prodursi delle fluttuazioni accidentali di misura sia dovuto al sommarsi di numerosi piccoli effetti aleatori, ognuno dei quali ha una distribuzione qualsiasi.

La stima dei parametri della distribuzione, in funzione dei valori di un campione estratto a caso, avviene attraverso l'applicazione di principi assiomatici, uno dei quali è quello di *massima verosimiglianza*.

Consideriamo una distribuzione teorica $f(x)$ dipendente da r parametri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$,

Consideriamo una ennupla x_1, x_2, \dots, x_n di individui estratti a caso dalla distribuzione teorica.

La densità di probabilità di questa distribuzione sarà:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n / \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n) \quad (61)$$

Per una determinata serie di valori X_1, X_2, \dots, X_n la densità di probabilità P assumerà valori diversi a seconda dei valori dei parametri $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$, considerati.

Maggiore verosimiglianza o plausibilità hanno quelle stime dei parametri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ che rendono massima la P .

Applichiamo il principio di massima verosimiglianza ad una distribuzione gaussiana; i parametri da stimare per una distribuzione gaussiana sono la media e la varianza.

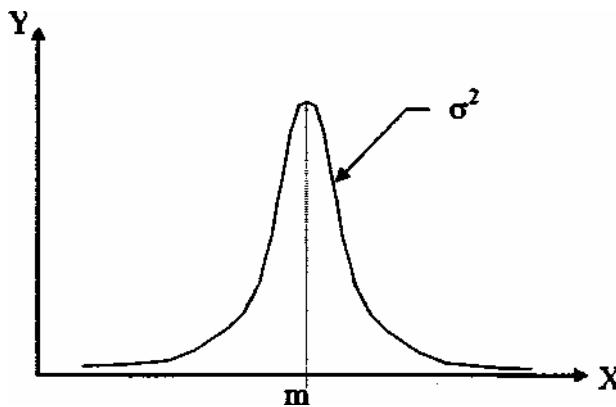


Fig. 3.17 distribuzione gaussiana

La probabilità di estrazione legata al singolo individuo x_i della ennupla di valori estratti a caso x_1, X_2, \dots, X_n dalla distribuzione teorica sarà:

$$dp_i = f(x_i) dx$$

La probabilità di uscita dell'intero campione X_1, X_2, \dots, X_n si ottiene applicando il teorema delle probabilità composte:

$$dP = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n) \quad (dx^n)$$

Le $f(X_i)$ dipendono dai parametri incogniti di media e di varianza. Al variare di questi parametri, varieranno anche le $f(X_i)$ e quindi la dp .

L'applicazione del principio di massima verosimiglianza ci farà assumere come migliore stima (stima più plausibile) di m e S^2 quella che renderà **massima** la dp .

Se la $f(X_i)$, come ipotizzato, è una gaussiana avremo:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$$

la probabilità di uscita dell'intero campione x_1, x_2, \dots, x_n sarà:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n / m, \sigma^2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}$$

che diviene massima quando è minimo l'esponente di e ovvero quando:

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \min$$

e per $\sigma^2 = \text{costante}$ diventa:
$$\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \min$$

che rappresenta il **PRINCIPIO DEI MINIMI QUADRATI**.

Se la $f(x)$ è una distribuzione gaussiana, il **principio di massima verosimiglianza conduce al principio dei minimi quadrati** e la diretta applicazione di questo principio porta alla determinazione della stima più plausibile del parametro media:

(62)

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \min$$

3.4.2. PROPRIETÀ DEGLI STIMATORI

Oltre al procedimento di stima fornito dal principio di massima verosimiglianza si possono inventare altri procedimenti per stimare i parametri di una distribuzione di probabilità. In particolare per i due parametri m e σ^2 che definiscono una distribuzione gaussiana, qualunque funzione del campione estratto x_1, x_2, \dots, x_n può fornire delle stime. Genericamente il procedimento di stima dei parametri di una distribuzione normale sarà indicato nel seguente modo:

$$\bar{m} = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{\sigma}^2 = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dove le funzioni h e g rappresentano i generici stimatori.

Ovviamente tra tutte le possibili stime dei parametri della popolazione occorre scegliere i valori da utilizzare seguendo alcuni criteri logici. Si stabiliscono quindi delle proprietà cui le stime generate dagli stimatori h e g devono soddisfare.

Una stima deve essere:

- > **consistente**
- > **non affetta da errore sistematico**
- > **efficiente**

Una stima si dice consistente se al tendere all'infinito del numero n di elementi costituenti il campione utilizzato tende al valore teorico del parametro stimato.

Osservando le (63) si può notare che ogni stima è una quantità aleatoria in quanto dipende da un campione aleatorio (ossia ogni campione di n elementi consente di ottenere un diverso valore della stima del parametro).

Quindi ogni funzione degli n valori estratti definisce una popolazione delle stime da campioni di n elementi ovvero una variabile casuale.

Per le popolazioni delle stime si potranno definire, analogamente a quanto avviene per una qualsiasi variabile casuale, la media e la varianza.

Una stima si dice **non affetta da errore sistematico** se la media della popolazione delle stime coincide con la media della popolazione da cui vengono estratti i campioni.

Una stima si dice **efficiente** se, rispetto a tutte le possibili stime del parametro, la popolazione cui appartiene ha la varianza minima.

Per verificare la bontà o meno della stima della media, ottenuta attraverso l'applicazione del principio dei minimi quadrati, dobbiamo calcolare il valore della media teorica della popolazione delle medie (popolazione delle stime).

Ciascun valore della popolazione delle medie è stato ricavato come media aritmetica di una ennupletta di individui (x_1, x_2, \dots, x_n) estratti dalla popolazione X:

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}$$

questa operazione è stata ripetuta infinite volte (sono state estratte infinite ennuplette x_1, x_2, \dots, x_n) per la costruzione della popolazione delle medie.

La relazione tra \bar{m} e x_1, x_2, \dots, x_n è una relazione tra popolazioni (tra variabili casuali) e quindi applicando le regole viste prima che consentono le operazioni tra variabili casuali sarà possibile calcolare il valore della media teorica della popolazione delle medie.

Utilizzando l'operatore $M[a]$ con il significato di "calcolo il valore della media teorica della popolazione a":

$$M[\bar{m}] = \frac{1}{n} M[x_1] + \frac{1}{n} M[x_2] + \dots + \frac{1}{n} M[x_n]$$

- > la popolazione x_1 è costituita da infiniti valori "estratti per primi" dalla popolazione X avente quindi media teorica = m
- > la popolazione x_2 è costituita da infiniti valori "estratti per secondi" dalla popolazione X avente quindi media teorica = m
- > la popolazione x_n è costituita da infiniti valori "estratti per ultimi" dalla popolazione X avente quindi media teorica = m

$$M[\bar{m}] = \frac{1}{n} m + \frac{1}{n} m + \dots + \frac{1}{n} m = m$$

La media teorica della popolazione delle medie coincide con la media teorica della popolazione origine e quindi la stima non è affetta da errore sistematico.

Applicando sempre le regole di combinazione di variabili casuali è possibile calcolare anche la varianza della popolazione delle medie S_m^2 .

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}$$

la relazione tra \bar{m} e x_1, x_2, \dots, x_n è una relazione tra variabili casuali e quindi:

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{n^2} \sigma^2 + \frac{1}{n^2} \sigma^2 + \dots + \frac{1}{n^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \tag{66}$$

In base alle definizioni date prima, possiamo dire quindi che la stima m è anche **efficiente**.

In altre parole l'effettuare n osservazioni di una stessa grandezza, ovvero l'effettuare n estrazioni da una popolazione di varianza σ^2 , e costruire la media aritmetica del campione $\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ equivale ad eseguire un'unica osservazione da una popolazione che ha la stessa media teorica (m) e una varianza n volte più piccola ($\frac{\sigma^2}{n}$).

Il significato pratico di quanto dimostrato è evidente: per misurare correttamente una grandezza è necessario ripetere più volte la misura e assumere come valore della grandezza quello espresso dalla media aritmetica delle misure.

La stima della varianza della popolazione originale, in base al campione estratto è affetta invece da errore sistematico.

Infatti, secondo la definizione data la varianza vale:

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m})^2 f_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m})^2$$

pensando di ripetere infinite volte l'estrazione dell'ennupletta di individui X_1, X_2, \dots, X_n ci costruiremo le popolazioni della varianza s^2 e le popolazioni dei termini a secondo membro. I valori teorici di tali popolazioni si otterranno applicando l'operatore media M a primo e a secondo membro:

$$M[s^2] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2\right] - M\left[\left(\frac{\bar{x}}{n} - m\right)^2\right] = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 \frac{n-1}{n}$$

La media della popolazione degli \hat{s} non coincide con S^2 e pertanto la stima è affetta da errore sistematico.

Per ottenere una stima non affetta da errore sistematico sarà sufficiente moltiplicare tutti gli individui per $\frac{n}{n-1}$

La stima della varianza della popolazione originale sarà quindi;

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m})^2}{n-1}$$

la stima della varianza della popolazione delle medie, a partire dal campione estratto x_1, x_2, \dots, x_n , sarà quindi:

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m})^2}{n(n-1)}$$

Misurare direttamente una grandezza significa quindi:

- > eseguire n osservazioni x_1, x_2, \dots, x_n
- > calcolare la media aritmetica m
- > calcolare la varianza della popolazione delle medie $\bar{\sigma}_m^2$

La misura della grandezza si esprimerà come:

$$\bar{m} \pm \bar{\sigma}_m$$

Il segno \pm non ha alcun particolare significato, sta solo ad indicare che il numero che segue è lo scarto quadratico medio della popolazione da cui è stato estratto m .

Per quanto visto in precedenza la probabilità totale dei valori compresi tra:

$\bar{m} - \bar{\sigma}_m$	e	$\bar{m} + \bar{\sigma}_m$	è del 68%
$\bar{m} - 2\bar{\sigma}_m$	e	$\bar{m} + 2\bar{\sigma}_m$	è del 95%
$\bar{m} - 3\bar{\sigma}_m$	e	$\bar{m} + 3\bar{\sigma}_m$	è praticamente del 100%

L'intervallo $\pm 3S_m$ rappresenta quindi la massima variazione possibile dei valori m ottenuti facendo la media aritmetica di n misure.

La massima variazione di una sola misura x ; è invece pari a $\pm 3S$; si può quindi assumere come affetta da errore grossolano quella misura che differisce dalla media m per più di $\pm 3\sigma$.

Il vantaggio di eseguire n misure e di calcolare la media aritmetica m si concretizza nella diminuzione di \sqrt{n} volte dell'intervallo di variabilità delle misure; questo aumento di precisione non può però essere molto spinto perché il beneficio cresce con la radice quadrata del numero di ripetizione delle misure. Per ridurre alla metà il campo di variabilità bastano 4 misure mentre per ridurlo di $1/3$ ne occorrono 9 e così via.

Se si è eseguita un'unica misura di una grandezza è disponibile un solo valore che rappresenta la stima della media; non si ha alcun modo di verificare se tale valore è affetto da errore grossolano. Come S della popolazione da cui è stata estratta la misura conviene assumere quello della *precisione strumentale* caratteristico dello strumento impiegato per la misura.

Anche quando si eseguono misure con strumenti di bassa precisione conviene associare al valore rappresentativo della misura un S pari alla precisione strumentale perché, probabilmente, la ripetizione della misura darebbe un valore uguale a quello precedente e sarebbe errato attribuire alla misura uno scarto quadratico medio nullo.

Esempio:

un angolo azimutale è stato misurato 4 volte con i seguenti risultati:

α misurato	$\alpha - \bar{m}_\alpha$	$(\alpha - \bar{m}_\alpha)^2$
54 ^g ,6542	- 0,0001	1 10 ⁻⁸
54 ^g ,6539	- 0,0004	16 10 ⁻⁸
54 ^g ,6547	0,0004	16 10 ⁻⁸
54 ^g ,6544	0,0001	1 10 ⁻⁸
Σ		34 10 ⁻⁸

$$\bar{m}_\alpha = 54^g,6543$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{m}_\alpha)^2}{n-1} = \frac{34 \cdot 10^{-8}}{3} = 113 \cdot 10^{-9} \text{ e quindi } \bar{\sigma} = \pm 0^g,00034$$

$$\bar{\sigma}_m^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{n} = \frac{113 \cdot 10^{-9}}{4} = 28 \cdot 10^{-9} \text{ e quindi } \bar{\sigma}_m = \pm 0^g,00017$$

l'angolo misurato sarà espresso quindi dal valore: $\alpha = 54^g,6543 \pm 0^g,00017$

3.4.4. MISURE DIRETTE DI DIVERSA PRECISIONE

Se una grandezza (esempio un angolo) viene misurata più volte con strumenti con diversa precisione o in condizioni operative diverse, non è possibile ottenere il valore più rappresentativo della grandezza facendo semplicemente la media aritmetica delle misure eseguite. Siamo in questo caso:

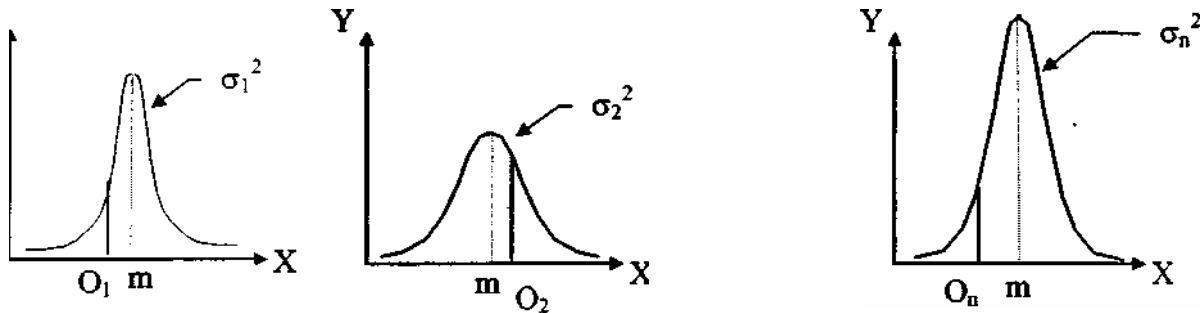


Fig. 3.20 misura di una grandezza fatta con diversa precisione

Da ciascuna delle n popolazioni di misure possibili aventi tutte la stessa media teorica m , in quanto si riferiscono alla misura della stessa grandezza, ma varianze σ_i^2 diverse, in quanto di precisione diversa, è stata eseguita un'estrazione a caso che ha dato luogo ai risultati O_1, O_2, \dots, O_n

Ciascun valore O_i può essere considerato come singolo individuo estratto dalla popolazione di misure possibili o come la media di un certo numero di estrazioni eseguito nella stessa popolazione.

Ciascun valore O_i rappresenta una stima della media teorica m , comune a tutte le popolazioni, ma è evidente che se la stima della media teorica m viene fatta sulla base di tutti gli O_i si ottiene un valore più attendibile.

La probabilità di estrazione del singolo individuo O_i dalla relativa popolazione è data da:

$$f(O_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{(O_i - m)^2}{2\sigma_i^2}} \quad (70)$$

Ciascun individuo O_i si può pensare come il risultato della media di p_i individui estratti da una popolazione avente la stessa media teorica m delle singole popolazioni e varianza pari a σ_0^2 a cui si dà il nome di varianza dell'unità di peso; essa rappresenta la varianza di una popolazione a cui è stato arbitrariamente attribuito peso unitario.

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

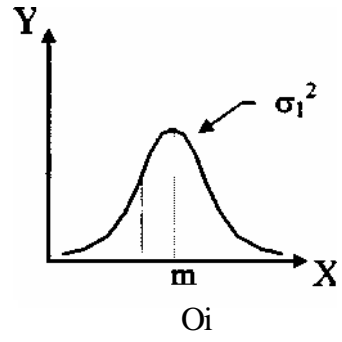
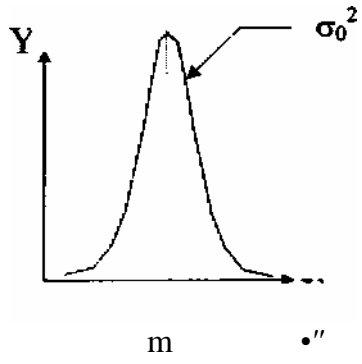


Fig. 3.21 estrazione dalla popolazione originale e dalla popolazione delle medie

Estrarre un individuo (O_1) dalla popolazione che ha varianza S^2 equivale ad estrarre p_1 individui dalla popolazione con varianza S_0^2 e farne la media

Il peso assume il significato di un coefficiente di omogeneizzazione delle diverse popolazioni sulla popolazione fittizia di peso unitario; mediante i pesi tutte le popolazioni vengono riferite alla popolazione di peso unitario.

I pesi delle singole misure O_i diventano:

$$p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \quad p_2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} \quad p_3 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_3^2} \cdots p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

assumendo σ_0^2 arbitrariamente.

La probabilità di estrazione del singolo individuo O_i dalla popolazione che ha varianza S_0^2 è data quindi da:

$$f(O_i) = \frac{p_i^{1/2}}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{p_i}{2\sigma_0^2}(O_i - m)^2}$$

La probabilità di uscita dell'intero campione O_1, O_2, \dots, O_n sarà dato dal prodotto delle probabilità di uscita dei singoli individui e vale:

$$V(O_1, O_2, \dots, O_n, m, \sigma_0^2) = \frac{(p_1 \cdot p_2 \cdots p_n)^{1/2}}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n p_i (O_i - m)^2}$$

Qualunque sia il valore di S_0^2 il massimo di V si avrà quando l'esponente di e sarà minimo:

$$\sum_{i=1}^n p_i (O_i - m)^2 = \min$$

Il minimo della funzione S si ottiene derivando la funzione

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i (O_i - m)^2}{dm} = 0 \quad 2 \sum_{i=1}^n p_i (O_i - \bar{m}_p) = 0 \quad \sum_{i=1}^n p_i O_i - \bar{m}_p \sum_{i=1}^n p_i = 0$$

$$\bar{m}_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i O_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{p_1 O_1 + p_2 O_2 + \cdots + p_n O_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

stessa e uguagliando a zero:

Il valore così ottenuto si chiama **media ponderata** delle n osservazioni O_1, O_2, \dots, O_n di diversa precisione.

Se i pesi vengono moltiplicati tutti per una stessa costante, il valore della media ponderata non cambia. Si giustifica così il fatto che, se sono note le varianze S^2 si potrà assumere arbitrariamente

il valore di S_0^2 per la definizione dei pesi p_i , analogamente, se sono noti i pesi, questi potranno essere moltiplicati tutti per una costante arbitraria.

Dobbiamo verificare se la stima della media ponderata ottenuta attraverso l'applicazione del principio di massima verosimiglianza è una buona stima o meno.

I parametri di giudizio sulla bontà della stima che abbiamo definito sono:

1. consistenza
2. affetta da errore sistematico
3. efficienza

Per fare questo dobbiamo costruire la popolazione delle medie ponderate immaginando di ripetere infinite volte l'estrazione dell'ennupla di osservazioni O_1, O_2, \dots, O_n dalle n popolazioni e costruendo ogni volta un individuo della popolazione delle medie ponderate.

Indicando tra parentesi quadre tutti gli individui di una popolazione (infiniti) e stabilito che la media (indicata con la lettera M) degli infiniti valori estratti da una popolazione è pari al valore teorico si avrà:

$$M[O_1] = M[O_2] = \dots = M[O_n] = m$$

e quindi la media della popolazione delle medie ponderate sarà:

$$M[m_p] = \frac{p_1 M[O_1] + p_2 M[O_2] + \dots + p_n M[O_n]}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{m \sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = m$$

Si dimostra così che la stima di m_p è consistente e non è affetta da errore sistematico.

Per quanto riguarda la varianza della popolazione delle medie ponderate, applicando le regole di combinazione di variabili casuali:

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{p_1}{\sum p_i} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{p_2}{\sum p_i} \right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{p_n}{\sum p_i} \right)^2 \sigma_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2}$$

Questo stimatore, che si dimostra essere uno stimatore corretto, esaurisce il problema che ci siamo posti nel caso in cui siano note le varianze delle singole osservazioni che hanno contribuito alla stima della media ponderata.

Nel caso in cui si conoscano solo i pesi, la relazione che consente di stimare la varianza della media ponderata si ricava dalla (74) sostituendo alle quantità S^2 l'equivalente espressione ricavabile dalla

relazione (71) $\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$ per cui si ottiene:

$$\sigma_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot \sigma_0^2}{\left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2} = \sigma_0^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

Per poter utilizzare questa nuova espressione, occorre stimare la quantità S_0

Questo può essere fatto utilizzando il campione di misure utilizzate per la stima della media ponderata. Si noti che al variare del campione varierà la stima della varianza dell'unità di peso, per cui quest'ultima quantità risulta anch'essa una variabile aleatoria caratterizzata da una determinata distribuzione.

Per trovare uno stimatore della varianza dell'unità di peso utilizziamo nuovamente il principio di massima verosimiglianza. Conviene, in questo caso, utilizzare il logaritmo della funzione di verosimiglianza definita dalla (72). Otteniamo:

$$\ln V = \frac{1}{2} \ln(p_1 \cdot p_2 \cdots p_n) - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma_0^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n p_i \cdot (O_i - m)^2$$

Questa funzione risulta massima per quel valore di σ_0^2 che soddisfa alla seguente condizione:

$$\frac{\partial \ln V}{\partial \sigma_0^2} = -\frac{n}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum_{i=1}^n p_i (O_i - m)^2 = 0$$

per cui sostituendo alla media teorica, la media ponderata stimata con la (73) si ottiene:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i^2}{n}$$

$$M[\hat{\sigma}_0^2] = \frac{n-1}{n} \sigma_0^2$$

Quindi la miglior stima della quantità σ_0^2 è ricavabile con la seguente espressione:

La relazione sopra ricavata è uno stimatore non corretto in quanto affetto da errore sistematico. Si può dimostrare che, analogamente a quanto abbiamo visto nel caso della stima della varianza di una serie di misure dirette di uguale precisione, la media della popolazione espressa dalla (76) non coincide con il valore teorico del parametro che vogliamo stimare. Applicando l'operatore M si ottiene infatti:

$$\bar{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i^2}{n}$$

3.4.5. MISURA INDIRETTA DI UNA GRANDEZZA

Consideriamo una grandezza X e n grandezze X_1, X_2, \dots, X_n tra le quali esista un legame funzionale del tipo:

$$X = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (78)$$

Le grandezze X_i possono essere misurate direttamente e quindi essere tra loro stocasticamente indipendenti; in questo caso ognuna di loro è rappresentata da una stima della media e della varianza che ha caratterizzato l'operazione della loro misura.

Se invece le grandezze X_i sono misurate indirettamente esse risultano generalmente stocasticamente correlate e quindi sono rappresentate dai valori stimati delle rispettive medie e da una matrice di varianza-covarianza della distribuzione a n dimensioni X_1, X_2, \dots, X_n

$$U = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{vmatrix}$$

La relazione (78) definisce la grandezza X come una variabile casuale i cui parametri dipendono dai parametri delle distribuzioni di probabilità delle X_i .

Misurare indirettamente la grandezza X significa dunque definire la distribuzione delle misure possibili della X a partire dalle variabili casuali indipendenti che definiscono le n misure dirette oppure la variabile casuale a n dimensioni dipendente dalle n variabili X_1, X_2, \dots, X_n , che definisce globalmente le misure indirette di queste grandezze.

Il problema è facilmente risolvibile con le nozioni fino ad ora apprese, se il legame funzionale f è una combinazione lineare delle X_i

Infatti in questo caso la grandezza X risulta espressa dalla seguente relazione:

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

e ricordando quanto detto a proposito dei sistemi di variabili casuali, la stima della media di X , nel caso in cui le grandezze X_j siano stocasticamente indipendenti, risulta essere espressa dalla seguente relazione:

$$\bar{X}_m = a_1 \bar{X}_{1m} + a_2 \bar{X}_{2m} + \dots + a_n \bar{X}_{nm}$$

e la varianza:

$$\sigma_X^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2$$

Se le variabili X_i , sono correlate, la stima della media coincide con quella determinata dalla (81), mentre la stima della varianza viene calcolata con la seguente relazione (omettiamo la dimostrazione):

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 = & a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2 + 2a_1 a_2 \sigma_{12} + 2a_1 a_3 \sigma_{13} + \dots + 2a_1 a_n \sigma_{1n} + 2a_2 a_3 \sigma_{23} + \dots + \\ & + 2a_2 a_n \sigma_{2n} + \dots + 2a_{(n-1)} a_n \sigma_{(n-1)n} \end{aligned}$$

Generalizzando se **non** facciamo alcuna ipotesi sulla forma del legame funzionale f si effettua il seguente ragionamento.

Sia O_1, O_2, \dots, O_n un campione estratto da ciascuna delle distribuzioni di misure possibili di X_1, X_2, \dots, X_n . Ogni valore O_i è il risultato di un'estrazione casuale dalle distribuzioni di media teorica X_{im} .

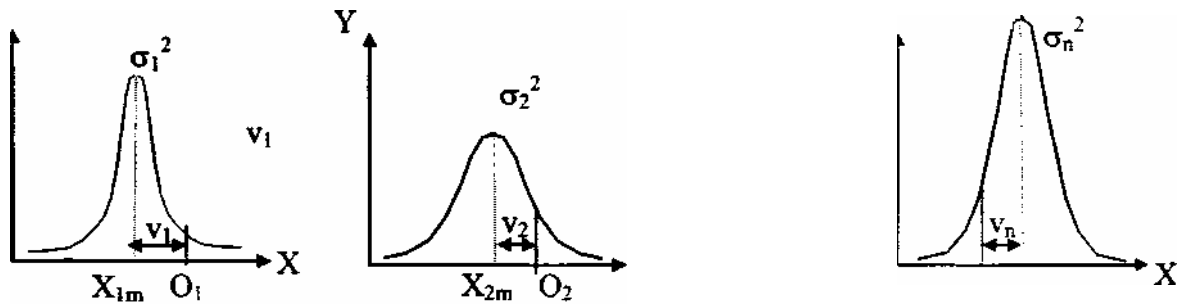


Fig. 3.22 estrazione del campione

Quindi è possibile esprimere le O , nel seguente modo:

$$O_1 = X_{1m} + v_1 \quad O_2 = X_{2m} + v_2 \quad O_n = X_{nm} + v_n$$

Se gli scarti v , sono sufficientemente piccoli da poter considerare trascurabili i loro quadrati, possiamo linearizzare la (78) con uno sviluppo in serie di Taylor attorno al punto definito dalle medie teoriche X_{im} . Risulta:

$$\begin{aligned} f(O_1, O_2, \dots, O_n) &= f(X_{1m} + v_1, X_{2m} + v_2, \dots, X_{nm} + v_n) = \\ &= f(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm}) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_m v_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_m v_n \end{aligned}$$

Ripetendo infinite volte l'estrazione del campione O_1, O_2, \dots, O_n insieme con le operazioni prima descritte, costruiamo le popolazioni a primo e a secondo membro della 77. Applichiamo quindi l'operatore M alle popolazioni così costruite:

$$M[f(O_1, O_2, \dots, O_n) - f(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm})] = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_m M[v_1] + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_m M[v_n]$$

La media della popolazione al primo membro è nulla in quanto il secondo membro è una combinazione di variabili scarto che per definizione sono distribuzioni a media teorica nulla e quindi:

$$M[f(O_1, O_2, \dots, O_n)] = f(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm}) \quad \text{perché gli infiniti valori teorici } f(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm}) \text{ sono tutti uguali tra loro}$$

Ogni ennupletta O_1, O_2, \dots, O_n estratta è una stima di $X = f(O_1, O_2, \dots, O_n)$.

Le infinite ennuplette generano la popolazione della X che avrà media teorica $= X_m$:

$$X_m = f(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm})$$

Concludendo, nell'ipotesi che gli scarti V_i siano piccoli in modo tale da poter considerare ininfluenti i termini di ordine superiore al primo (questo è vero se i valori O_i , derivano da una operazione di stima corretta delle medie delle popolazioni X_i), la media della grandezza X può essere stimata introducendo nella (86) le stime delle medie delle popolazioni X_i .

$$\bar{X}_m = f(\bar{X}_{1m}, \bar{X}_{2m}, \dots, \bar{X}_{nm})$$

Per la stima della varianza della X ricordando che:

$$\sigma_X^2 = M\left[\left\{f(O_1, O_2, \dots, O_n) - f(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm})\right\}^2\right] = \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_m M[v_1] + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_m M[v_n]\right\}^2$$

otteniamo, nel caso in cui le grandezze X_j siano incorrelate, la seguente espressione per la stima della varianza della grandezza X :

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_m^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_m^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_m^2 \cdot \sigma_n^2$$

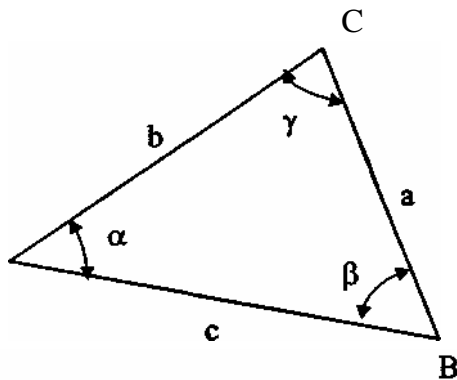
Nel caso in cui le grandezze X_j siano correlate, la (88) assume la formulazione più generale:

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_m^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_m^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_m^2 \sigma_n^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_m \left(\frac{\partial f}{\partial X_j}\right)_m \sigma_{ij}$$

Le (88) e (89) sono espressioni della cosiddetta **legge di propagazione delle varianze**.

In pratica anche in questo caso saranno disponibili solo delle stime e non le grandezze teoriche. Con le formule (88) e (89) si ricaveranno quindi delle quantità stimate e mai quelle teoriche.

Esempi di misura indiretta di una grandezza:



misurati α, β, b
determinare il lato a

Misurare α, β, b significa determinare la stima della media e lo s.q.m. delle grandezze:

$$\bar{\alpha} \pm \bar{\sigma}_\alpha$$

$$\bar{\beta} \pm \bar{\sigma}_\beta$$

$$\bar{b} \pm \bar{\sigma}_b$$

Misurare indirettamente la grandezza “a” significa ricavare la stima della media e dello s.q.m. di “a”.

Applicando la 78 bis si avrà:

$$\bar{a} = \frac{\bar{b}}{\sin \bar{\beta}} \sin \bar{\alpha}$$

Le variabili casuali α, β, b sono tra loro incorrelate e quindi applicando la 79 avremo:

$$\bar{\sigma}_a^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)_m^2 \bar{\sigma}_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)_m^2 \bar{\sigma}_\alpha^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)_m^2 \bar{\sigma}_\beta^2 = \left(\frac{\sin \bar{\alpha}}{\sin \bar{\beta}} \right)^2 \bar{\sigma}_b^2 + \left(\frac{\bar{b} \cos \bar{\alpha}}{\sin \bar{\beta}} \right)^2 \bar{\sigma}_\alpha^2 + \left(\frac{-\bar{b} \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\beta}}{\sin^2 \bar{\beta}} \right)^2 \bar{\sigma}_\beta^2$$

L'espressione corretta di a sarà:

$$\bar{a} \pm \bar{\sigma}_a$$

3.4.6. MISURA INDIRETTA DI PIÙ GRANDEZZE CON EQUAZIONI ESUBERANTI

n problema che affronteremo in questo paragrafo rappresenta il caso di gran lunga più utilizzato in tutte le applicazioni topografiche e fotogrammetriche.

Questo problema può essere formulato nel seguente modo: stimare la media e la matrice di varianza-covarianza di una distribuzione r-dimensionale funzione di r grandezze indirette X_1, X_2, \dots, X_n a partire da un campione di n misure dirette rappresentate da n distribuzioni incorrelate, di media e varianza note, L_1, L_2, \dots, L_n . (con $n > r$).

Il risultato che stiamo cercando dovrà dipendere da tutto il campione disponibile e si può dire che esso sarà il frutto di una compensazione delle misure dirette eseguite.

Le grandezze X_j sono legate alle grandezze L_i , da legami funzionali generici, dipendenti solitamente da condizioni geometriche e/o fisiche.

Consideriamo un semplice esempio. Si vogliono determinare le coordinate planimetriche X, Y di un punto P visibile da due punti A e B di coordinate note, n problema si può facilmente risolvere, come vedremo nella seconda parte del corso, misurando i due angoli PAB e ABP. In questo modo però un qualsiasi errore nella misura dei due angoli provoca un errore nella determinazione della posizione di P senza che sia possibile accorgersene. Infatti qualunque sia il valore determinato per i due angoli esiste sempre una soluzione al problema.

Se si esegue anche la misura del lato AP l'informazione che essa fornisce consente di individuare eventuali errori nella misure degli angoli e viceversa. Ogni misura diretta effettuata sarà caratterizzata da una certa precisione e, come già visto nel caso delle misure dirette di diversa precisione, ognuna di esse dovrà partecipare con il proprio peso alla soluzione del problema. Chiaramente le misure che vengono fatte in esubero rispetto a quelle minime necessarie alla soluzione del problema geometrico non devono dipendere dalle altre misure: nell'esempio sopra citato non avrebbe senso introdurre una nuova misura degli stessi angoli o della medesima distanza. Al solito affronteremo il problema per gradi iniziando dal caso più semplice in cui il legame funzionale tra le grandezze indirette e le grandezze dirette sia una combinazione lineare di queste ultime.

Consideriamo un sistema di n equazioni lineari che lega $r < n$ grandezze incognite X_1, X_2, \dots, X_r alle grandezze direttamente misurabili L_1, L_2, \dots, L_n , **nell'ipotesi che ogni equazione contenga come termine noto una sola grandezza misurabile direttamente.**

$$\begin{cases} a_1 X_1 + b_1 X_2 + \dots + u_1 X_r = L_1 \\ a_2 X_1 + b_2 X_2 + \dots + u_2 X_r = L_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n X_1 + b_n X_2 + \dots + u_n X_r = L_n \end{cases} \quad \text{con } n > r \quad (90)$$

dove a sono coefficienti noti.

Nel sistema (90) tutte le grandezze, dirette e indirette, sono indicate con i rispettivi valori teorici di media, In questo caso, del tutto teorico, una qualsiasi r-pla di equazioni è in grado di fornire una soluzione che soddisfa anche le restanti n-r equazioni.

Nella realtà noi sappiamo già che non disporremo mai dei valori teorici L_i , delle grandezze misurate direttamente, ma al massimo di buone stime Li le quali possono essere espresse nel seguente modo:

$$L_i = Li + v_i$$

Più correttamente (o realisticamente) il sistema (90) deve essere riscritto nella seguente forma:

$$\begin{cases} a_1 X_1 + b_1 X_2 + \dots + u_1 X_r = \bar{L}_1 + v_1 \\ a_2 X_1 + b_2 X_2 + \dots + u_2 X_r = \bar{L}_2 + v_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_n X_1 + b_n X_2 + \dots + u_n X_r = \bar{L}_n + v_n \end{cases}$$

Le quantità v , rappresentano gli scarti teorici di ogni equazione e pertanto sono anch'essi incogniti. Ci troviamo dunque di fronte a un sistema di n equazioni in $r+n$ incognite, cioè un sistema indeterminato; quindi è impossibile, da un punto di vista matematico, trovare i valori X , che soddisfino contemporaneamente tutte le n equazioni. Possiamo però affrontare il problema da un punto di vista statistico. Proponiamoci cioè di stimare le medie delle misure indirette X_j a partire dalle stime delle misure dirette L_i . Il sistema (91) assume dunque la seguente forma definitiva:

$$\begin{cases} a_1 X_1 + b_1 X_2 + \dots + u_1 X_r = \bar{L}_1 + v_1 \\ a_2 X_1 + b_2 X_2 + \dots + u_2 X_r = \bar{L}_2 + v_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_n X_1 + b_n X_2 + \dots + u_n X_r = \bar{L}_n + v_n \end{cases}$$

Lo stimatore delle medie lo ricaviamo applicando anche in questo caso il principio di massima verosimiglianza, cioè dicendo che la miglior stima delle medie delle grandezze misurate indirettamente fa sì che la sommatoria del quadrato degli scarti risulti minima.

Vediamo con un semplice esempio come si sviluppano i calcoli.

Supponiamo di dover stimare la media di due grandezze X_1, X_2 legate a tre misure dirette L_1, L_2, L_3 da combinazioni lineari secondo il sistema:

$$\begin{aligned} a_1 X_1 + b_1 X_2 &= L_1 \\ a_2 X_1 + b_2 X_2 &= L_2 \\ a_3 X_1 + b_3 X_2 &= L_3 \end{aligned}$$

Per quanto abbiamo appena visto il sistema deve essere riscritto nella forma

$$\begin{aligned} a_1 \bar{X}_1 + b_1 \bar{X}_2 &= \bar{L}_1 + v_1 \\ a_2 \bar{X}_1 + b_2 \bar{X}_2 &= \bar{L}_2 + v_2 \\ a_3 \bar{X}_1 + b_3 \bar{X}_2 &= \bar{L}_3 + v_3 \end{aligned}$$

più sinteticamente in forma matriciale: $A \cdot X = T + V$

dove:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad T = \begin{vmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \\ \bar{L}_3 \end{vmatrix} \quad V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}$$

Convenzionalmente A viene chiamata matrice disegno, X vettore delle incognite, T termine noto e V vettore degli scarti.

Esplichiamo ora in ogni equazione lo scarto incognito:

$$\begin{cases} a_1 \bar{X}_1 + b_1 \bar{X}_2 - \bar{L}_1 = v_1 \\ a_2 \bar{X}_1 + b_2 \bar{X}_2 - \bar{L}_2 = v_2 \\ a_3 \bar{X}_1 + b_3 \bar{X}_2 - \bar{L}_3 = v_3 \end{cases}$$

e scriviamo la sommatoria del quadrato degli scarti v_i

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 v_i^2 &= a_1^2 \bar{X}_1^2 + b_1^2 \bar{X}_2^2 + \bar{L}_1^2 + 2a_1 b_1 \bar{X}_1 \bar{X}_2 - 2a_1 \bar{X}_1 \bar{L}_1 - 2b_1 \bar{X}_2 \bar{L}_1 + \\ &+ a_2^2 \bar{X}_1^2 + b_2^2 \bar{X}_2^2 + \bar{L}_2^2 + 2a_2 b_2 \bar{X}_1 \bar{X}_2 - 2a_2 \bar{X}_1 \bar{L}_2 - 2b_2 \bar{X}_2 \bar{L}_2 + \\ &+ a_3^2 \bar{X}_1^2 + b_3^2 \bar{X}_2^2 + \bar{L}_3^2 + 2a_3 b_3 \bar{X}_1 \bar{X}_2 - 2a_3 \bar{X}_1 \bar{L}_3 - 2b_3 \bar{X}_2 \bar{L}_3 \end{aligned}$$

La ricerca del minimo di questa funzione a due variabili avviene risolvendo un sistema delle due equazioni che esprimono l'annullamento delle due derivate parziali calcolate rispetto alle due grandezze incognite. Il sistema assume la seguente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum v_i^2}{\partial \bar{X}_1} = \bar{X}_1 (2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2) + \bar{X}_2 (2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 2a_3 b_3) - (2a_1 \bar{L}_1 + 2a_2 \bar{L}_2 + 2a_3 \bar{L}_3) = 0 \\ \frac{\partial \sum v_i^2}{\partial \bar{X}_2} = \bar{X}_1 (2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 2a_3 b_3) + \bar{X}_2 (2b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_3^2) - (2b_1 \bar{L}_1 + 2b_2 \bar{L}_2 + 2b_3 \bar{L}_3) = 0 \end{cases}$$

(Questo è un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite X_1, X_2 , che può essere riscritto usando la notazione matriciale nel seguente modo: $N \cdot X = T_n$ dove:

$$N = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{vmatrix} \quad T_n = \begin{vmatrix} a_1 \bar{L}_1 + a_2 \bar{L}_2 + a_3 \bar{L}_3 \\ b_1 \bar{L}_1 + b_2 \bar{L}_2 + b_3 \bar{L}_3 \end{vmatrix}$$

Come si può subito notare la matrice dei coefficienti del sistema normale (detta matrice normale) è una matrice quadrata di ordine 2, è simmetrica e i suoi termini dipendono solo dai coefficienti del sistema originario.

Anche il vettore dei termini noti normalizzati, T_n , dipende solo dai coefficienti del sistema originario e dalle stime delle misure dirette note all'inizio del procedimento di stima.

La stima delle grandezze indirette si ottiene risolvendo il sistema normale, cioè risulta:

$$\mathbf{X} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{T}_n$$

Per le proprietà delle matrici, la matrice normale inversa, risulterà anch'essa simmetrica.

Si può subito osservare che con questo approccio, direttamente derivato dall'applicazione del principio dei minimi quadrati, ogni volta che si presenta un problema di stima occorre dapprima

scrivere l'equazione della sommatoria del quadrato degli scarti, quindi derivarla e solo a questo punto risulta possibile applicare un procedimento di calcolo automatico per l'inversione della matrice normale e il conseguente calcolo della soluzione.

Se si pensa che nella maggior parte delle applicazioni topografiche e fotogrammetriche le grandezze da stimare contemporaneamente possono essere anche in numero considerevole (> 100) si intuisce subito la pratica impossibilità di applicazione di tale metodo.

Fortunatamente è possibile giungere alla scrittura del sistema normale in modo molto più agevole, tenendo conto della osservazione che abbiamo appena fatto, e che cioè la matrice normale e il termine noto normalizzato dipendono solo dalla matrice disegno e dal vettore dei termini noti del sistema originale.

Infatti tra le matrici A, T, N e Tn sussistono le seguenti relazioni:

$$N = A^T * A \quad e \quad T_n = A^T * T$$

Dimostriamo queste affermazioni nel caso dell'esempio che stiamo analizzando

$$A^T \cdot A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{vmatrix} = N$$

$$A^T \cdot T = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \\ \bar{L}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\bar{L}_1 + a_2\bar{L}_2 + a_3\bar{L}_3 \\ b_1\bar{L}_1 + b_2\bar{L}_2 + b_3\bar{L}_3 \end{vmatrix} = T_n$$

Grazie alle relazioni che abbiamo appena dimostrato nel caso semplice preso in esame (ma valide per qualsiasi valore $m < n$) è possibile affrontare il problema della stima di r misure indirette in funzione di n misure dirette in modo completamente automatico.

Sarà sufficiente infatti conoscere i valori degli elementi della matrice disegno (coefficienti delle combinazioni lineari che legano le r misure indirette a una sola misura diretta) e del vettore dei termini noti (valori delle misure dirette), per determinare in modo automatico la matrice normale e il vettore dei termini noti normalizzati che, come abbiamo dimostrato, esprimono il sistema che risolve il problema della stima secondo il principio di massima verosimiglianza.

Anche in questo caso, come negli ultimi due paragrafi, occorre tenere conto che le n misure dirette sono in genere caratterizzate da precisioni diverse, per cui il loro contributo alla stima delle medie delle misure indirette, deve essere pesato.

Questo, come noto, significa che ogni misura diretta deve essere moltiplicata per il suo peso e quindi nel sistema (90) occorre moltiplicare ogni equazione per il peso della misura diretta interessata.

In notazione matriciale questa operazione di pesatura avviene nel seguente modo:

$$P \bullet A = P \bullet T$$

dove la matrice P è una matrice diagonale (elementi tutti nulli ad eccezione di quelli della diagonale principale) di ordine n così strutturata:

P=

$$\begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & 0 & p_n \end{vmatrix}$$

Le relazioni per il calcolo della matrice normale e del termine noto normalizzato assumono dunque la forma definitiva:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \qquad \mathbf{T}_n = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{T}$$

Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, il problema non si esaurisce qui: accanto alla stima della media occorre giungere anche alla stima della varianza.

In questo caso, dove le r misure indirette sono le variabili di una distribuzione normale a r dimensioni, occorre dunque determinare la matrice di varianza - covarianza. Essa sarà una matrice quadrata di ordine r nella quale gli elementi della diagonale principale saranno le varianze delle r misure indirette e gli altri elementi esprimeranno le covarianze.

NOTA: forniamo solo le formule per il calcolo della matrice di varianza - covarianze e di altre matrici che saranno utili nelle pratiche applicazioni di questo metodo di stima, rimandando lo studente a dei testi specialistici di trattamento delle osservazioni per la loro dimostrazione. Avendo introdotto i pesi, per prima cosa occorre determinare il valore della varianza dell'unità di peso in funzione delle medie stimate delle misure indirette. Risulta:

$$\bar{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}}{n - r}$$

dove il vettore degli scarti \mathbf{V} si calcola nel seguente modo:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} * \mathbf{X} - \mathbf{T}$$

La matrice di varianza-covarianza è fornita dalla seguente relazione:

$$C_{xx} = \bar{\sigma}_0^2 \cdot \mathbf{N}^{-1} = \begin{vmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_1 x_r} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2 x_r} \\ \dots & & \\ \sigma_{x_r x_1} & \sigma_{x_r x_2} & \sigma_{x_r}^2 \end{vmatrix}$$

Questa matrice, come si può dedurre dalla (97), è una matrice simmetrica di ordine r , in quanto abbiamo visto che anche la matrice normale (e di conseguenza la sua inversa) è una matrice simmetrica di ordine r .

Un'altra quantità importante da calcolare è la matrice di varianza - covarianza degli scarti (siccome la matrice soluzione \mathbf{X} contiene delle stime delle medie delle misure indirette, anche il vettore degli scarti rappresenterà la stima di una variabile scarto r -dimensionale caratterizzata anch'essa da una matrice di varianza - covarianza).

Questa si può determinare con la seguente relazione:

$$C_w = \sigma_0^2 \cdot (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T)$$

Nel caso in cui le relazioni che legano le r misure indirette alle n misure dirette non siano di tipo lineare, il procedimento di stima deve essere preceduto dalla linearizzazione delle equazioni attorno a un punto noto (valori approssimati delle incognite) e la stima delle medie delle misure indirette avverrà per successive iterazioni.

Il sistema di equazioni è genericamente:

$$f_i(X_1, X_2, \dots, X_r, L_i) = 0 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{e con } n > r$$

Nell'ipotesi che $X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0$ siano dei valori sufficientemente approssimati delle grandezze da misurare indirettamente (incognite) in modo tale che i quadrati degli scarti e le potenze superiori possano essere trascurati, avremo:

$$X_1 = X_1^0 + x_1$$

$$X_2 = X_2^0 + x_2$$

$$X_r = X_r^0 + x_r \quad b_i$$

$$f_i(X_1, X_2, \dots, L_i) = f_i(X_1^0, X_2^0, \dots, X_r^0, L_i) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_0 x_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_r}\right)_0 x_r = 0$$

Se indichiamo, per ciascuna equazione, con:

$$f_i(X_1^0, X_2^0, \dots, X_r^0, L_i) = -L_i$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}\right)_0 = a_i$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_2}\right)_0$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_r}\right)_0$$

Otterremo un sistema di equazioni linearizzate del tutto analogo al sistema di equazioni (90):

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots + u_1 x_r = L_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + \dots + u_2 x_r = L_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_n x_1 + b_n x_2 + \dots + u_n x_r = L_n \end{cases}$$

l'unica differenza è che, in questo caso, le incognite sono le correzioni x_j , da sommare ai valori approssimati X_i^0 per ottenere le grandezze incognite, n sistema (99) si chiama "sistema di equazioni alle correzioni".

In questo caso i termini noti L_i non sono misure dirette come nel sistema (90), ma misure indirette. La matrice di varianza – covarianza della distribuzione delle correzioni x_1, x_2, \dots, x_r coincide con la matrice di varianza – covarianza della distribuzione delle stime $\bar{X}_{1m}, \bar{X}_{2m}, \dots, \bar{X}_{rm}$ perché i valori approssimati $X_1^0, X_2^0, \dots, X_r^0$ sono delle costanti.

Se i valori approssimati delle incognite X_i^0 non sono sufficientemente approssimati per limitare lo sviluppo in serie delle equazioni ai soli termini lineari, bisogna innescare un procedimento iterativo di soluzione del sistema che consideri i valori delle incognite $X_i = X_i^0 + x_i$ ottenuti in una soluzione come nuovi valori approssimati per la soluzione successiva.

La convergenza del procedimento iterativo viene accertata mediante l'analisi delle correzioni x_i apportate da ogni singola iterazione e il procedimento potrà essere interrotto quando le ultime correzioni determinate sono di un ordine di grandezza inferiore alla precisione raggiungibile.

Un altro criterio per testare la convergenza del metodo iterativo e quindi decidere l'interruzione del procedimento di calcolo si basa sullo studio del comportamento del parametro σ_0^2 .

Si può dimostrare infatti che questo parametro raggiunge il suo valore minimo in corrispondenza della miglior soluzione raggiungibile.

Vedremo nel capitolo riguardante le reti topografiche, come questi concetti potranno essere utilizzati per una corretta gestione e interpretazione dei risultati.

4.1. METODI DI RILEVAMENTO TERRESTRE

I metodi di rilevamento terrestre si basano sulla misura diretta di direzioni angolari in piani orizzontali (direzioni azimutali) e verticali (direzioni zenitali), di distanze e di dislivelli.

Queste misure, opportunamente elaborate, consentono la determinazione delle coordinate dei punti del rilievo in un opportuno sistema di riferimento.

Nella maggior parte delle applicazioni, si procede separatamente al calcolo delle coordinate planimetriche da quelle altimetriche.

Nel seguito esamineremo quindi separatamente le metodologie di misura e compensazione di reti di inquadramento planimetriche e reti di inquadramento altimetriche.

4.1.1. RETI GEODETICHE FONDAMENTALI

L'idea di una rete di triangoli, introdotta da Snellius nel 1600, e ripresa poi da altri geodeti per stendere sul territorio una maglia di punti stabili e ben determinati, ha guidato per secoli le operazioni di inquadramento e di appoggio del rilevamento topografico.


Ci si è scostati da tale schema, semplice, sicuro, e bisognoso, praticamente, delle sole misure angolari, solo quando è stato risolto, in maniera efficiente, il problema della misura delle distanze con strumentazioni elettroniche.

Questo concetto di rete geodetica sta ulteriormente e radicalmente modificandosi nel momento in cui si sono affermate le nuove tecniche di rilievo GPS che illustreremo più avanti.

Le grandi reti geodetiche di punti trigonometrici distribuiti su tutto il territorio nazionale sono state rilevate mediante triangolazione. In Fig. 4.1 è riportata la rete geodetica italiana del primo ordine. Lo schema della triangolazione è a maglia ed i lati hanno lunghezze variabili da 30 a 50 km, con lati più corti dove la conformazione del terreno lo richiedeva e più lunghi (100 - 200 km) per i collegamenti delle isole.

Nell'ubicare i vertici di una rete del 1° ordine infatti si tende a disporre i vertici a distanza più grande possibile, onde limitarne il numero, ma occorre tenere presente che adottando distanze superiori a 30-40 km si rendono precarie le collimazioni dei segnali, e quindi la misura degli angoli risulta meno precisa; si può notare che la forma dei triangoli si avvicina il più possibile a quella equilatera.

Su tutto il territorio nazionale sono stati individuati circa 1.000 vertici geodetici del 1° ordine; di ciascuno di essi è stata predisposta dall'IGM una monografia che riporta i principali dati come indicato nella seguente figura:

Comando Regione Militare Nord-Ovest - Torino Stato C.C. Torino Comune Torino Proprietario Demanio		Punto Geodetico 0 1° 2° 056206																	
() Cupola della Basilica di Superga. Asse geometrico della lanterna sulla cupola. FCP: Segno con vernice indelebile sulla copertura dello spigolo Nord della balaustra sovrastante il frontone. Le differenze delle coordinate dal CT al FCP sono: $\Delta N = -3,30$; $\Delta E = -31,04$.																			
Coordinate geografiche $45^{\circ}04'48,7308''$ $-4^{\circ}41'03,309''$		SUPERGA (Basilica) Ord. I N. 056206																	
Coordinate Gauss-Strauss 4 992 678,14 1 403 036,83		<table border="1"> <thead> <tr> <th>ASC</th> <th>Linea map.</th> <th>ST. D. Q.</th> <th>ST. D. Q.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1877</td> <td>SC</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1908</td> <td>ST. D. Q.</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2008/2</td> <td>ST. Q.</td> <td></td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		ASC	Linea map.	ST. D. Q.	ST. D. Q.	1877	SC	1	1	1908	ST. D. Q.	3	2	2008/2	ST. Q.		1
ASC	Linea map.	ST. D. Q.	ST. D. Q.																
1877	SC	1	1																
1908	ST. D. Q.	3	2																
2008/2	ST. Q.		1																
Data di PP: M = 721,35 PP = Base lanterna																			
SUPERGA (Basilica) I 056 206		NFV8772908Q966																	

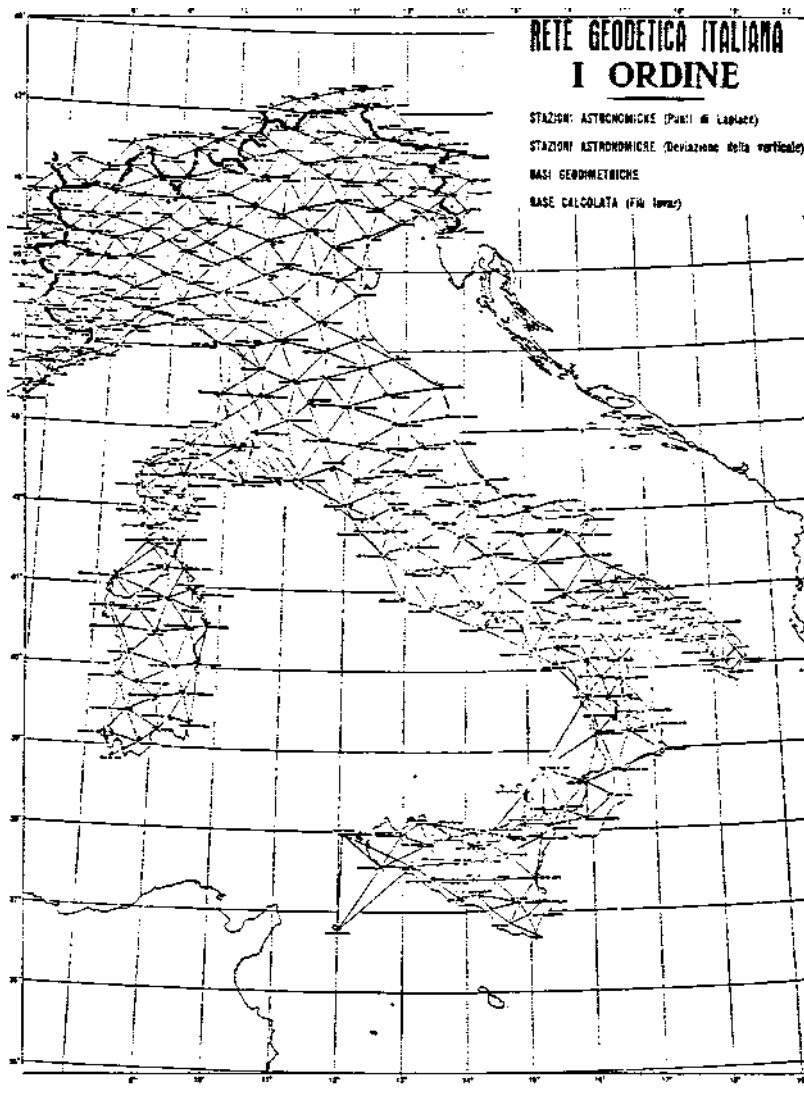


Fig. 4.1 rete geodetica nazionale del 1° ordine

Al centro dei triangoli costituiti dai vertici di 1° ordine sono stati rilevati i vertici di 2° ordine, compensati considerando privi di errore quelli del 1° ordine (fig. 4.2); con lo stesso criterio sono stati rilevati e compensati i vertici del 3° e 4° ordine.

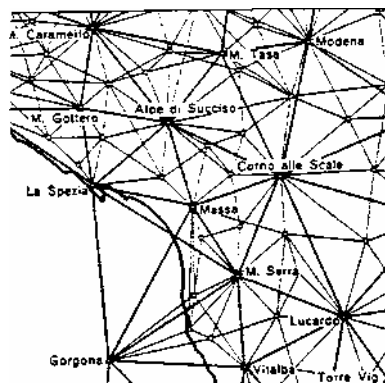


Fig. 4.2 rete geodetica del 2° ordine

I vertici di 1° e 2° ordine sono stati segnalizzati con molta cura costruendo un pilastrino per 150 osservazioni e ponendo un *centrino di riferimento* sulla sommità del pilastrino ed un centrino in profondità sulla stessa verticale del primo.

I segnali per i vertici del 3° ordine sono costruiti con le stesse modalità ma non hanno pilastrino per le osservazioni, dato che il treppiede è sufficientemente stabile per la precisione angolare richiesta. Molti vertici di 4° ordine sono costituiti da campanili il cui asse individua planimetricamente il punto, e su cui è individuato *il piano di paragone* per definire la quota.

Nel 1991 l'I.G.M. ha preparato il progetto IGM95 che disegnava una nuova rete geodetica fondamentale di alta precisione basata sul sistema GPS. Questo argomento sarà trattato più diffusamente nel capitolo relativo al GPS:

Questa nuova rete è stata concepita per fornire all'utenza un supporto affidabile a tutte le operazioni geodetiche e topografiche basate sulle moderne tecniche satellitari. Nel 1995 tutte le operazioni di rilievo sono state concluse come previsto (vedi Fig. 4.3).

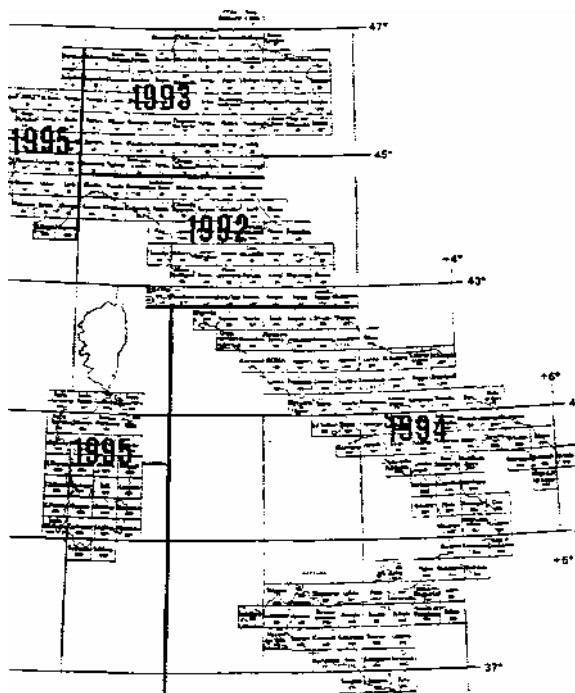


Fig. 4.3 - sequenza di rilievo della rete geodetica IGM95

I punti della nuova rete IGM95 sono stati scelti, quando possibile, in coincidenza con i vertici trigonometrici di 1°, 2° e 3° ordine della rete di triangolazione nazionale, aventi caratteristiche di facile accessibilità con automezzo; in mancanza di queste caratteristiche, è stato materializzato un nuovo punto.

La distanza reciproca tra i vertici della nuova rete è di circa 20 km (un vertice ogni 250 km²).

La rete IGM95 è stata inoltre collegata altimetricamente alla rete di livellazione fondamentale.

Ad ogni punto della nuova rete è stato associato un punto secondario, posto in prossimità di quello, con lo scopo di sostituire il punto principale in caso di sua distruzione.

La scelta di istituire questi vertici "associati", prossimi al vertice principale, è motivata anche dal fatto che un utente che impieghi metodi di rilievo tradizionali può utilizzare la nuova rete IGM95 disponendo di un orientamento iniziale, oltre che di un punto di partenza, per le proprie reti locali.

Oltre alle reti geodetiche dell'Istituto Geografico Militare sono distribuite su tutto il territorio italiano le reti di triangolazione del Catasto collegate ai vertici più vicini delle reti dell'I.G.M.; anche le reti catastali, che dovendo servire per la produzione di carte a grande scala sono costituite da numerosi vertici, sono organizzate in ordini diversi (reti principali, secondarie, ausiliarie).

4.1.1.1. RETI PLANIMETRICHE

Per la determinazione delle coordinate planimetriche dei vertici di una rete di inquadramento le uniche grandezze topografiche necessarie sono le direzioni azimutali e le distanze, opportunamente ridotte alla superficie di riferimento.

Nel seguito faremo riferimento a superfici di riferimento piane; questa ipotesi è valida per tutte le reti di estensione limitata a 10 km (campo topografico), dimensione ormai non più superata nel caso in cui si utilizzino metodi terrestri.

La stima delle coordinate dei vertici viene eseguita in un'unica operazione di compensazione utilizzando il metodo dei minimi quadrati nel caso più generale analizzato in 3.4.6.

Si utilizzerà cioè il metodo di stima di più grandezze indirette dipendenti da un numero esuberante di misure dirette; ricordiamo che la soluzione *analizzata* a suo tempo prevede che ogni equazione del sistema risolutivo dipenda da una sola misura diretta.

Prima dell'inizio delle operazioni di rilievo e compensazione, occorre sempre definire con precisione il sistema di riferimento all'interno del quale si intende ricavare la soluzione.

Per definire un sistema di riferimento cartesiano in un piano, occorre fissare tre gradi di libertà: due traslazioni (parallele agli assi) e una rotazione (attorno all'origine).

Questi vincoli possono essere forniti fissando arbitrariamente le coordinate X, Y di un punto della rete e una direzione (ad esempio la direzione dello zero della graduazione del cerchio azimutale del teodolite messo in stazione su una dei vertici della rete).

Un'alternativa è possibile definire il sistema di riferimento inserendo tra i vertici della rete, almeno due vertici di coordinate note nel sistema di riferimento che si intende utilizzare (questa seconda ipotesi è percorribile ovviamente nel caso delle reti di ordine inferiore al primo).

Tuttavia, anche in questi casi, è consigliabile compensare le reti in sistemi di riferimento locali (cioè definiti arbitrariamente dall'operatore nel modo prima descritto) e, successivamente, roto-traslare la rete compensata nel sistema di riferimento finale, utilizzando i punti di coordinate note in entrambi i sistemi. Questo problema sarà illustrato nel paragrafo 4.1.3. (fitting planimetrico).

4.1.1.2. CALCOLI DI COMPENSAZIONE

Definito il sistema di riferimento, è necessario determinare i valori approssimati delle coordinate incognite (per quanto detto prima se n sono i vertici della rete le incognite saranno $2n - 5$).

Questa operazione è fattibile utilizzando alcune delle misure eseguite in modo da poter impostare un trasporto di coordinate cartesiane.

Bisognerà poi definire le equazioni che legano le quantità incognite (coordinate X e Y dei vertici) alle misure dirette (angoli e distanze) che saranno i termini noti delle equazioni.

Consideriamo due punti P_1 e P_2 di coordinate X_1, Y_1, X_2, Y_2 .

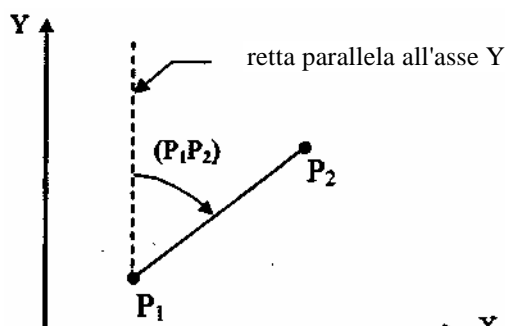


Fig. 4.4 — angolo di direzione e distanza

L'angolo di direzione (P_1P_2) sarà espresso dalla seguente relazione (indicando nell'equazione con 1 e 2 i punti P_1 e P_2):

$$\tan(P_1P_2) = \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}$$

mentre la distanza tra i due punti è data da:

$$d_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Quando si fa stazione con il teodolite sul punto P_1 , l'origine del cerchio azimutale si disporrà secondo una direzione qualunque che certamente non coinciderà con la direzione dell'asse delle Y del sistema di riferimento scelto. In altri termini l'angolo di direzione (P_1P_2) **non è misurabile direttamente**.

Sia L_1 (vedi fig.4.5) la direzione azimutale misurata dal teodolite (in stazione su P_1) quando si collima il punto P_2 .

La direzione azimutale L_2 (letta sul cerchio azimutale) differirà dunque dall'angolo di direzione cercato (P_1P_2) di un angolo β , detto **correzione azimutale di stazione**, anch'esso incognito:

$$L_2 = \beta + (P_1P_2)$$

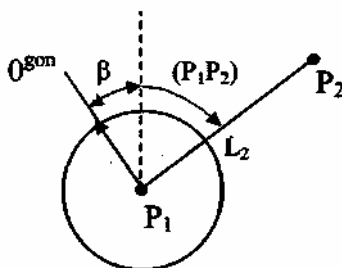


Fig. 4.5 - angolo di orientamento della stazione e direzione azimutale

La correzione azimutale di stazione (detta anche **orientamento della stazione**) sarà uguale per tutte le direzioni azimutali misurate con il teodolite in stazione sul punto P_1 purché, durante l'esecuzione delle misure, non si modifichi la posizione dell'origine della graduazione del cerchio azimutale. Se per un qualsiasi motivo questo dovesse accadere (nei teodoliti ottico-meccanici questo fatto può verificarsi nel caso di uso scorretto del metodo della reiterazione, mentre in alcuni teodoliti elettronici può avvenire anche in caso di spegnimento dello strumento), occorrerà introdurre un nuovo orientamento incognito, oppure ricondurre tutte le direzioni azimutali, misurate dopo lo spostamento dell'origine della graduazione, alla posizione della prima origine (operazione fattibile se tra le due serie di misure azimutali fatte con diversa origine ne esistono due riferite al medesimo punto collimato).

Considerando la (1) e la (3), per ogni direzione azimutale misurata è possibile scrivere la seguente equazione:

$$\arctan \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} - (P_1P_2) = \arctan \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} - L_2 + \beta = 0$$

Dove le incognite sono le coordinate $(X$ e $Y)$ dei punti P_1 e P_2 e β angolo di orientamento della stazione, mentre il termine noto sarà la direzione azimutale misurata L_2 .

Per ogni distanza misurata si può scrivere la seguente equazione:

$$\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} - d_{12} = 0$$

Dove le incognite sono le coordinate (X e Y) dei punti P1 e P2 mentre il termine noto dell'equazione sarà la distanza misurata d_{12} .

Infine, nel caso in cui non si vogliano considerare le direzioni azimutali ma gli angoli azimutali (vedi Fig. 4.6) tra i vertici della rete, ogni angolo α misurato genera un'equazione del tipo:

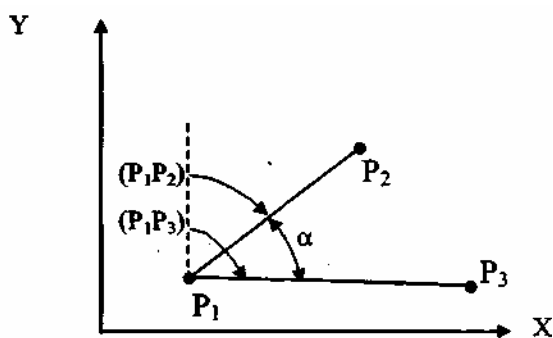


Fig. 4.6 – angolo azimutale

$$\arctan \frac{X_3 - X_1}{Y_3 - Y_1} - \arctan \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} - \alpha = 0$$

Le relazioni (4), (5) e (6) definiscono le equazioni fra le coordinate planimetriche dei vertici di una rete e le grandezze caratteristiche della rete stessa, angolo di direzione, distanza e angolo azimutale, che possono essere misurate direttamente.

Il problema del calcolo e della compensazione di una rete di n vertici consiste quindi nella misura indiretta delle $2n$ coordinate effettuata sulla base delle misure dirette di angoli di direzione, distanze e angoli azimutali in numero strettamente sufficiente o in numero esuberante.

Come abbiamo già detto i problemi relativi al calcolo e alla compensazione di una rete sono così ricondotti a quelli trattati in 3.4.6.

Per la determinazione delle $2n$ coordinate si deve definire e risolvere un sistema di $2r$ (con $r > n$) equazioni, e si devono quindi misurare direttamente $2r$ grandezze caratteristiche della rete che siano indipendenti.

Nel caso in cui si utilizzino come misure dirette angolari le direzioni azimutali occorre tenere conto che per ogni stazione eseguita, si introduce una nuova incognita di orientamento.

Occorre inoltre notare che ogni punto della rete, per poter essere determinato, deve essere interessato almeno da due direzioni azimutali (o un angolo azimutale) e da una distanza, oppure da tre direzioni azimutali (o due angoli azimutali).

Infine, poiché in tutti i tipi di equazione esaminati compaiono le differenze delle coordinate incognite, è necessario che esista almeno una misura di distanza (quest'ultima condizione può essere omessa nel caso in cui nella rete esistano almeno due punti di coordinate note nel sistema di riferimento utilizzato per i calcoli).

Riprendiamo brevemente il procedimento di calcolo a suo tempo dimostrato. Poiché le equazioni utilizzate **non sono lineari**, è necessario procedere a una loro linearizzazione calcolando i termini del primo ordine dello sviluppo in serie di Taylor nell'intorno dei valori approssimati delle incognite.

Consideriamo l'equazione all'angolo di direzione:

$$f(X_1, Y_1, X_2, Y_2, \beta, L_2) = \arctan \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} - L_2 + \beta = 0$$

Siano $X_1^0, Y_1^0, X_2^0, Y_2^0, \beta^0$ i valori approssimati delle incognite.

Lo sviluppo in serie di Taylor, fermato ai termini lineari, della (7) sarà pari a:

$$f(X_1^0, Y_1^0, X_2^0, Y_2^0, \beta^0, L_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^0 x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)^0 y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^0 x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)^0 y_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^0 \beta_c = 0$$

dove:

- il primo addendo (termine noto dell'equazione lineare risultante) rappresenta la differenza tra il valore della direzione azimutale calcolata con i valori approssimati delle incognite e il valore della direzione azimutale misurata;
- $x_1, y_1, x_2, y_2, \beta_c$ sono le correzioni da apportare ai valori approssimati delle incognite;
- i coefficienti tra parentesi tonde sono i valori delle derivate indicate calcolate con i valori approssimati delle incognite.

Si può facilmente verificare che i coefficienti delle correzioni assumono i seguenti valori:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^0 = \left(\frac{-1}{1 + \frac{(X_2 - X_1)^2}{(Y_2 - Y_1)^2}} \cdot \frac{1}{Y_2 - Y_1}\right)^0 = -\frac{Y_2^0 - Y_1^0}{(d_{12}^0)^2} = a_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^0 = \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{(d_{12}^0)^2} = c_1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)^0 = \frac{X_2^0 - X_1^0}{(d_{12}^0)^2} = b_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)^0 = -\frac{X_2^0 - X_1^0}{(d_{12}^0)^2} = d_1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^0 = 1$$

L'equazione (7) linearizzata sarà quindi pari a:

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 x_2 + d_1 y_2 + \beta_c + (P_1 P_2)^0 - L_2 = 0 \quad (8)$$

Quando uno dei due vertici della rete (P_1 o P_2) è un vertice di coordinate note (vertice fisso), l'equazione (8) si semplificherà perché le corrispondenti correzioni sono nulle.

Analogamente per l'equazione alla distanza risulterà:

$$f(X_1, Y_1, X_2, Y_2, d_{12}) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} - d_{12} = 0$$

che sviluppata in serie di Taylor, limitatamente ai termini lineari, sarà pari a:

$$f(X_1^0, Y_1^0, X_2^0, Y_2^0, d_{12}^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^0 x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)^0 y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^0 x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)^0 y_2 = 0$$

dove il primo addendo (termine noto dell'equazione lineare risultante) rappresenta la differenza tra il valore della distanza calcolata con i valori approssimati delle incognite (d_{12}^0) e la distanza misurata (d_{12}). Inoltre x_1, y_1, x_2, y_2 sono le correzioni da apportare ai valori approssimati delle

incognite. I coefficienti dello sviluppo in serie sono espressi dalle seguenti relazioni:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)' = \left[\frac{-1}{2\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}} \cdot 2(X_2 - X_1) \right]' = -\frac{X_2^\circ - X_1^\circ}{d_{12}^\circ} = a_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)' = \frac{X_2^\circ - X_1^\circ}{d_{12}^\circ} = c_1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)' = -\frac{Y_2^\circ - Y_1^\circ}{d_{12}^\circ} = b_1 \quad \left(\frac{\partial g}{\partial Y_2}\right)' = \frac{Y_2^\circ - Y_1^\circ}{d_{12}^\circ} = d_1$$

L'equazione (9) linearizzata sarà quindi pari a:

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 x_2 + d_1 y_2 + d_{12}^\circ - d_{12} = 0 \quad (10)$$

Quando uno dei due vertici della rete (P₁ o P₂) è un vertice di coordinate note (vertice fisso), l'equazione (10) si semplificherà perché le corrispondenti correzioni sono nulle.

Infine, l'equazione dell'angolo azimutale risulta:

$$f(X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, \alpha) = \arctan \frac{X_3 - X_1}{Y_3 - Y_1} - \arctan \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} - \alpha = 0$$

che sviluppata in serie di Taylor, limitatamente ai termini lineari, sarà pari a:

$$f(X_1^\circ, X_2^\circ, Y_1^\circ, Y_2^\circ, \alpha^\circ) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^\circ \cdot x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^\circ \cdot x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)' \cdot y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)' \cdot y_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_3}\right)' \cdot x_3 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_3}\right)' \cdot y_3 = 0$$

dove il primo addendo (termine noto dell'equazione lineare risultante) rappresenta la differenza tra il valore dell'angolo azimutale (α°) calcolato con i valori approssimati delle incognite e il valore dell'angolo (α) misurato direttamente in campagna.

Inoltre X₁, Y₁, X₂, Y₂, X₃, Y₃ rappresentano le correzioni da apportare ai valori approssimati delle incognite. I coefficienti dello sviluppo in serie sono espressi dalle seguenti relazioni:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)' = -\frac{Y_3^\circ - Y_1^\circ}{(d_{13}^\circ)^2} + \frac{Y_2^\circ - Y_1^\circ}{(d_{12}^\circ)^2} = a_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)' = \frac{X_3^\circ - X_1^\circ}{(d_{13}^\circ)^2} - \frac{X_2^\circ - X_1^\circ}{(d_{12}^\circ)^2} = b_1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)' = -\frac{Y_2^\circ - Y_1^\circ}{(d_{12}^\circ)^2} = c_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)' = \frac{X_2^\circ - X_1^\circ}{(d_{12}^\circ)^2} = d_1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_3}\right)' = \frac{Y_3^\circ - Y_1^\circ}{(d_{13}^\circ)^2} = e_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial Y_3}\right)' = -\frac{X_3^\circ - X_1^\circ}{(d_{13}^\circ)^2} = f_1$$

L'equazione (11) linearizzata sarà quindi pari a:

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 x_2 + d_1 y_2 + e_1 x_3 + f_1 y_3 + \alpha^\circ - \alpha = 0$$

In questo caso è possibile che uno o anche due dei vertici della rete tra cui si è misurato l'angolo azimutale a siano fissi, cioè con coordinate note da non compensare; l'equazione (12) si semplificherà perché i corrispondenti termini di correzione si annulleranno.

Le coordinate dei vertici della rete saranno ricavate attraverso un calcolo di compensazione che utilizza il criterio dei minimi quadrati, applicato alla matrice A (matrice disegno) dei coefficienti delle incognite (come già visto in 3.4.6).

Per ogni misura di distanza, di angolo o di direzione, eseguita tra i vertici della rete, viene scritta la corrispondente equazione linearizzata come riportato in (8), (10) e (12) e i coefficienti delle incognite saranno opportunamente memorizzati nella matrice A.

Il sistema A presenta sempre un numero di equazioni maggiore del numero delle incognite e raggruppa equazioni linearizzate che appartengono a tipologie diverse perché ottenute dalla misura di grandezze topografiche diverse quali una distanza un angolo o una direzione azimutale.

La diretta conseguenza di ciò è che i pesi di ciascun gruppo di equazioni che si riferiscono alle diverse tipologie di misure (angolari o di distanza), sono costanti, ma sono diversi per i due gruppi. I pesi saranno inversamente proporzionali ai quadrati degli errori medi dei termini noti delle equazioni:

$$(P_i)_\alpha = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\alpha_i}^2} \quad (P_i)_d = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{d_i}^2}$$

Indicando con A la matrice dei coefficienti delle incognite, con P la matrice dei pesi, con X la matrice colonna delle incognite e con T la matrice colonna dei termini noti delle equazioni, avremo (vedi 3.4.6.):

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{T}$$

$$\mathbf{A}^T * \mathbf{P} * \mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{A}^T * \mathbf{P} * \mathbf{T}$$

Indicando con N la matrice normale ottenuta dal prodotto di $\mathbf{A}^T * \mathbf{P} * \mathbf{A}$ e con \mathbf{T}_n la matrice colonna dei termini noti del sistema normale ottenuta dal prodotto di $\mathbf{A}^T * \mathbf{P} * \mathbf{T}$ avremo:

$$\mathbf{N} * \mathbf{X} = \mathbf{T}_n$$

e quindi la soluzione:

$$\mathbf{X} = \mathbf{N}^{-1} * \mathbf{T}_n$$

Il vettore soluzione X conterrà le correzioni X_i, Y_i , che, sommate ai valori approssimati delle incognite X_i^0, Y_i^0 daranno il valore delle incognite X_i, Y_i :

$$X_i = X_i^0 + x_i$$

$$Y_i = Y_i^0 + y_i$$

Poiché tutte le equazioni sono state linearizzate sviluppandole in serie di Taylor, nell'intorno dei valori approssimati delle incognite, ma limitatamente ai soli termini lineari, la soluzione andrà ricercata mediante una serie di iterazioni di calcolo.

Anche il metodo poco rigoroso per la determinazione dei valori approssimati delle incognite (ad esempio la lettura delle coordinate dei vertici della rete su una cartografia) impone di ricercare la soluzione del problema sempre attraverso un calcolo iterativo.

Ad ogni iterazione, il sistema risolvibile verrà riscritto utilizzando come nuovi valori approssimati quelli calcolati nell'iterazione appena eseguita.

Questa sequenza di cicli di calcolo sarà interrotta quando le correzioni X_i, Y_i saranno praticamente mille o comunque di un ordine di grandezza inferiore alla precisione delle coordinate incognite.

La decisione di interrompere le iterazioni può anche essere presa nel momento in cui la stima della varianza dell'unità di peso raggiunge il suo valore minimo.

La soluzione del problema sarà data quindi da:

$$X_i^{lit} = X_i^0 + x_i^{lit} \quad Y_i^{lit} = Y_i^0 + y_i^{lit}$$

$$\begin{aligned}
 X_i^{2it} &= X_i^{1it} + x_i^{2it} & Y_i^{2it} &= Y_i^{1it} + y_i^{2it} \\
 \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\
 X_i^{nit} &= X_i^{(n-1)it} + x_i^{nit} & Y_i^{nit} &= Y_i^{(n-1)it} + y_i^{nit}
 \end{aligned}$$

Normalmente la convergenza verso la soluzione finale del sistema si ottiene con poche iterazioni di calcolo (4--10); in presenza di errori grossolani nei valori approssimati delle incognite si avrà una altrettanto veloce divergenza che porterà subito alla sua interruzione.

4.1.1.3. PRECISIONE DEI VERTICI DI UNA RETE

La posizione di un vertice è definita da due coordinate ricavate da misure di angoli e distanze e da un procedimento di calcolo; per stabilire la precisione di un vertice potrebbe sembrare naturale definire un errore di posizione come differenza vettoriale fra la posizione effettivamente trovata e quella che si sarebbe ottenuta qualora le misure fossero state eseguite in maniera esatta, e cercare di dare in qualche maniera un'idea dell'entità di questo errore.

Sulla base però di quanto già affermato sulla definizione di misura diretta di una grandezza, che è rappresentata dalla distribuzione delle misure possibili, occorre riferirsi alla distribuzione delle posizioni possibili, definite da una variabile casuale a due dimensioni.

Per comprendere bene tale posizione si consideri una rete di « vertici definita quindi da $2n$ misure, si supponga di aver eseguito le $2n$ misure e di aver effettuato il calcolo delle coordinate dei vertici; una seconda serie di misure e di calcoli fornirà ovviamente delle coordinate diverse dato che il risultato di ogni misura diretta equivale ad un'estrazione a caso dalla distribuzione delle misure possibili.

Ripetendo misure e calcoli un numero di volte grande oltre ogni limite si otterrà per ogni vertice la distribuzione delle posizioni possibili, definita come schema matematico da una variabile casuale a due dimensioni.

Se la distribuzione è di tipo gaussiano, la variabile casuale è definita da due medie $m_j(x)$, $m_j(y)$, due varianze $S^2(x)$, $S^2(y)$ e da una covarianza σ .

In effetti secondo tale posizione la rete di n vertici è definita da una variabile casuale a $2n$ dimensioni, conosciuta quando sono note le $2n$ medie e la matrice di varianza-covarianza; ad esempio per una rete di tre vertici P_1, P_2, P_3 , le sei medie $m(X_{p1}), m(Y_{p1}), m(X_{p2}), m(Y_{p2}), m(X_{p3}), m(Y_{p3})$, definiscono le posizioni dei vertici e la matrice

$$C_{xx} = \begin{vmatrix}
 \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1Y_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \sigma_{X_1Y_1} & \sigma_{Y_1}^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \sigma_{X_2}^2 & \sigma_{X_2Y_2} & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \sigma_{X_2Y_2} & \sigma_{Y_2}^2 & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma_{X_3}^2 & \sigma_{X_3Y_3} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma_{X_3Y_3} & \sigma_{Y_3}^2
 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Fig. 4.7 - matrice di varianza – covarianza

definisce le caratteristiche della distribuzione a 6 dimensioni ovvero la precisione della rete. La matrice C_{xx} si ottiene dalle varianze delle misure. In pratica è però più conveniente riferirsi alle distribuzioni a due dimensioni definite ognuna da due medie, che danno la posizione del vertice, e dalla sottomatrice 2×2 che da la varianza e la

covarianza delle due coordinate e che nella Fig. 4.7 sono state individuate con dei contorni tratteggiati.

Gli altri termini che compaiono, in maniera simmetrica nella matrice, sono poco significativi e quindi trascurabili. I termini contenuti nelle sottomatrici evidenziate sono invece necessari per il calcolo dei parametri *dell'ellisse standard* relativo a ciascun vertice.

4.1.1.4. CONSIDERAZIONI OPERATIVE PER LA CONDOTTA DEI CALCOLI

Il calcolo di una rete planimetrica viene eseguito con opportuni programmi automatici che al termine delle operazioni consentono all'operatore di analizzare tutti i risultati intermedi e finali al fine di valutare la bontà della soluzione ottenuta.

Il primo controllo da fare si basa sull'osservazione del valore assunto dalla varianza dell'unità di peso stimata al termine della compensazione: se S_0^2 è inferiore o poco superiore al valore fissato all'inizio della compensazione la soluzione trovata può essere considerata accettabile nei limiti di precisione risultanti.

Se invece tale valore è molto superiore a quello fissato inizialmente significa che all'interno del sistema ci sono problemi che possono essere legati a errori grossolani nella determinazione delle coordinate approssimate dei punti oppure, più frequentemente, alla presenza di errori grossolani in alcune delle misure dirette utilizzate.

La ricerca delle misure che disturbano la soluzione del sistema può essere facilitata dall'analisi delle medie e degli s.q.m. delle popolazioni degli scarti. Come criterio generale si opera nel seguente modo:

- > le equazioni che presentano scarti residui superiori di 2-3 volte allo s.q.m. relativo vengono introdotte nel sistema con un peso inversamente proporzionale all'entità dello scarto residuo;
- > quando un'equazione, pur essendo stata sottopesata, continua a fornire scarti residui superiori di 2-3 volte allo s.q.m. relativo, questa viene definitivamente eliminata.

Ovviamente in questa operazione occorrerà fare attenzione a che siano rispettate le condizioni geometriche minime per la determinazione di ogni singolo vertice.

È quindi opportuno iniziare la compensazione di una rete con un numero consistente di equazioni esuberanti (e quindi di misure eseguite), in modo da poter ottenere comunque una soluzione accettabile senza dover ripetere l'intera campagna di misure.

4.1.2. RETI ALTIMETRICHE

L'impiego principale delle livellazioni geometriche è quello di determinare con la massima precisione possibile le quote di punti distribuiti su un determinato territorio che costituiscono, in analogia alle reti trigonometriche, i riferimenti altimetrici fondamentali a cui si possono collegare le successive operazioni di rilievo altimetrico.

Le livellazioni geometriche collegano caposaldi disposti lungo linee, le linee intersecandosi determinano dei poligoni chiusi, aventi sviluppi più o meno lunghi a seconda dei casi. Un esempio di rete di linee di livellazione è quello di Fig. 4.8 relativo al territorio nazionale rilevata dall'IGM per circa 18.000 km di sviluppo.



Fig. 4.8 rete di linee di livellazione geometrica di precisione

L'I.G.M. ha pubblicato per ciascuna linea un fascicolo in cui sono state riportate le monografie di tutti i caposaldi con le indicazioni utili per il loro ritrovamento sul terreno e le relative quote. Gli accorgimenti usati nel rilievo delle grandi linee di livellazione nazionali vengono adottati anche nel rilievo delle linee di livellazione di altissima precisione, ma di minore estensione, che vengono di solito attuate per studiare i movimenti del suolo o per controllare i cedimenti di grandi strutture.

4.1.2.1. Livellazioni geometriche di precisione e tecniche

Le livellazioni geometriche di precisione si eseguono con gli stessi criteri utilizzati in quelle di alta precisione, solo la strumentazione può essere di minor precisione e le battute di livellazione più lunghe.

Questo tipo di livellazione viene in genere eseguito con uno scopo tecnico ben preciso e non vi è bisogno quindi di determinare le quote assolute dei caposaldi, non è necessario cioè collegare uno dei caposaldi della rete locale con un caposaldo di quota assoluta nota, in quanto per le informazioni altimetriche richieste sono sufficienti i dislivelli.

In questi casi si assegna una quota convenzionale ad uno dei caposaldi della rete locale e si derivano da questa tutte le altre quote. È opportuno dare una quota convenzionale molto diversa da un valore plausibile, onde evitare equivoci in future operazioni di livellazione che implicino collegamenti con caposaldi di quota assoluta nota.

4.1.2.2. Precisione delle livellazioni geometriche

Nel paragrafo 6.4.2. di queste dispense, viene esaminata la precisione della singola battuta di livellazione geometrica. Si dimostra che lo s.q.m. globale è funzione dalle fluttuazioni accidentali di lettura alla stadia, di centramento della livella e dall'errore di verticalità della stadia.

Si può quindi ritenere che se la distanza fra le stadiie in ogni battuta di livellazione è mediamente la stessa sarà costante anche lo s.q.m. di ciascuna battuta e pari a σ_b .

Il dislivello fra due caposaldi collegati con n battute di livellazione geometrica è ottenuto quindi come somma di n dislivelli e sarà pari a:

$$\begin{aligned}\sigma'_{linea} &= \sigma'_b + \sigma'_b + \sigma'_b + \dots + \sigma'_b = n\sigma'_b \\ \sigma_{linea} &= \sqrt{n} \sigma_b\end{aligned}\quad (14)$$

Se con L indichiamo lo sviluppo lineare della linea di livellazione avremo che il numero n di battute

sarà dato da: $n = \frac{L}{100 \text{ m}}$ e quindi $\sigma_{linea} = \sqrt{\frac{L}{100}} \sigma_b$.

Si può dedurre quindi che lo s.q.m. del dislivello fra due caposaldi è proporzionale alla radice quadrata dello sviluppo L della linea di livellazione geometrica che li collega.

4.1.2.3. Compensazione di una rete di livellazione

La compensazione di una rete di livellazione si esegue con le stesse modalità, qualunque sia il tipo di misura dei dislivelli adottato (livellazione geometrica, trigonometrica ecc.)

Quello che varia è l'entità dello s.q.m. delle misure che, nel caso di livellazione geometrica cresce proporzionalmente alla radice quadrata dello sviluppo lineare della linea di livellazione, mentre nella livellazione trigonometrica si può assumere, per distanze inferiori a 10 km, che cresca proporzionalmente alla distanza stessa.

Una rete di livellazione può essere collegata a uno o più punti di quota nota, o essere a se stante; in quest'ultimo caso per eseguire la compensazione si dovrà assegnare un valore arbitrario alla quota di un punto.

L'equazione alle misure che lega le quote incognite Q_i e Q_j di due punti P_i e P_j alla misura di dislivello Δ_{ij} è la seguente:

$$Q_j - Q_i - \Delta_{ij} = 0 \quad (15)$$

Se le misure sono quelle strettamente necessarie, il calcolo delle quote dei punti della rete è banale, riducendosi alla somma di dislivelli a partire dal punto o dai punti di quota nota.

In pratica, però, si esegue sempre un numero di misure di dislivello superiore a quello minimo necessario e quindi il calcolo della rete sarà quello della misura indiretta di n grandezze con un numero esuberante di equazioni già visto in 3.4.6..

Il procedimento di calcolo e di compensazione delle misure sarà del tutto analogo a quanto già visto per le reti planimetriche, con la semplificazione di avere un solo tipo di equazione che lega le incognite alle misure eseguite e per giunta già lineare (vedi [15]).

Il dislivello D_{ij} della [15] può essere il risultato di un'unica misura, o di una somma di dislivelli parziali. Se la quota di uno dei due punti tra cui si è misurato il dislivello è nota, l'equazione conterrà ovviamente come unica incognita quella del punto di quota incognita.

Se « sono i dislivelli misurati nella rete, potremo scrivere un sistema di n equazioni lineari di tipo [15]. Il sistema non richiederà alcun tipo di linearizzazione e non sarà quindi necessario conoscere i valori approssimati delle quote dei punti della rete e la soluzione sarà ottenuta mediante una sola iterazione di calcolo.

A volte può essere conveniente partire comunque dai valori approssimati delle incognite e risolvere il sistema di equazioni, così come si era fatto nel caso della compensazione delle reti planimetriche, ponendo $Q_i = Q_i^{\circ} + x_i$.

In questo modo, quando la livellazione viene eseguita per il controllo degli spostamenti altimetrici di un determinato territorio e si considerano come valori approssimati delle incognite le quote ottenute nella serie di misure precedente, si otterranno direttamente gli spostamenti verticali dei vertici di controllo.

Per meglio comprendere la sequenza dei calcoli di compensazione aiutiamoci con uno schema semplice di rete di livellazione che collega quattro caposaldi fra cui uno di quota nota:

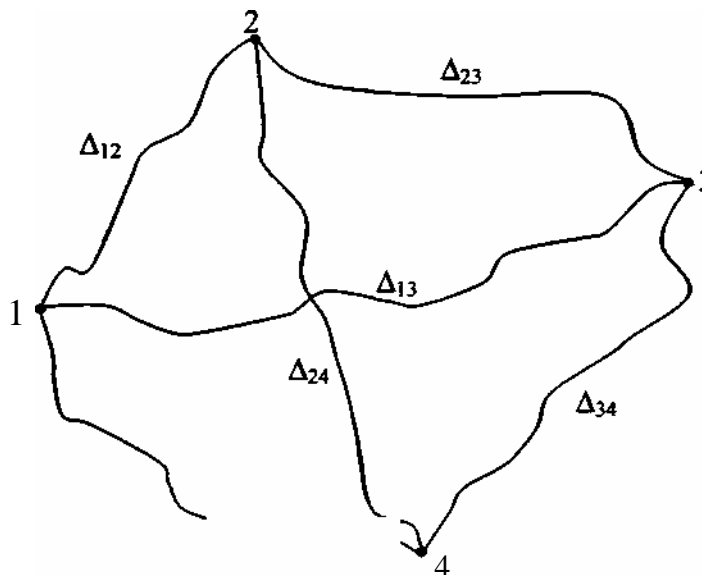


Fig. 4.9 schema di una rete di livellazione geometrica

Secondo lo schema di Fig. 4.9, nota o stabilita arbitrariamente per esempio la quota del punto 1, per il calcolo della quota dei restanti tre caposaldi sarebbero necessarie solamente altre tre misure di dislivello.

Le misure sovrabbondanti ci cautelano dalla presenza di eventuali errori grossolani nelle misure ma fanno nascere il problema della compensazione.

Ogni misura di dislivello genera una equazione di tipo [15] e per tutta la rete misurata si potrà scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} Q_2 - Q_1 - \Delta_{12} = 0 \\ Q_3 - Q_2 - \Delta_{23} = 0 \\ Q_4 - Q_3 - \Delta_{34} = 0 \\ Q_1 - Q_4 - \Delta_{41} = 0 \\ Q_4 - Q_2 - \Delta_{24} = 0 \\ Q_3 - Q_1 - \Delta_{13} = 0 \end{cases}$$

Il sistema [16] è incompatibile, ovvero non si possono trovare valori particolari delle incognite Q_j che soddisfino completamente le sei equazioni in quanto i termini noti D_{ij} non sono quantità teoriche ma sono dei campioni aleatori ed è estremamente improbabile che, ad esempio, le soluzioni che soddisfano un qualsiasi gruppo di tre delle sei equazioni soddisfino anche le rimanenti. Bisognerà ammettere che tutte le equazioni siano soddisfatte a meno di uno scarto v_i

$$\begin{cases} Q_2 - Q_1 - \Delta_{12} = v_1 \\ Q_3 - Q_2 - \Delta_{23} = v_2 \\ Q_4 - Q_3 - \Delta_{34} = v_3 \\ Q_1 - Q_4 - \Delta_{41} = v_4 \\ Q_4 - Q_2 - \Delta_{24} = v_5 \\ Q_3 - Q_1 - \Delta_{13} = v_6 \end{cases}$$

Il sistema [17] è indeterminato in quanto gli scarti v_i sono incogniti e quindi il problema è quello della soluzione di un sistema di sei equazioni lineari in nove incognite ($Q_2, Q_3, Q_4, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$).

Bisognerà quindi risolvere il problema mediante l'applicazione di qualche criterio; in base a quanto già visto, la soluzione più plausibile è quella ottenuta dall'applicazione del principio di massima verosimiglianza.

Prima della soluzione bisogna anche ricordare che ciascuna equazione deve entrare nella soluzione del sistema secondo la propria credibilità, secondo il proprio peso p_i :

per definizione il peso è pari a:
$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = \frac{\text{varianza dell'unità di peso}}{\text{varianza della misura (termine noto)}}$$

In base a quanto visto in 4.1.2.2. e cioè che lo s.q.m. di una linea di livellazione geometrica sia proporzionale alla radice quadrata dello sviluppo lineare L_i :

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{k L_i} \text{ per cui data l'arbitrarietà di } \sigma_0^2 \text{ si può assumere } p_i = \frac{1}{L_i}$$

Nella conduzione di calcoli, lo sviluppo lineare delle linee di livellazione (L_i) si esprime solitamente in km per facilitare il calcolo del peso.

La soluzione del sistema [17] può essere agevolmente affrontato con le tecniche del calcolo automatico e quindi mediante l'utilizzo delle matrici.

In base a quanto visto in 3.4.6. avremo:

$$\text{matrice disegno } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{vettore delle incognite } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{vettore termine noto } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} Q_1 + \Delta_{12} \\ \Delta_{23} \\ \Delta_{34} \\ -Q_1 + \Delta_{41} \\ \Delta_{24} \\ Q_1 + \Delta_{13} \end{bmatrix}$$

$$\text{matrice dei pesi } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_6 \end{bmatrix}$$

La sequenza dei calcoli che prevedono l'applicazione del principio di massima verosimiglianza e quindi del criterio dei minimi quadrati sarà al solito:

sistema iniziale

applicazione dei pesi e normalizzazione

sistema normalizzato

soluzione del sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{T} \\ \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{T}_n \\ \mathbf{X} &= \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{T}_n \end{aligned}$$

Essendo le equazioni di partenza già lineari, si otterrà la soluzione del sistema mediante una sola iterazione di calcolo.

Il vettore soluzione \mathbf{X} conterrà direttamente il valore delle quote dei vertici incogniti Q_i o le correzioni x_f che, sommate ai valori approssimati delle incognite Q_i^0 , daranno il valore delle incognite Q_i a seconda del criterio di calcolo adottato:

$$Q_i = x_i \quad Q_i = Q_i^0 + x_i$$

In base alle [95] e [96] del Gap. 3 si passerà poi al calcolo della matrice di varianza - covarianza:

calcolo degli scarti
calcolo della varianza dell'unità di peso

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{T}$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}}{n - r}$$

dove n rappresenta il numero di equazioni che compongono il sistema \mathbf{A} ed r rappresenta il numero di incognite. D denominatore esprime quindi il grado di "esuberanza" del sistema.

La matrice di varianza - covarianza per l'esempio che stiamo sviluppando (in base alla [95]) sarà pari a:

$$\mathbf{C}_{xx} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{N}^{-1} = \begin{vmatrix} \sigma_{\varrho_1}^2 & \dots & \dots \\ \dots & \sigma_{\varrho_2}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \sigma_{\varrho_n}^2 \end{vmatrix}$$

Lo s.q.m. delle incognite si ricaverà utilizzando i termini dalla diagonale principale della matrice \mathbf{C}_{xx} ; nel caso generale avremo:

$$\sigma_{\varrho_1} = \sqrt{\sigma_{\varrho_1}^2}$$

$$\sigma_{\varrho_2} = \sqrt{\sigma_{\varrho_2}^2}$$

.....

$$\sigma_{\varrho_n} = \sqrt{\sigma_{\varrho_n}^2}$$

tutti gli altri termini della matrice di varianza - covarianza non sono significativi perché le quote dei vertici incogniti non sono tra di loro correlate.

4.1.3. RETI LOCALI

Le reti locali possono avere una estensione molto variabile. Si passa dalla rete di inquadramento necessaria per la costruzione di una cartografia di un comune di alcune migliaia di ettari, a quelle di estensione assai ridotta, per esempio per il rilevamento di una lottizzazione, per la costruzione di un breve tronco stradale, o per il rilevamento architettonico e così via.

La loro configurazione quindi potrà variare da una semplice poligonale a una rete di poligonali o alla classica struttura di punti, connessi con forme triangolari.

Quando la rete è contenuta nel campo topografico, e non va localizzata sull'ellissoide, si possono utilizzare delle coordinate piane ortogonali assumendo un vertice come origine delle coordinate (a questo vertice si possono attribuire coordinate mille, o coordinate convenzionali qualsiasi) e un lato può essere assunto come asse delle ascisse.

I calcoli e la compensazione della rete, eseguiti con le formule della trigonometria piana sulla base delle misure degli angoli e delle distanze, forniranno le coordinate cartesiane di tutti i vertici.

Capita spesso invece che venga rilevata una rete locale per l'inquadramento di cartografia a media o grande scala. Questa rete locale dovrà necessariamente essere inserita nel sistema cartografico nazionale.

Il modo più ovvio di procedere sembrerebbe quello di considerare nella rete locale da rilevare anche alcuni vertici trigonometrici nazionali (se sono due, il sistema di riferimento verrà fissato con un grado di esuberanza), continuare poi con l'esecuzione delle misure topografiche di angoli e distanze e poi eseguire i calcoli di compensazione. Le coordinate dei vertici della rete locale, dopo i calcoli di compensazione, saranno automaticamente definite nel sistema di riferimento nazionale.

Questa procedura risulta improponibile perché le finalità con cui sono state costruite le reti e le sottoreti nazionali, sono totalmente diverse sia come precisione che densità e ubicazione dei vertici che non possono adattarsi alle esigenze di una rete locale.

Nei paragrafi seguenti si darà una indicazione sulla precisione intrinseca dei vertici delle reti nazionali e apparirà chiaro che in molti casi è da ritenersi insufficiente se paragonata con la precisione ottenibile nelle reti locali.

L'operazione di compensazione globale che preveda l'inserimento nella rete locale anche di alcuni vertici della rete nazionale di minor precisione, degraderebbe il risultato complessivo finale di tutti i vertici, e sarebbe vanificato lo sforzo di operare con strumentazioni topografiche di alta precisione. D'altra parte l'opportunità di riferire la cartografia, anche di zone limitate, al sistema di riferimento nazionale appare scontata.

Pertanto è consuetudine, nel rilevare una rete di inquadramento e di appoggio per cartografia operare nel modo seguente:

- > si rileva la rete locale con strumenti e metodi moderni, in modo da definire uno schema geometrico rigido ed auto controllato (in altri termini con misure esuberanti rispetto al minimo indispensabile);
- > nel rilevare la rete locale si avrà cura di determinare la posizione dei vertici trigonometrici della rete nazionale presenti in zona, di solito con operazioni di intersezione multipla in avanti;
- > si potranno quindi calcolare le coordinate nel sistema locale anche di questi vertici, già noti in coordinate nazionali;
- > se questa operazione è eseguita per almeno due punti, sarà possibile definire l'orientamento della rete locale, ossia calcolare i parametri della trasformazione conforme (roto-traslazione con variazione di scala) che consente di trasformare le coordinate locali nelle coordinate nazionali dei due punti utilizzati. Con tali parametri sarà possibile poi trasformare tutti i restanti punti della rete locale nel sistema nazionale;

> Se i punti noti nei due sistemi di riferimento (locale e nazionale) sono più di due, l'orientamento viene eseguito con il criterio dei minimi quadrati.

4.1.3.1. PRECISIONE DELLE RETI NAZIONALI

Attualmente la cartografia italiana fa riferimento a quattro sistemi geodetici diversi:

1. il sistema nazionale (M. Mario 1940 "Gauss - Boaga")

è il sistema in cui sono state calcolate le coordinate dei vertici della rete trigonometrica fondamentale italiana, a disposizione dell'utenza nei cataloghi IGM. Questo sistema è stato ufficialmente adottato anche dal Catasto che, allo stato attuale, lo utilizza solo per zone limitate.

L'ellissoide di riferimento è quello di internazionale (Hayford) orientato a Roma (osservatorio astronomico di M. Mario, definizione 1940).

Il calcolo della rete è stato eseguito nel 1908 - 1919 facendo riferimento ad un altro ellissoide (Bessel orientato a Genova) e solo nel 1940 è stato adottato l'ellissoide e l'orientamento attuale.

A seguito delle numerose campagne di triangolazione dell'IGM susseguitesi nel tempo, numerosi blocchi della rete sono stati rideterminati in base alle nuove misure e ai nuovi calcoli di compensazione, con conseguenti "distorsioni locali" nella rete; le coordinate attualmente in catalogo, sono quindi spesso diverse anche da quelle del 1940. La rete geodetica fondamentale o del 1° ordine è stata compensata in blocco dall'IGM nel 1983 (le dimensione della matrice normale ottenuta dal calcolo è stata di 1050 x 1050). Questo ricalcolo ha permesso di stabilire le precisioni dei vertici della rete attraverso i termini della matrice di varianza — covarianza.

Con riferimento alla Fig. 4.10, nella tabella seguente sono riportati, come esempio, i valori dei parametri caratteristici dell'ellisse d'errore di alcuni vertici della rete

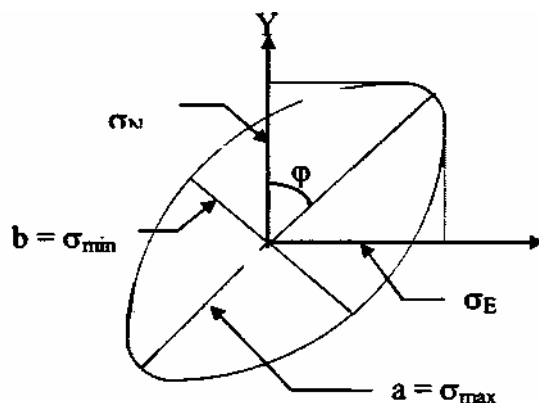


Fig. 4.10 ellisse d'errore rete IGM (calcolo del 1983)

n° punto	nome	σ_N [m]	σ_E [m]	$a = \sigma_{max}$ [m]	$b = \sigma_{min}$ [m]	φ [°]
057049	Monte Crea	0,54	0,60	0,68	0,42	52
056206	Superga	0,59	0,63	0,72	0,47	49
056134	Monte Musinè	0,63	0,65	0,75	0,51	47
055107	Rocciameione	0,69	0,69	0,80	0,56	45

2. il sistema europeo (ED50 - UTM)

è il sistema usato per il "taglio" della maggior parte della cartografia attualmente prodotta.

Non è impiegato invece come sistema di inquadramento, anche se sono disponibili le coordinate dei vertici della rete trigonometrica fondamentale in questo sistema.

L'ellissoide di riferimento è quello internazionale (Hayford) con orientamento medio europeo del 1950 (ED50). Il calcolo di compensazione delle principali rete europee del 1° ordine è stato eseguito dal U.S. Coast and Geodetic Survey nel 1950

Un punto ha coordinate che differiscono di decine o centinaia di metri rispetto allo stesso punto rappresentato nel sistema nazionale. Tali differenze sono dovute principalmente al diverso orientamento dell'ellissoide (diverso "Datum"), ma in parte anche ai differenti calcoli di compensazione che hanno dato origine ai valori finali delle coordinate.

Il passaggio dalle coordinate UTM alle Gauss-Boaga o viceversa non è eseguibile quindi con procedimenti analitici rigorosi, ma solo con formule empiriche valide in genere in zone di estensione limitata.

3. il sistema catastale

come già detto il Catasto italiano ha ufficialmente adottato il sistema nazionale "M. Mario 1940 Gauss - Boaga da vari anni ma, in pratica, solo in poche zone si è passati effettivamente a tale sistema.

Per la maggior parte del territorio nazionale la cartografia catastale ed i relativi atti di aggiornamento sono ancora riferiti al sistema catastale adottato in fase di formazione della cartografia (dal 1866 in poi), caratterizzato dall'uso della rappresentazione di Cassini - Soldner per zone limitate ciascuna con una diversa origine coincidente spesso con un vertice IGM.

L'estensione di ogni sistema è limitata in genere ad un massimo di 70 km dall'origine in direzione Est Ovest e a 100 km in direzione Nord Sud. La maggior parte delle province è compresa in sistemi di grande estensione (31 origini) e il rimanente territorio è suddiviso in sistemi più piccoli (oltre 800 complessivamente).

Il sistema di riferimento geodetico catastale coincidente con quello adottato dall'IGM (nella prima compensazione globale del 1908-1919) non è stato utilizzato per l'intero territorio nazionale perché i lavori di rilievo del catasto si sono svolti in molti casi prima del completamento dei lavori di triangolazione dell'IGM. Sempre a causa del ritardo delle operazioni IGM rispetto alle esigenze catastali sono state spesso assunti valori provvisori delle coordinate dei vertici di 1°, 2° e 3° ordine, fogniti volta per volta dallo stesso IGM ma spesso diversi dai definitivi.

La rete catastale non è quindi del tutto congruente con quella nazionale.

4. il sistema mondiale (WGS84)

è il sistema di riferimento attualmente adottato nel posizionamento mediante satelliti GPS (Global Positioning System).

È costituito da una tema cartesiana OXYZ con origine nel centro di massa convenzionale della terra ed asse Z diretto secondo l'asse di rotazione terrestre. Alla terna è associato un ellissoide con parametri diversi da quello internazionale con centro nell'origine ed assi coincidenti con quelli della terna stessa (ellissoide geocentrico).

Al sistema WGS84 non è associato ufficialmente alcun sistema cartografico, anche se è sempre più frequente l'adozione della rappresentazione UTM con inquadramento WGS84 (in analogia all'UTM ED50).

Utilizzando questa nuova tecnica di misura (illustrata più avanti) l'IGM ha realizzato la nuova rete geodetica del 1° ordine chiamata IGM95 costituita da 1236 punti materializzati stabilmente sul territorio nazionale con un errore medio tridimensionale inferiore a 5 cm.

4.1.3.2. Fitting planimetrico

Con riferimento alla Fig. 4.11, consideriamo un sistema di riferimento assoluto OEN e un sistema di riferimento locale oXY; siano T_x e T_y le coordinate dell'origine o e \mathbf{q} l'angolo di direzione dell'asse y rispetto al sistema assoluto.

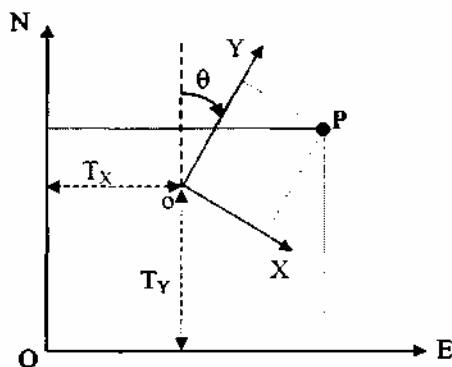


Fig. 4.11 schema della rototraslazione

Le relazioni analitiche fra le coordinate E,N e X,Y di un punto P sono:

$$\begin{aligned} E &= X \cos\theta + Y \sin\theta + T_x \\ N &= -X \sin\theta + Y \cos\theta + T_y \end{aligned}$$

Se fra il sistema locale e quello assoluto esiste anche una variazione di scala, le relazioni diventano:

$$E = \lambda(X \cos\theta + Y \sin\theta) + T_x \quad (18)$$

$$N = \lambda(-X \sin\theta + Y \cos\theta) + T_y \quad (19)$$

Queste sono le relazioni analitiche relative alla roto-traslazione con variazione isotropa di scala che nelle quali troviamo i quattro parametri incogniti \mathbf{q} , λ , T_x , T_y .

Ogni punto noto nei due sistemi di riferimento permette la scrittura di due equazioni del tipo (18 e 19) e quindi per la determinazione dei quattro parametri incogniti saranno sufficienti solamente due punti.

Se i punti noti sono più di due la determinazione dei quattro parametri incogniti avverrà tramite la scrittura di un sistema di $2n$ equazioni (sempre di tipo (18) e (19)) risolto con il criterio dei minimi quadrati.

Per risolvere il sistema di equazioni bisogna procedere prima alla loro linearizzazione mediante uno sviluppo in serie nell'intorno di una valore approssimato. I valori approssimati delle incognite si possono ricavare considerando i primi due punti noti P_1 e P_2 .

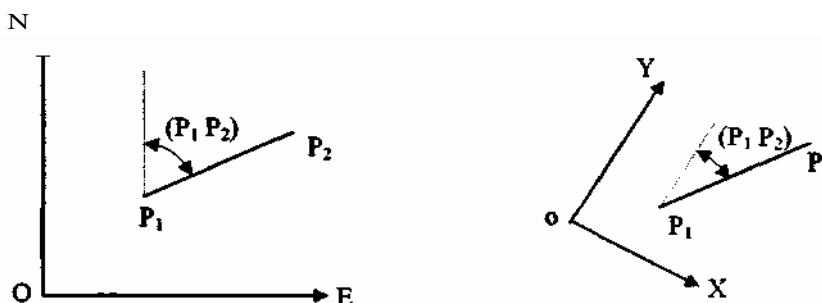


Fig. 4.12 - determinazione dei valori approssimati delle incognite

Le relazioni analitiche che possiamo scrivere a partire dai valori noti delle coordinate nei due sistemi di riferimento dei due punti P_1 e P_2 sono le seguenti:

$$(P_1P_2)_{E,N} = \arctan \frac{E_2 - E_1}{N_2 - N_1}$$

$$(P_1P_2)_{X,Y} = \arctan \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}$$

$$D_{1-2} = \sqrt{(E_2 - E_1)^2 + (N_2 - N_1)^2}$$

$$d_{1-2} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

da cui possiamo ricavare i valori approssimati della rotazione \mathbf{Q} e della scala \mathbf{I} :

$$\theta^0 = (P_1P_2)_{X,Y} - (P_1P_2)_{E,N}$$

$$\lambda^0 = \frac{D_{1-2}}{d_{1-2}}$$

Applicando i parametri approssimati θ^0 e λ^0 al primo punto P_1 , si otterranno le coordinate ruotate dello stesso punto:

$$\begin{aligned} XR_1 &= \lambda^0 (X_1 \cos \theta^0 + Y_1 \sin \theta^0) \\ &= \lambda^0 (-X_1 \sin \theta^0 + Y_1 \cos \theta^0) \end{aligned}$$

e imponendo la coincidenza di P_1 nei due sistemi di riferimento potremo determinare i valori approssimati delle traslazioni:

$$T_x^0 = E_1 - XR_1 \quad (22)$$

$$T_y^0 = N_1 - YR_1 \quad (23)$$

Le equazioni (18) e (19), considerando che il fattore di scala X che non modifica nulla nella roto-traslazione è pari all'unità, diventano:

$$\begin{aligned} (1 + \lambda)(X \cos \theta + Y \sin \theta) + \\ (1 + \lambda)(-X \sin \theta + Y \cos \theta) + T_y - N = 0 \quad g(\theta, \lambda, T_y) = 0 \end{aligned}$$

che sviluppate in sviluppate in serie di Taylor, fermato ai termini lineari, indicando con Δ_θ Δ_λ Δ_{T_x} Δ_{T_y} le correzioni da dare ai valori approssimati delle incognite, diventano:

$$f(\theta, \lambda, T_x) = f^0 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^0 \Delta_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^0 \Delta_\lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial T_x}\right)^0 \Delta_{T_x} = a_1 \Delta_\theta + a_2 \Delta_\lambda + a_3 \Delta_{T_x} + TN_1 = 0 \quad (24)$$

$$g(\theta, \lambda, T_y) = g^0 + \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^0 \Delta_\theta + \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right)^0 \Delta_\lambda + \left(\frac{\partial g}{\partial T_y}\right)^0 \Delta_{T_y} = b_1 \Delta_\theta + b_2 \Delta_\lambda + b_3 \Delta_{T_y} + TN_2 = 0$$

dove i coefficienti e i termini noti, com'è immediato verificare eseguendo le derivate rispetto ai parametri incogniti, e calcolandole in corrispondenza dei valori approssimati λ^0 , θ^0 , T_x^0 , T_y^0 , sono:

$$\begin{aligned} a_1 &= YR & a_2 &= XR & a_3 &= 1 & TN_1 &= (XR + T_x^0) - X \\ b_1 &= -XR & b_2 &= YR & b_3 &= 1 & TN_2 &= (YR + T_y^0) - Y \end{aligned}$$

Ogni punto di orientamento, noto nei due sistemi di riferimento (locale X,Y e cartografico E,N), permetterà la scrittura di due equazioni di tipo (18) e (19) o nella forma linearizzata (24) e (25) e l'insieme dei punti noti permetterà la costruzione della matrice dei coefficienti delle incognite (\mathbf{Q} , \mathbf{I} , T_x , T_y) costituita da $2n$ righe e 4 colonne.

La soluzione, come già detto in precedenza, si otterrà mediante la normalizzazione della matrice dei coefficienti e l'applicazione del criterio dei minimi quadrati.

La struttura della matrice dei coefficienti sarà la seguente:

	Δ_θ	Δ_λ	Δ_{T_x}	Δ_{T_y}	
P_1	a_1	a_2	a_3	0	TN_1
P_1	b_1	b_2	0	b_3	TN_2
P_2	a_1	a_2	a_3	0	TN_1
P_2	b_1	b_2	0	b_3	TN_2

P_n	a_1^n	a_2^n	a_3^n	0	TN_1^n
P_n	b_1^n	b_2^n	0	b_3^n	TN_2^n

Il procedimento di soluzione del sistema sarà necessariamente iterativo perché le equazioni (18) e (19) sono state linearizzate utilizzando uno sviluppo in serie di Taylor fermato ai soli termini lineari e trascurando quindi tutti gli altri.

Le incognite \mathbf{q} , \mathbf{l} , T_x , T_y saranno quindi determinate per accumulo successivo delle correzioni ottenute nelle varie iterazioni di calcolo (indicate con la simbologia prima iterazione = ' seconda iterazione = " ecc.):

$$\begin{aligned}
 \theta &= \theta^0 + \Delta_\theta' + \Delta_\theta'' + \dots \\
 \lambda &= \lambda^0 (1 + \Delta_\lambda') \cdot (1 + \Delta_\lambda'') \dots \\
 T_x &= T_x^0 + \Delta_{T_x}' + \Delta_{T_x}'' + \dots \\
 T_y &= T_y^0 + \Delta_{T_y}' + \Delta_{T_y}'' + \dots
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Ad ogni iterazione, il sistema risolvibile verrà riscritto utilizzando come nuovi valori approssimati quelli calcolati nell'iterazione appena eseguita. Questa sequenza di cicli di calcolo sarà interrotta quando le correzioni $D_{\mathbf{q}}$, $D_{\mathbf{l}}$, D_{T_x} , D_{T_y} saranno praticamente nulle.

Normalmente la convergenza verso la soluzione finale del sistema si ottiene con poche iterazioni di calcolo (4-5); in presenza di errori grossolani nei valori approssimati delle incognite si avrà una altrettanto veloce divergenza che porterà subito alla sua interruzione.

5.1. MISURA DELLE DISTANZE

La distanza topografica tra due punti posti sulla superficie terrestre (A e B) è definita dalla lunghezza dell'arco di geodetica che congiunge le proiezioni A_0 e B_0 dei due punti sull'ellissoide di riferimento.

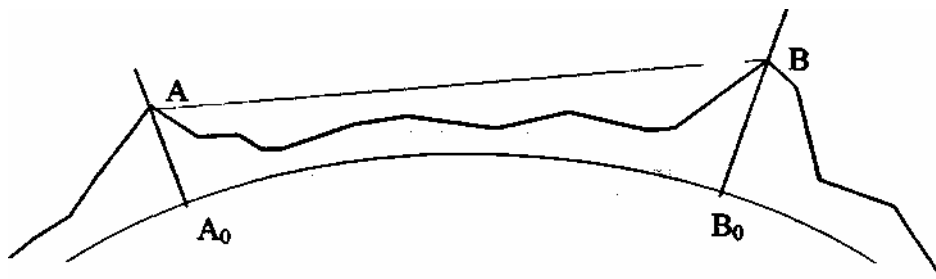


Fig. 5.1 definizione di distanza tra due punti

I teoremi della geodesia operativa ci dicono che l'arco di geodetica A_0B_0 è praticamente coincidente con le due sezioni normali definite tra gli stessi punti per distanze anche di 1.000 km. Tutta la strumentazione topografica utilizzata per la misura delle distanze, opera normalmente per sezioni normali e quindi in modo compatibile con la definizione di distanza.

Nell'ambito del *campo geodetico* la superficie di riferimento (ellissoide) può essere approssimata con quella di una sfera (*sfera locale*) di raggio $R = \sqrt{\rho N}$ tangente in un punto intermedio tra A e B.

In questo modo, la riduzione delle distanze alla superficie di riferimento potrà avvenire semplicemente come calcolo dell'arco di cerchio massimo (A_0B_0) sulla sfera locale.

Lo schema operativo della misura di una distanza è il seguente:

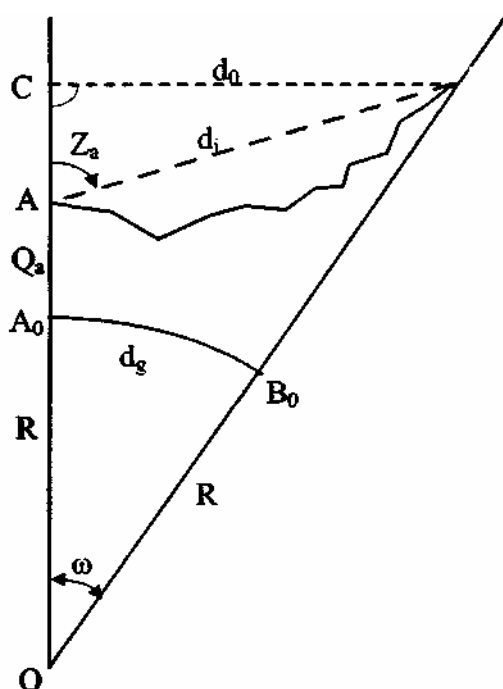


Fig. 5.2 Riduzione di una distanza

- C B = distanza ridotta all'orizzonte (d_0)
- A B = distanza inclinata misurata (d_i)
- A₀B₀ = distanza ridotta alla superficie di riferimento (d_g)
- A A₀ = quota del punto A
- B B₀ = quota del punto B
- O A₀ = raggio della sfera locale $R = \sqrt{\rho N}$
- O B₀ = raggio della sfera locale $R = \sqrt{\rho N}$

La distanza tra i punti A e B, che normalmente viene misurata, è quella inclinata (d_i).
 Se dal punto B si conduce una retta ortogonale alla verticale passante per il punto A si ottiene una distanza d_0 detta *distanza ridotta all'orizzonte*.

Per effettuare le riduzioni all'orizzonte (d_0) e alla superficie di riferimento (d_g) è necessario misurare la distanza zenitale Z_a :

$$d_0 = d_i \sin Z_a$$

La riduzione della d_i alla superficie di riferimento si effettua nel seguente modo:

$$d_g = R \omega$$

la distanza topografica d_g è pari alla lunghezza dell'arco di cerchio massimo, appartenente alla sfera locale in A₀ di raggio R, sotteso dall'angolo ω

$$\sin \omega = \frac{d_0}{R + Q_b} \cong \omega \text{ perché } \omega \text{ è un angolo piccolo}$$

$$d_g = \frac{R d_0}{R + Q_b}$$

$$d_g = \frac{d_0}{1 + \frac{Q_b}{R}} = d_0 \left(1 + \frac{Q_b}{R}\right)^{-1}$$

considerando che la massima quota terrestre possibile è di circa 6 km, il termine Q_b/R è dell'ordine di 10^{-3} .

Trascurando i termini in $(Q_b/R)^2$, cioè trascurando i termini dell'ordine

$$\left(1 + \frac{Q_b}{R}\right)^{-1} = 1 - \frac{Q_b}{R} + \text{termini trascurabili}$$

di 10^{-6} , vale la seguente ulteriore semplificazione:

Quindi la formula per la riduzione della distanza alla superficie di riferimento nel campo geodetico assume la seguente forma definitiva:

$$d_g = d_0 \left(1 - \frac{Q_b}{R}\right) \tag{2}$$

In tabella sono riportati i valori di Q_b/R al variare della quota del punto B.

Q_b	Q_b/R
60 m	10^{-5}
600 m	10^{-4}
6.000 m	10^{-3}

Si può osservare che la riduzione della distanza alla sfera locale deve essere fatta solamente quando il termine correttivo Q_b/R assume valori superiori allo s.q.m. di misura della distanza. Per quote inferiori ai 6 m, il termine correttivo Q_b/R è inferiore a 10^{-6} e quindi sempre trascurabile. Questa riduzione delle distanze misurate alla superficie di riferimento dovrà essere eseguita per tutti

i rilievi a scopo cartografico, mentre in ambito locale (rilievo di reti per il tracciamento di gallerie, funivie ecc..) tale riduzione non dovrà essere applicata per rendere immediatamente confrontabili i risultati del calcolo di compensazione con le misure ridotte all'orizzonte sul piano locale.

5.2. STRUMENTI PER LA MISURA DELLE DISTANZE

La misura diretta delle distanze in topografia ha sempre costituito un problema praticamente irrisolto fino alla comparsa dei distanziometri a onde elettromagnetiche (EDM o EODM) avvenuta agli inizi degli anni '60.

Prima di tale data la misura diretta delle distanze veniva realizzata con apparati molto complessi (ad es. l'apparato di Jaderin) che consentivano la misura mediante il riporto di grandezze campione lungo la distanza incognita, materializzate con fili in invar lunghi 24 m circa e opportunamente tesati.

Questi metodi erano molto dispendiosi (una squadra di tre operatori impiegava mediamente 1 giorno per misurare una distanza di circa 1 km) e molto limitati nell'uso, in quanto si potevano utilizzare solo su terreni molto pianeggianti.

Fino a pochi decenni fa erano comunque gli unici metodi in grado di supportare le operazioni di inquadramento ove si richiedono precisioni relative dell'ordine di 10^{-6} .

Nel rilievo di dettaglio, per il quale sono richieste solitamente precisioni inferiori, sono stati utilizzati metodi di misura indiretta delle distanze che impiegavano aste centimetrata (le stadie) e teodoliti modificati con l'aggiunta di particolari reticoli (teodoliti ad angolo parallattico costante e tacheometri autoriduttori). Questi metodi non consentono però la misura di distanze superiori a 200 m e comunque le precisioni sono al massimo dell'ordine di 10^{-3} .

Già nel 1933 il sovietico Balaicov brevettò un distanziometro ad onde ed il connazionale Lebedev nel 1938 ne costruì un prototipo. Nel 1943 lo svedese Bergstrand costruì il primo strumento commerciale: il "Geodimeter", con portata fino a 10 km. Nel dopoguerra, il sudafricano Wadley inventò infine il primo distanziometro a microonde (MDM) (chiamato Tellurometer) con portata sino a 150 km e precisione 2×10^{-6} . Questi strumenti erano ancora molto ingombranti, poco precisi e il metodo di misura era relativamente lento, ma il passo in avanti formidabile.

La misura elettromagnetica della distanza con distanziometri (EDM = Elettromagnetic Distance Meter) avvenne inizialmente con strumenti che impiegavano come onde portanti le onde luminose EODM (Elettro Optical Distance Meter) o che impiegavano onde centimetriche (MDM = Micro wave Distance Meter).

A partire dagli anni '70, sono stati posti in commercio, a prezzi accessibili anche alla piccola utenza, i distanziometri a onde che hanno definitivamente decretato la fine dei metodi di misura indiretta delle distanze, garantendo un più ampio raggio di azione, una più elevata precisione e una più rapida esecuzione delle misure stesse.

La possibilità di misurare distanze con estrema facilità ha portato come logica conseguenza a una rivoluzione dei metodi di rilievo e di calcolo consentendo agli operatori di svincolarsi dai vecchi schemi di rilievo che privilegiavano ovviamente le misure angolari rispetto a quelle di distanza.

Nei paragrafi seguenti ci soffermeremo brevemente sui principi generali di funzionamento dei distanziometri a onde elettromagnetiche, rimandando a testi classici di topografia per gli altri metodi sopra citati.

I distanziometri moderni possono essere classificati in strumenti che prevedono la misura dello sfasamento tra l'onda emessa e quella ricevuta e strumenti che prevedono la misura di tempi trascorsi tra due impulsi o tra due treni d'onda. Questo secondo metodo è teoricamente più semplice ma, sino a qualche tempo fa, difficile da

attuare per la scarsa precisione con la quale era possibile misurare questi intervalli di tempo.

5.3. I DISTANZIOMETRI A MISURA DI FASE

Questi distanziometri sono oggi i più diffusi.

Il funzionamento si basa sull'emissione di una radiazione ottica con lunghezza d'onda corrispondente all'infrarosso vicino ($\lambda = 0,78 \text{ mm}$) che viene modulata e trasmessa verso un prisma retro riflettore; quest'ultimo riflette una parte dell'onda verso l'apparecchio ricevente dell'EODM che interpreta la differenza di fase tra l'onda emessa e quella ricevuta. Questo sfasamento dipende dalla distanza esistente tra il distanziometro e il prisma.

Nell'EODM sono dunque presenti due parti, una trasmittente ed una ricevente.

L'esigenza di mantenere concentrata l'energia dell'onda emessa, e quindi di poterne riceverne di ritorno una buona parte, fa sì che si debbano utilizzare onde con lunghezza d'onda molto piccola (infrarosso vicino). Invece per poter discriminare la fase con precisione è necessario utilizzare una lunghezza d'onda metrica e quindi bisognerà modulare opportunamente l'onda elettromagnetica.

5.3.1 - La misura della fase.

Un'onda sinusoidale viene emessa da un estremo A della distanza D da misurare, che si suppone inferiore alla metà della lunghezza d'onda λ , si riflette sull'altro estremo B e ritorna nel punto A (vedi Fig. 3).

Lo sfasamento misurabile tra l'onda trasmessa e l'onda ricevuta sarà funzione di D.

Quale sarà il valore dell'oscillazione s nel punto A allo **stesso istante** t sia dell'onda emessa che di quella rientrante (già riflessa da B) ?

In Fig. 3 è indicato il punto A' simmetrico di A rispetto a B, per cui invece di considerare l'onda riflessa si può immaginare l'onda che prosegue da B verso A' ed A' coincidente idealmente con A; l'oscillazione in A sarà quindi la stessa di A', simmetrico di A rispetto a B.

Nell'istante t in A' avremo:

$$S_e = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

per l'onda emessa dove:

S = ampiezza dell'onda

A = ampiezza massima

ω = pulsazione = $2\pi f$

f = frequenza

φ_0 = fase iniziale

λ = lunghezza d'onda = c/f

c = velocità di propagazione

Per l'onda riflessa, tenuto conto che un determinato valore dell'oscillazione si propaga con velocità

c e che quindi l'onda rientrante riproduce i valori dell'onda uscente con un ritardo di $\Delta_t = 2D/c$ avremo:

$$S_r = A \sin(\omega(t - \Delta_t) + \varphi_0)$$

$$S_r = A \sin(\omega t - \omega \Delta_t + \varphi_0)$$

$$S_r = A \sin(\omega t - \mathbf{f} + \mathbf{f}_0)$$

dove con $\mathbf{f} = \omega D_t$ si indica lo sfasamento tra l'onda uscente e l'onda rientrante

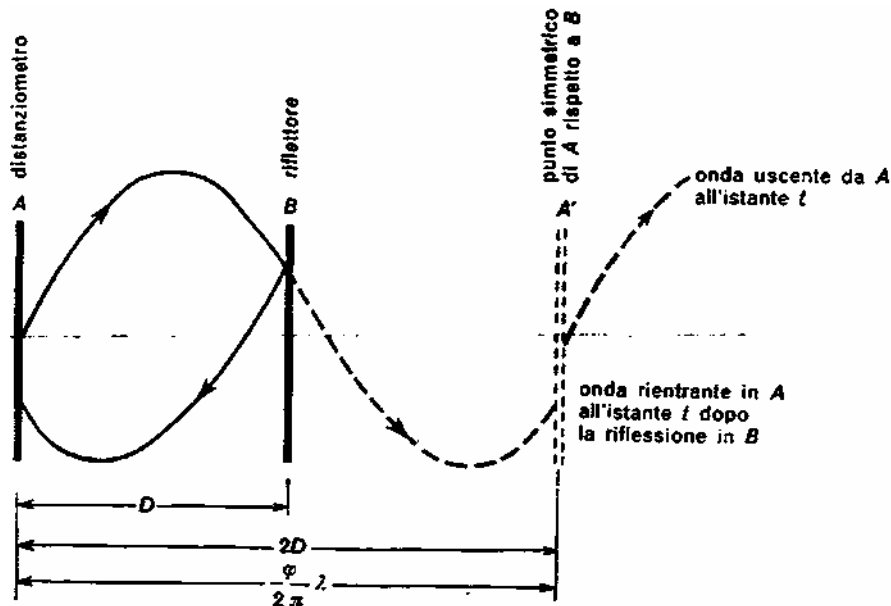


Figura 5.3 - Principio della misura della distanza con gli EODM (caso $D < \lambda/2$)

Dalla relazione che indica lo sfasamento si avrà:

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega \Delta t = \omega \frac{2D}{c} \\ 2D &= \frac{c \cdot \varphi}{\omega} = \frac{c \varphi}{2\pi f} = \frac{\varphi}{2\pi} \lambda \\ D &= \frac{\varphi}{2\pi} \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Da cui si può dedurre che misurando lo sfasamento $D\mathbf{f}$ tra l'onda uscente e l'onda rientrante si può ottenere la distanza D come una frazione di metà della lunghezza d'onda impiegata (il rapporto $(\mathbf{f}/2\mathbf{p})$ varia tra 0 e 1).

Lo strumento che misura lo sfasamento fra due onde si chiama *discriminatore* o *comparatore di fase*.

Se ora si sposta il punto di riflessione B di un **numero intero** di mezza lunghezze d'onda (A^* si sposta di un numero intero di lunghezze d'onda) è evidente che lo sfasamento non cambia perché lungo il percorso $2D$ si viene ad inserire un numero intero di lunghezze d'onda e si potrà quindi scrivere:

$$D = \frac{\varphi}{2\pi} \frac{\lambda}{2} + n \frac{\lambda}{2} \qquad D = L + n \frac{\lambda}{2}$$

La [5] rappresenta l'equazione fondamentale dei distanziometri ad onde. D numero intero n si chiama ambiguità. Per misurare una distanza con un distanziometro ad onde occorre quindi misurare lo sfasamento φ e valutare, senza errore, il numero intero di mezza lunghezze d'onda. È bene puntualizzare che con qualunque distanziometro ad onde la misura dello sfasamento $D\mathbf{f}$ permette sempre e solo di valutare quella porzione di distanza che eccede il numero intero di mezza lunghezze d'onda in essa contenuto e che il numero n si può valutare con modalità diverse.

I problemi pratici di misura consistono quindi nel ricavare \mathbf{f} e nel determinare l'ambiguità \mathbf{n} .

Le lunghezze d'onda generate hanno precisione di $2-5 \cdot 10^{-6}$, cioè di qualche p.p.m. (parte per milione ovvero mm/km).

La frequenza emessa potrebbe avere anche stabilità superiore ma tale precisione risulterebbe inutile se non si prevede di dover stimare in maniera più precisa di 10^{-6} l'effetto della rifrazione atmosferica.

Per rendere omogenee le precisioni di misura è bene che L sia misurata con incertezza minore od uguale al contributo della parte non modellabile della rifrazione atmosferica.

6.1. MISURA DEI DISLIVELLI

Prima di affrontare la descrizione dei metodi utilizzati per la misura dei dislivelli, è necessario approfondire il concetto di *quota di un punto*.

Abbiamo già visto che per la determinazione delle quote è necessario fare riferimento al campo reale della gravità, e quindi al geode, invece che a superfici note solo matematicamente, quali l'ellissoide (vedi Fig. 6.1).

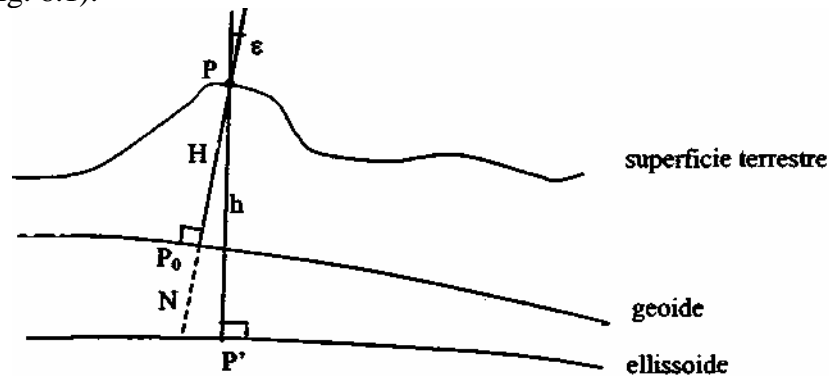


Fig. 6.1 - Quota ortometrica, quota ellissoidica e ondulazione del geode

In termini non rigorosi possiamo definire il geode come quella particolare superficie equipotenziale che passa per il livello medio marino; è evidente che il punto di quota zero può essere determinato in corrispondenza del mare.

L'operazione si esegue con l'aiuto di opportuni strumenti detti mareografi in grado di calcolare e anche rappresentare graficamente l'andamento altimetrico del mare depurato dal moto ondoso e mediato dai suoi moti periodici.

- > Si definisce **quota ortometrica** o semplicemente **quota** di un punto P (indicata normalmente con Q_P) la sua distanza dal geode misurata lungo la linea di forza che è anche ortogonale al geode (vedi Fig. 6.1 $H = PP_0$).
- > Si definisce **quota ellissoidica** dello stesso punto P la sua distanza dall'ellissoide, misurata lungo la normale all'ellissoide stesso (vedi Fig. 6.1 $h = PP'$).
- > Si definisce **ondulazione del geode** la differenza tra le due quote (vedi Fig. 6.1 $N = P_0P''$).

Si definisce **dislivello** tra due punti A e B la differenza di quota ortometrica tra i punti stessi:

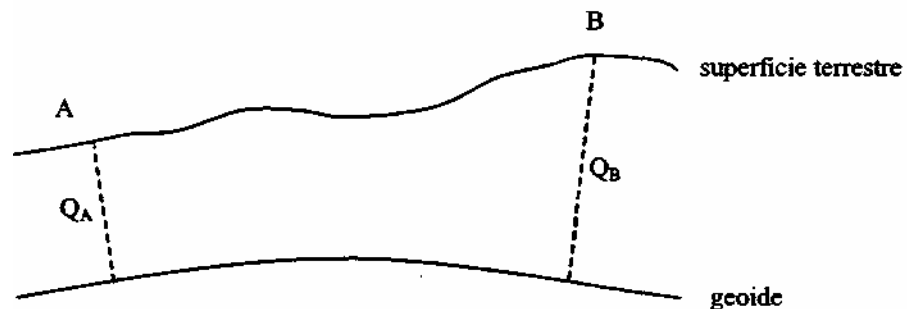


Fig. 6.2 – dislivello

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A$$

Come si vede il dislivello è positivo o negativo a seconda che la quota del secondo punto sia maggiore o minore di quella del primo. Questa è una scelta del tutto arbitraria che si adotta per convenzione.

6.2. METODI PER LA MISURA DEI DISLIVELLI

Con il termine di livellazione si intende l'insieme delle operazioni di misura eseguite per determinare il dislivello fra due punti.

Le metodologie impiegate per la livellazione si differenziano dal punto di vista delle procedure seguite e degli strumenti utilizzati, e in base alla natura delle grandezze osservate e rilevate.

I metodi di misura mediante i quali si eseguono le livellazioni sono diretti o indiretti, intendendo con questo termine quei metodi di livellazione che richiedono la preventiva determinazione o conoscenza della distanza tra i punti, dei quali si vuole calcolare il dislivello.

Tra le livellazioni indipendenti dalla distanza (livellazioni dirette), ricordiamo:

- > la livellazione geometrica: si utilizza uno strumento chiamato livello, corredato da due stadie, un eventuale micrometro a lamina piano - parallela e vari accessori;
- > la livellazione idrostatica: si utilizza un sistema di vasi comunicanti e si sfrutta il principio fisico che in questi vasi il pelo libero si dispone lungo una superficie equipotenziale;
- > la livellazione barometrica: è basata sul principio che il dislivello fra due punti, relativamente vicini, è funzione della differenza di pressione atmosferica esistente tra di essi, misurata con un barometro.

Tra le livellazioni che presuppongono la conoscenza o la misura della distanza (livellazioni indirette), ricordiamo:

- > la livellazione celerimetrica o distanziometrica, che utilizza il teodolite ed un distanziometro ad onde;
- > la livellazione trigonometrica, che utilizza il teodolite e un distanziometro di grande portata, ma più spesso sfrutta la misura indiretta della distanza o la sua conoscenza a priori e prevede la stima della rifrazione;

6.3. Influenza della curvatura terrestre e della rifrazione atmosferica

Nelle livellazioni che operano tra punti la cui distanza è superiore a 100 m non è più possibile ipotizzare una superficie di riferimento piana.

In questi casi i metodi di livellazione determinano i dislivelli a meno di errori sistematici dovuti alla curvatura locale della superficie di riferimento.

L'errore dovuto alla curvatura terrestre (vedi fig. 6.3a) è dato da:

$$x = \frac{R}{\cos \omega} - R = R \cdot \left(\frac{1}{\cos \omega} - 1 \right)$$

sviluppando in serie il coseno e arrestandosi al primo termine si ha:

$$\frac{x}{R} \approx \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{2}} - 1 \approx 1 + \frac{\omega^2}{2} - 1 = \frac{\omega^2}{2}$$

da cui

$$\frac{x}{R} = \frac{d^2}{2R^2}; \quad x = \frac{d^2}{2R} \tag{2}$$

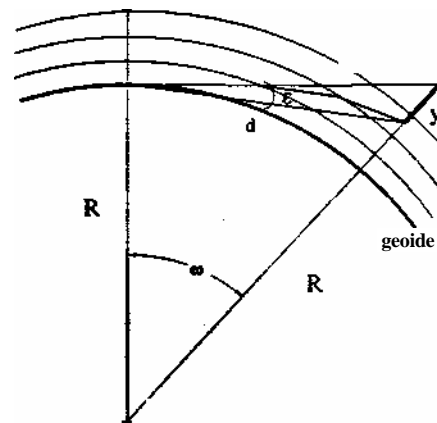
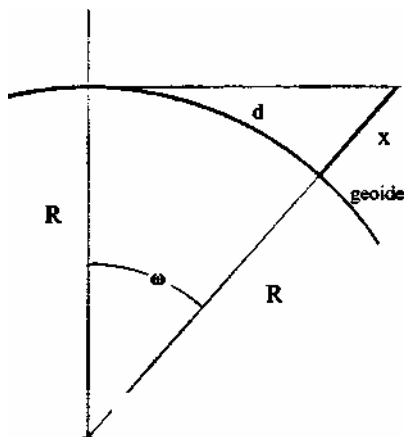


Fig. 6.3a - Errore di curvatura terrestre

Fig. 6.3b - Errore di rifrazione

Per distanze d superiori a 500 m bisogna considerare anche l'effetto dovuto alla rifrazione (vedi fig. 6.3b) dovuto al fatto che la radiazione luminosa non attraversa il vuoto ma si propaga in un fluido rifrangente, quale l'atmosfera, che ha un coefficiente di rifrazione variabile e decrescente dai livelli più prossimi al suolo ai livelli più alti in quota.

Volendo suddividere l'atmosfera in una serie di sfere concentriche con coefficiente di rifrazione costante e decrescente con la quota, si vede dalla figura che il raggio luminoso che parte secondo una direzione tangente al geode in un punto (cioè orizzontale) viene deviato verso la terra.

Si è ricavato sperimentalmente che l'angolo di deviazione ϵ è proporzionale, attraverso una costante k , all'angolo al centro che sottende un arco pari alla distanza d , cioè

$$\epsilon = k \frac{\omega}{2} = k \frac{d}{2R} \quad y = \epsilon d = k \frac{d^2}{2R} \quad (0,1 \leq k \leq 0,2)$$

Questo errore ha segno contrario a quello di curvatura terrestre per cui l'errore complessivo di curvatura e di rifrazione terrestre sarà

$$x - y = (1 - k) \frac{d^2}{2R}$$

6.4. LA LIVELLAZIONE GEOMETRICA

La **livellazione geometrica** è una procedura che opera per visuali orizzontali, è indipendente da qualsiasi operazione di rilevamento planimetrico e utilizza uno strumento chiamato **livello** con le relative stadie.

D principio su cui si basa la **livellazione geometrica** è intuitivo: scaturisce dall'ipotesi di parallelismo fra le diverse superfici di livello e la superficie di riferimento.

Nell'ambito della portata strumentale, tale ipotesi porta a ritenere pressoché orizzontali e fra loro parallele tali superfici, per cui il dislivello può essere facilmente determinato come differenza fra le letture fatte alle stadie tenute verticali sui punti di dislivello incognito.

Il metodo della livellazione geometrica si divide in:

- > **livellazione geometrica semplice**, che permette di determinare il dislivello con un unico stazionamento del livello, ed è impiegata quando la distanza tra i punti risulta minore o uguale a 100 m, in modo da considerare il piano topografico come superficie di riferimento
- > **livellazione geometrica composta**, che permette di determinare il dislivello mediante una serie di livellazioni semplici tra loro collegate, ed è impiegata quando la distanza tra i punti risulta superiore a 100 m.

A seconda della posizione assunta dal livello rispetto alle stadiie si possono ancora distinguere le livellazioni geometriche semplici in:

- > **livellazione geometrica in prossimità di un estremo**
- > **livellazione geometrica reciproca**
- > **livellazione geometrica dal mezzo**

Il livello, sia di tipo classico che digitale, non costituisce dunque da quanto sopra osservato, un vero e proprio strumento di misura; solo disponendo di stadiie si può ottenere la misura del dislivello e quindi le stadiie sono il vero strumento di misura.

Per livellazioni tecniche o da cantiere, si utilizzano delle stadiie in legno, aste centimetrare generalmente della lunghezza di due o tre metri.

Nel caso di livellazioni di precisione le stadiie sono formate da una custodia in legno o di alluminio, contenente un nastro di acciaio centimetrato o mezzo centimetrato costruito in invar (lega di Ferro e Nichel con coefficiente di dilatazione termica inferiore a 10^{-6}).

In entrambi i casi, le graduazioni sono numerate ad ogni decimetro.

Le stadiie dispongono anche di una livella sferica per la loro corretta posizione lungo la verticale.

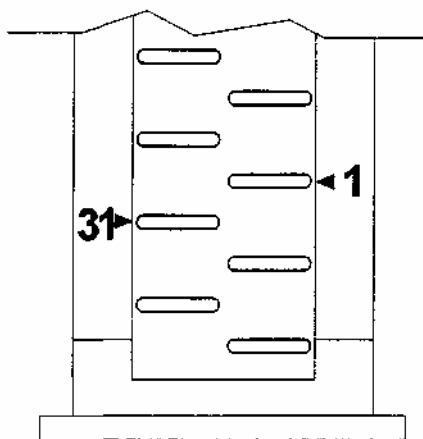


Fig. 6.4 - base di una stadia invar

Le stadiie di precisione sono dotate di due graduazioni poste ai bordi del nastro in invar (vedi fig. 6.4) sfalsate fra loro e con le scale graduate numerate con diverse origini.

Eseguendo la doppia lettura alle due graduazioni, si evitano così errori grossolani di lettura e si mediano quelli accidentali.

Queste stadiie vengono utilizzate abbinata a strumenti dotati di un reticolo a cuneo, come quello illustrato in Fig. 6.5, e un micrometro a lamina piano parallela, che permette di spostare l'immagine del reticolo sino alla collimazione eseguita come si vede nella stessa Fig. 6.5.

La lamina piano parallela è stata progettata per fare sì che l'escursione massima di deviazione che può subire l'immagine per una rotazione del tamburo T sia di ± 5 mm nel caso di stadiie centimetrare (oppure di ± 2.5 mm nel caso di stadiie mezzo centimetrare).

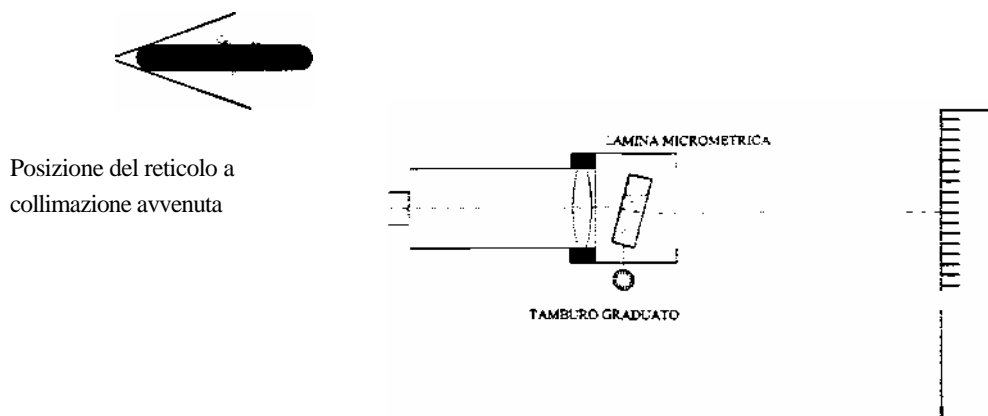


Fig. 6.5 - Collimazione di una stadia invar

Il tamburo è generalmente diviso in 100 parti, per cui le letture corrispondenti alle massime deviazioni sono di ± 0.05 min.

L'operatore legge direttamente una di queste parti e si stima una frazione corrispondente ad un centesimo di mm.

D più delle volte il tamburo del micrometro è una piccola corona di cristallo graduato che, illuminata esternamente, è osservata con un cannocchiale; l'oculare è collocato per comodità a fianco dell'oculare del cannocchiale principale del livello.

Le livellazioni di precisione avvengono utilizzando questi accessori, nonché le modalità in parte accennate.

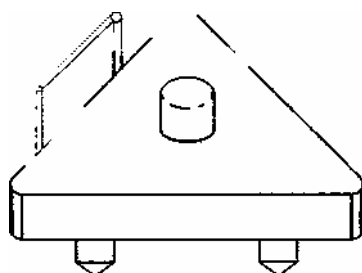


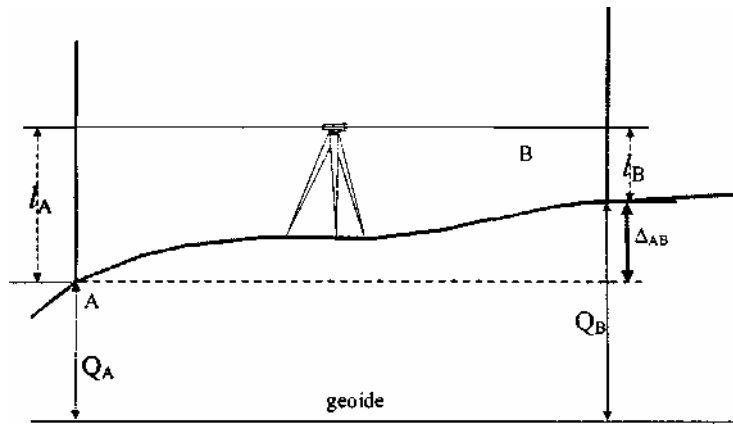
Fig. 6.6 - Tripode d'appoggio della stadia

Lungo la linea di livellazione la stadia viene appoggiata su capisaldi opportunamente predisposti sul percorso, a calotta emisferica in acciaio inossidabile. Nel caso ciò non fosse possibile o conveniente, si utilizzano dei pesanti supporti di ghisa, dotati di tre punte che si conficcano al suolo, su questi è posto un grosso chiodo d'acciaio a testa emisferica.

Questi supporti (tripodi), sollevati per una maniglia, si trasportano lungo tutta la linea di livellazione (vedi Fig. 6.6).

Il **codice** inciso sulle stadiie abbinate ai **Livelli digitali** consiste in una sequenza di intervalli bianco/nero ed è un unico numero binario pseudo stocastico (senza sotto ripetizioni) di 2000 elementi, ciascuno di 2,025 mm: la stadia più alta che si possa usare è dunque di 4,05 m.

Per un attimo facciamo l'ipotesi che nella distanza stazione - stadia la superficie di riferimento possa essere schematizzata da un piano orizzontale. Facciamo inoltre l'ipotesi che siano esenti altri errori sistematici che vedremo nel seguito.



Il dislivello tra A e B (vedi fig.6.7) vale:

$$Q_A + l_A = Q_B + l_B \quad \Delta_{AB} = Q_B - Q_A = l_A - l_B$$

La distanza fra le stadiè dipende dalla precisione che si vuole ottenere; per livellazioni tecniche non supera i 200 m, mentre per livellazioni di precisione o di alta precisione non supera mai i 40 m.

Il punto A viene denominato "**punto indietro**" ed il punto B "**punto avanti**".

Per determinare il dislivello tra punti C e D non direttamente visibili o distanti più di 100 m, occorre eseguire una serie di battute lungo un percorso detto **linea di livellazione**.

Il dislivello esistente allora fra i punti C e D sarà dato dalla somma dei dislivelli parziali delle singole battute di livellazione.

Nello schema di misura della livellazione dal mezzo (vedi fig. 6.8), l'errore di rifrazione, di curvatura terrestre e quello residuo di rettifica, nel caso in cui le distanze stazione - stadia siano uguali si annullano nel calcolo del dislivello.

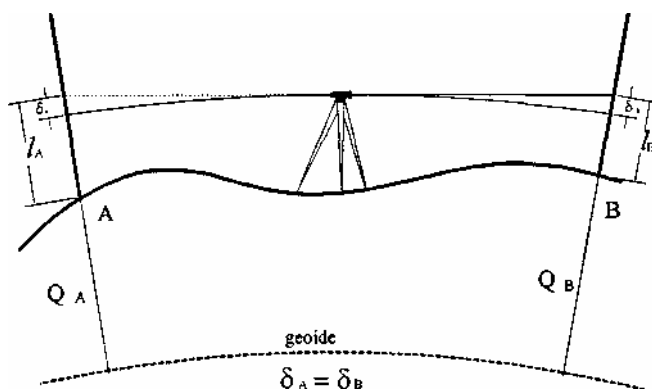


Fig. 6.8 – Schema di misura di un dislivello con lettura dal mezzo

Con queste ipotesi, considerato che l'errore dovuto alla curvatura del geoidè nei punti A e B di figura è lo stesso in segno e valore valgono ancora le stesse formule.

6.4.1. LA LIVELLAZIONE GEOMETRICA RECIPROCA

Quando non sia possibile posizionarsi in un punto equidistante dagli estremi per eseguire una livellazione dal mezzo, si può eliminare l'influenza dell'errore residuo di rettifica, dell'errore di curvatura terrestre e di rifrazione atmosferica anche con questo ulteriore tipo di livellazione. Per calcolare il dislivello Δ_{AB} si effettuano due stazioni: dalla prima stazione, in prossimità del punto "indietro" A, si fanno le letture alla stadia sia in A che in B. Se poi il cannocchiale è distanziometrico si calcola la distanza della prima stazione sia da A che da B, altrimenti è sufficiente una conoscenza approssimativa delle due distanze.

Si effettua una seconda stazione, questa volta in prossimità del punto "avanti" B, posizionando il livello in modo che la distanza verso il punto avanti sia uguale a quella che la precedente stazione aveva dal punto indietro ma anche che la distanza verso il punto indietro sia uguale alla precedente verso il punto avanti. D dislivello corretto è dato dalla media aritmetica dei due dislivelli calcolati dalle due stazioni.

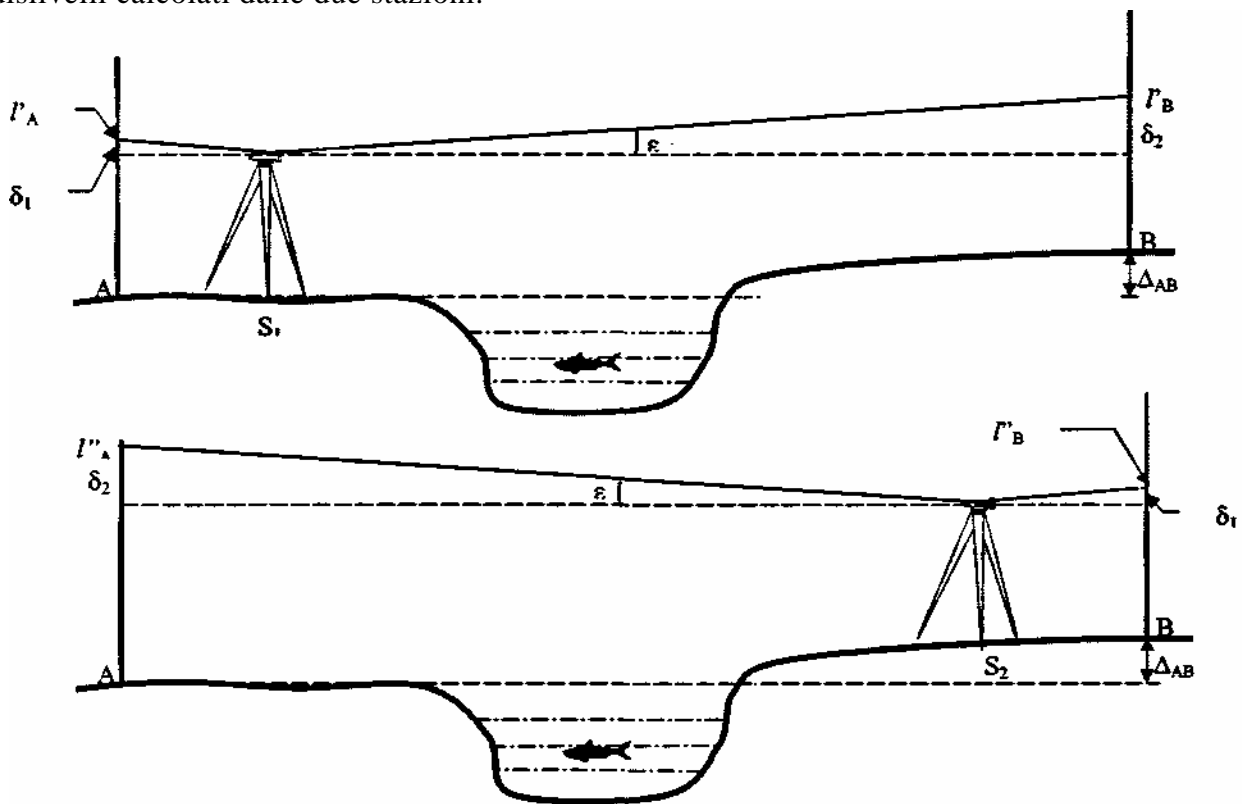


Fig. 6.9 - Schema di una livellazione reciproca

Dalla stazione S_1 si ha:

$$\Delta_{AB} = (l'_A - \delta_1) - (l'_B - \delta_2)$$

e da S_2 si ottiene:

$$\Delta_{AB} = (l''_A - \delta_2) - (l''_B - \delta_1)$$

sommando membro a membro si ricava:

$$\Delta_{AB} = \frac{(l'_A - l''_B) + (l''_A - l'_B)}{2} \quad (5)$$

La media dei due dislivelli misurati nei due punti di stazione fornisce il valore del dislivello corretto, privo cioè degli effetti dell'errore residuo di rettifica.

La livellazione reciproca equivale alla livellazione dal mezzo, tuttavia è caratterizzata da una precisione inferiore, in quanto le distanze alle quali si collimano le stadie sono generalmente più grandi.

La livellazione reciproca consente inoltre di calcolare il valore dell'angolo di srettifica e, qualora siano note, anche approssimativamente, le distanze d e D di un punto di stazione dai punti in cui sono poste le stadie:

$$\varepsilon = \frac{l'_A - l'_B - (l''_A - l''_B)}{2(D - d)}$$

6.4.2. PRECISIONE DELLA LIVELLAZIONE GEOMETRICA

Le caratteristiche principali del livello e delle stadie sono:

- > **l'ingrandimento** del cannocchiale
- > **il diametro dell'obiettivo** del cannocchiale
- > **la sensibilità** della livella torica

Tutti questi tre elementi sono determinanti per la precisione della livellazione.

I tre parametri variano in intervalli ampi, in quanto le esigenze di precisione delle livellazioni sono diverse.

Ingrandimento e diametro dell'obiettivo devono essere scelti armonicamente, in quanto la possibilità di apprezzare o misurare le frazioni di graduazione dipendono sia dalla grandezza apparente dell'immagine della stadia (funzione dell'ingrandimento), sia dal potere risolutivo (che è funzione del diametro). Nei livelli di precisione per esempio si hanno ingrandimenti da 40x a 60x e diametri di 50 mm.

Nella livellazione geometrica le uniche grandezze misurate sono le lunghezze fra il punto d'appoggio della stadia sul caposaldo e il punto in cui l'asse di collimazione incontra la stadia, quindi la precisione del dislivello misurato dipende essenzialmente dalla precisione con cui tali lunghezze vengono determinate.

Se σ_l è lo s.q.m. di misura di una di tali lunghezze lo s.q.m. $\sigma_{battuta}$ del dislivello sarà:

$$\sigma_{battuta} = \pm\sqrt{2} \sigma_l$$

dato che il dislivello risulta dalla differenza di due lunghezze.

Se il dislivello tra due punti, misurato con una linea di livellazione, è ottenuto con n battute uguali tra loro e quindi con uguale s.q.m. $\sigma_{battuta}$ avremo:

$$\sigma_{linea} = \pm\sqrt{n} \sigma_{battuta}$$

$$\sigma_{linea} = \pm\sqrt{\frac{\text{sviluppo della linea di livellazione}}{100 \text{ m}}} \sigma_{battuta} = \pm\sqrt{\frac{L}{100}} \sigma_{battuta}$$

Lo s.q.m. di lettura sulla stadia si può considerare risultante da due fattori che sono:

- > precisione di lettura;
- > precisione di centramento della livella torica o di funzionamento del compensatore per gli autolivelli.

La prima causa di errore ha valori diversi a secondo che la lettura sia eseguita a stima o con un micrometro e comunque dipende anche dalla distanza tra livello e stadia, dall'ingrandimento del cannocchiale e dal potere separatore dell'obbiettivo.

Quando la lettura si effettua a stima e la distanza tra livello e stadia è inferiore ai 50 m si può ritenere $S_1 = \pm 1 \text{ mm}$

Se si usa un micrometro, nelle stesse condizioni operative, $S_1 = \pm 0,1 \text{ mm}$

Per valutare l'errore di lettura alla stadia dovuto al centramento della livella loricata si deve partire dalla precisione di centramento della livella stessa.

Si usa di solito una livella torica a coincidenza, il cui s.q.m di centramento è dato da:

$$\sigma'' = \pm 0.06 \sqrt{v''}$$

dove v è la sensibilità espressa in secondi sessagesimali.

Nei livelli di **alta precisione** la sensibilità vale $5''-10''$, per cui $S'' = 0.2''$ che corrisponde ad uno s.q.m. di lettura sulla stadia pari a:

$$\sigma_i = \pm 0,2'' \cdot \text{arc } 1'' \cdot D$$

Dove D è la distanza tra livello e stadia.

Assumendo $D = 50 \text{ m}$ avremo

$$S_i = \pm 0,000000969 \cdot 50 \text{ m} = 0,048 \text{ mm}$$

Lo s.q.m. di lettura sulla stadia dovuto all'errore di centramento della livella si può ritenere quindi trascurabile per i livelli di bassa e media precisione; ciò non vale per i livelli di alta e altissima precisione dotati di micrometro per i quali il centramento della livella torica va curato in maniera particolare.

La livella torica deve esser ben protetta da bruschi sbalzi di temperatura, che ne potrebbero far variare lo stato di rettificazione.

L'errore di verticalità della stadia si traduce in un errore di lettura sistematico sulla stadia e si può facilmente valutare osservando la Fig. 6.10

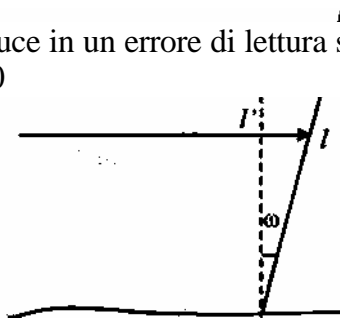


Fig. 6.10 - Errore di verticalità della stadia

Indicando con l la lettura eseguita sulla stadia inclinata di ω rispetto alla posizione verticale e con l' la lettura che si sarebbe fatta sulla stadia verticale, avremo:

$$l' = l \cos \omega \cong l \left(1 - \frac{\omega^2}{2} \right)$$

$$l - l' = \text{errore di verticalità} = l \frac{\omega^2}{2}$$

Considerando $l = 2 \text{ m}$ ed $\omega = 1^{\text{gon}}$ (errore di verticalità medio ottenuto rendendo verticale la stadia senza alcuno strumento ausiliario) tale errore risulta pari a 0.25 mm , che nel caso di livellazione di alta precisione non è accettabile.

Normalmente tale errore è contenuto attorno a $0.1 \div 0.2^{\text{gon}}$, utilizzando una livella sferica solidale al corpo della stadia.

La classificazione dei livelli e della livellazione geometrica viene fatta in relazione alla precisione dello strumento: è basata sull'errore quadratico medio di una livellazione in andata e ritorno su un tratto di un chilometro (s.q.m. chilometrico S_k). Si hanno:

livelli di bassa precisione o da cantiere:	$S_k > 5 \text{ mm}$
livelli da ingegneria	$2 \text{ mm} < S_k < 5 \text{ mm}$
livelli di precisione	$1 \text{ mm} < S_k < 2 \text{ mm}$
livelli di alta precisione	$S_k < 1 \text{ mm}$

Per raggiungere queste precisioni in realtà assieme allo strumento devono utilizzarsi accessori e metodi specifici di rilievo.

Un **livello di precisione** o di alta precisione, per esempio, che si contraddistingue per l'alta sensibilità della livella loricata, osservata a coincidenza e dall'alto numero di ingrandimenti del cannocchiale, si abbina sempre ad una adeguata lamina piano - parallela e ad una stadia graduata su un nastro di invar.

Le livellazioni di precisione richiedono non solo strumenti adeguati ma anche procedure atte ad eliminare gli errori che possono influenzare la misura del dislivello.

Il livello di precisione o di alta precisione ha un cannocchiale di grande luminosità e di molti ingrandimenti ed è costruito di solito con vite di elevazione.

La "messa a fuoco", cioè l'adattamento alla distanza della stadia, è un'operazione che deve avvenire con estrema cura, perché può pregiudicare la precisione del metodo, se rimangono delle parallassi superiori alla precisione della misura.

Negli autolivelli la resa orizzontale dell'asse di collimazione, come già osservato, può avvenire in maniera automatica, grazie a meccanismi detti compensatori basati su pendoli o superfici liquide riflettenti, interne al percorso del cannocchiale.

I compensatori forniscono un tempo precisioni inferiori a quelle raggiungibili con la livella torica, attualmente si sono raffinati in modo tale che vengono adottati anche in autolivelli di alta precisione.

Le stadie da utilizzare per livellazioni di precisione sono quelle a **nastro di invar** e vanno poste su punti altimetricamente univoci e sicuri quali pilastrini con chiodi a testa emisferica o tripodi con chiodi in acciaio a testa emisferica ove sia sufficiente stazionare provvisoriamente.

L'operazione di centramento della bolla o di assestamento dell'autolivello di precisione richiede molta pazienza. Le condizioni atmosferiche, per un improvviso comparire del sole tra le nuvole ad esempio, possono causare variazioni termiche nel treppiede tali da portare fuori coincidenza la livella torica o rimettere in movimento il dispositivo compensatore.

Per questo motivo a volte occorre posizionare lo strumento sotto un ombrellone da sole.

Per non subire gli effetti della rifrazione asimmetrica, nelle livellazioni di precisione, con la stadia a nastro invar è bene che le distanze tra livello e stadia non superino i 30 m.

Nelle livellazioni di precisione l'effetto del calore che sale dal suolo rende tremolante e distorta l'immagine ricevuta.

In zone vicine a cantieri o a traffico le vibrazioni influenzano il compensatore.

La procedura per effettuare una livellazione di precisione o alta precisione è sempre la livellazione geometrica dal mezzo.

Le distanze, come già detto, tra il punto e la stazione non devono superare i 40 o 50 metri. La livellazione deve essere condotta sia in andata che in ritorno e la discordanza tra i dislivelli deve essere inferiore alla tolleranza prefissata.

La Commissione Geodetica Italiana ha redatto una " Guida alla progettazione e alla esecuzione delle livellazioni geometriche " in cui fornisce suggerimenti per razionalizzare le operazioni oltre ai valori di queste tolleranze.

La tolleranza tra la misura in andata e quella al ritorno in un tratto di lunghezza L, esprimendo la lunghezza della livellazione in km è dato da:

$$t = \pm 6\sqrt{L} \quad \text{mm per le livellazioni di precisione;}$$
$$t = \pm 3\sqrt{L} \quad \text{mm per le livellazioni di alta precisione.}$$

Se la livellazione segue un poligono chiuso di lunghezza L le tolleranze sull'errore di chiusura saranno ovviamente le precedenti ridotte del fattore $\sqrt{2}$.

6.5. LA LIVELLAZIONE TRIGONOMETRICA

Le operazioni di inquadramento planimetrico dell'Istituto Geografico Militare, cominciate più di un secolo or sono, furono condotte con teodoliti di precisione adeguata all'importanza del vertice di rete.

Apparve subito che, mentre si conducevano misure azimutali, i vertici trigonometrici potevano essere inquadrati anche altimetricamente mediante la misura degli angoli zenitali.

Per far ciò occorre risolvere almeno due problemi: quello di potere usufruire di un qualche riferimento altimetrico ben materializzato su vertici che spesso sono campanili, tralicci o ciminiere e quello di poter calcolare il dislivello tenendo in debito conto sia la curvatura terrestre che la rifrazione atmosferica, come necessario nelle distanze abitualmente coinvolte nella rete trigonometrica.

È soprattutto l'incertezza su quest'ultima variabile che, come dimostreremo, consiglierebbe, se non si hanno riferimenti precisi, di non estendere questo metodo a distanze maggiori di 10-15 km.

In questo ambito possiamo fare altre importanti ipotesi: le operazioni di misura di dislivelli fanno riferimento alla superficie del **geoide** che, per soli scopi planimetrici è approssimabile all'ellissoide prima ed alla sfera locale poi nell'intorno del campo geodetico.

Ipotizziamo che nell'intorno di 15 km le superfici equipotenziali siano sferiche ed il geoide sia una sfera di raggio $R = \sqrt{\bar{\rho} \bar{R}_N}$ con $\bar{\rho}, \bar{R}_N$ valori medi dei due raggi principali di curvatura dell'ellissoide di riferimento.

Ipotizziamo che le quote dei punti A e B (vedi fig. 6.11) siano le distanze di A e B dalla sfera locale: le deviazioni della verticale saranno, in questa ipotesi, mille.

Poniamo infine che i punti A e B tra i quali si deve calcolare il dislivello appartengano alla rete trigonometrica (da cui il nome del metodo) e quindi a distanza d nota o ricavata.

Per il momento evitiamo di considerare o di poter trascurare la rifrazione atmosferica.

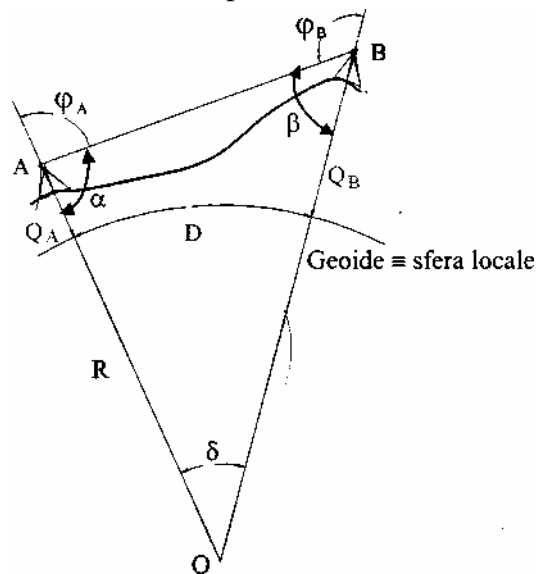


Fig. 6.11- Livellazione trigonometrica reciproca Se è

possibile misurare sia f_a che f_b , applicando il teorema di Nepero avremo:

$$\frac{BO - AO}{BO + AO} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

$$BO - AO = \Delta_{AB}$$

$$BO + AO = R + Q_B + R + Q_A = 2R + Q_B + Q_A = 2\left(R + \frac{Q_B + Q_A}{2}\right) = 2(R + Q_m)$$

avendo posto $Q_m = \frac{Q_A + Q_B}{2}$ pari alla quota media dei due punti A e B

$$\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \tan \frac{1}{2}(\pi - \varphi_A - \pi + \varphi_B) = \tan \frac{1}{2}(\varphi_B - \varphi_A)$$

$$\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right) = \cot \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\delta}{2}}$$

sviluppando in serie la tangente si ha:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cong \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^3}{24} - \dots \quad \text{ma} \quad \delta = \frac{D}{R} \quad \text{per cui} \quad \frac{\delta^3}{24} = \frac{D^3}{24R^3} \cong 10^{-9}$$

trascurando quindi il termine cubico si può approssimare $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cong \frac{D}{2R}$ e quindi:

$$\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{2R}{D}$$

il dislivello Δ_{AB} sarà pari a:

$$\Delta_{AB} = 2(R + Q_m) \tan \frac{1}{2}(\varphi_B - \varphi_A) \cdot \frac{D}{2R}$$

$$\Delta_{AB} = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \tan \frac{1}{2}(\varphi_B - \varphi_A)$$

In questa formula appare evidente che non occorre conoscere Q_m con eccessiva precisione.

Infatti se Q_B fosse noto approssimativamente con ± 10 m di indeterminazione, il termine (Q_m/R)

sarebbe già preciso con $\pm \frac{10}{6} \cdot 10^{-6}$.

Anche se Q_B fosse meno precisa si potrebbe, dalla formula (7), ricavare il dislivello DQ con 2 iterazioni di calcolo. D dislivello così calcolato è inteso da centro a centro dello strumento.

Se si cerca il dislivello tra i due punti a terra, occorre sommare l'altezza di uno strumento e togliere quella dell'altro o della mira che eventualmente può essere collocata sull'altro punto:

$$\Delta_{AB} = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \cdot \tan \frac{1}{2}(\varphi_B - \varphi_A) + h_A - h_B$$

In realtà spesso i punti sono talmente distanti da non riuscire ad intravedere nemmeno il treppiede, e la collimazione è fatta su particolari più grandi e visibili come guglie di montagne, parapetti di finestroni o gronde. Se la livellazione è fatta da un estremo e sull'altro non vi è segnale o strumento è ovvio che $h_b = 0$.

6.5.1. Livellazione trigonometrica da un solo estremo

Riprendendo la (7) nell'ipotesi di non potere misurare \mathbf{f}_B osservando la fig. 6.11 si ottiene:

$$\varphi_B = \alpha + \delta = \pi - \varphi_A + \delta$$

e sostituendo nella (7) abbiamo:

$$\Delta_{AB} = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \cdot \tan \left(\frac{\pi}{2} - \left(\varphi_A - \frac{\delta}{2} \right) \right)$$

$$\Delta_{AB} = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \cdot \text{ctg} \left(\varphi_A - \frac{\delta}{2} \right)$$

$$\Delta_{AB} = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \cdot \text{ctg} \left(\varphi_A - \frac{D}{2R} \right)$$

6.5.2. Livellazione reciproca simultanea in presenza della rifrazione.

Abbiamo già ricordato che per distanze superiori a 500 m non è possibile trascurare l'effetto della rifrazione atmosferica nella misura delle direzioni zenitali.

La densità dell'aria diminuisce all'aumentare della quota e di conseguenza diminuisce l'indice di rifrazione; i raggi luminosi propagandosi in un mezzo avente un indice di rifrazione variabile subiscono delle rifrazioni e le traiettorie si incurvano verso il basso (vedi Fig. 6.12).

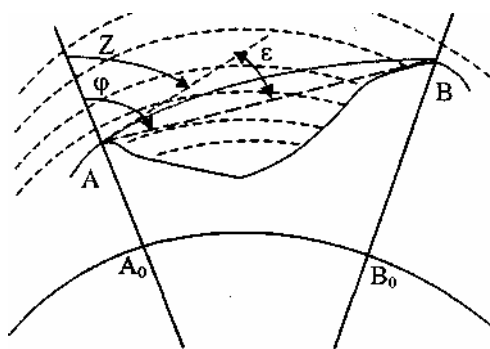


Fig. 6.12 – influenza della rifrazione atmosferica

Gli angoli zenitali misurati Z (apparenti) saranno più piccoli di quelli reali φ di una quantità ε che si può dimostrare essere proporzionale alla distanza D a sua volta proporzionale all'angolo δ :

$$\varepsilon = K \frac{\delta}{2}$$

dove K viene chiamato *coefficiente di rifrazione* e dipende dalle condizioni atmosferiche.

Nei due punti A e B avremo quindi:

$$\varepsilon_A = K_A \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad \varepsilon_B = K_B \frac{\delta}{2}$$

Se la misura degli angoli zenitali φ_A e φ_B avviene simultaneamente si può ritenere che i due coefficienti di rifrazione K_A e K_B siano uguali.

$$e_a = e_b \quad K = \frac{K_a + K_b}{2}$$

Vediamo ora l'influenza della rifrazione nella livellazione trigonometrica reciproca. Sostituiamo nella (7) agli angoli zenitali veri, gli angoli zenitali apparenti e i relativi errori di rifrazione. Con le solite ipotesi sulla conoscenza di R , D , Z_A , Z_B e le ulteriori ipotesi sulla rifrazione la (7) diventa:

$$\Delta_{AB} = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \cdot \tan \frac{1}{2} (Z_B - Z_A)$$

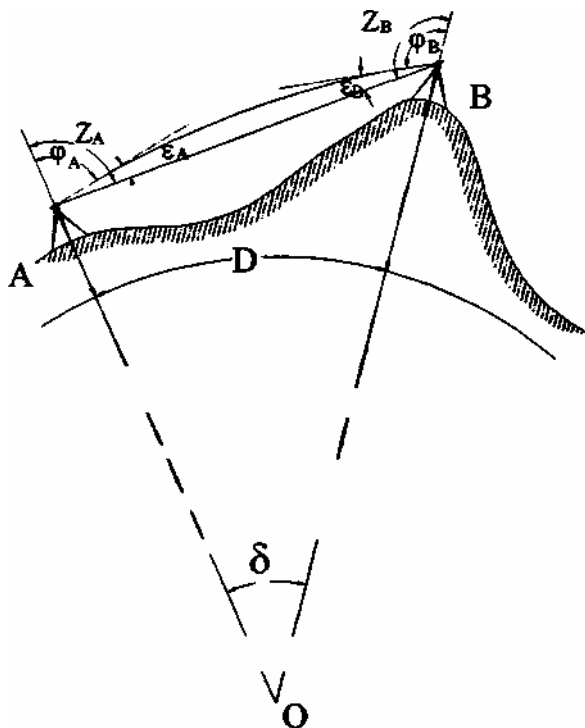


Figura 6.13 - Livellazione trigonometrica reciproca in presenza di rifrazione

Quindi il calcolo del dislivello con la livellazione trigonometrica reciproca non è influenzato dall'effetto della rifrazione atmosferica e può essere calcolato utilizzando le direzioni zenitali apparenti misurate direttamente con il teodolite.

Vediamo ora come si modifica la formula per il calcolo del dislivello con la livellazione trigonometrica da un estremo.

Sostituiamo nella (9), al posto dell'angolo φ_A , l'angolo Z_A e il relativo errore di rifrazione ε_A .
Si ottiene:

$$\Delta_{AB} = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \cdot \text{ctg} \left(Z_A + \varepsilon_A - \frac{D}{2R} \right)$$

e poiché $\varepsilon_A = K \frac{\delta}{2} = K \frac{D}{2R}$ si avrà infine:

$$\Delta_{AB} = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \cdot \text{ctg} \left(Z_A + K \frac{D}{2R} - \frac{D}{2R} \right) = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \cdot \text{ctg} \left(Z_A - D \frac{1-K}{2R} \right)$$

Possiamo ancora introdurre alcune semplificazioni.

Il termine: $D \frac{(1-K)}{2R}$ esprime un angolo di ampiezza limitata a pochi secondi centesimali.

In questa ipotesi è ammissibile accettare la seguente semplificazione:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \varepsilon) \cong \operatorname{ctg}\alpha - \varepsilon \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \varepsilon^2 \dots$$

per cui la (11) si semplifica:

$$\operatorname{ctg}\left(Z_A - D \frac{1-K}{2R}\right) = \operatorname{ctg}Z_A + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 Z_A} \cdot \frac{1-K}{2R} D$$

dove il termine $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 Z_A} \cong 1$ perché Z_A è prossimo all'angolo retto.

La relazione [11] diventa quindi:

$$\Delta_{AB} = D \left(1 + \frac{Q_m}{R}\right) \cdot \left(\operatorname{ctg}Z_A + D \frac{1-K}{2R}\right)$$

Sviluppando il prodotto e trascurando ancora il termine $\frac{Q_m}{R}$ la formulazione finale della [11] sarà:

$$\Delta_{AB} = D \left(1 + \frac{Q_m}{R}\right) \cdot \operatorname{ctg}Z_A + \frac{1-K}{2R} D^2 \quad (1)$$

6.5.3. Determinazione sperimentale dell'indice di rifrazione

La determinazione sperimentale del coefficiente di rifrazione K , può essere utile per calcolare il dislivello di altri vertici trigonometrici oltre a quelli su cui necessariamente sono state fatte osservazioni reciproche. Nella fig. 6.13, dal triangolo ABO si ricava:

$$Z_A + \varepsilon_A + Z_B + \varepsilon_B = \pi + \delta$$

$$Z_A + Z_B + (K_A + K_B) \frac{\delta}{2} = \pi + \delta$$

$$\frac{K_A + K_B}{2} = \frac{\pi + \delta - Z_A - Z_B}{\delta}$$

$$\frac{K_A + K_B}{2} = K = 1 - (Z_A + Z_B - \pi) \cdot \frac{R}{D}$$

Se la distanza tra i punti non è eccessiva e le misure sono pressoché contemporanee, si può ritenere $K_A * K_B = K$ e riutilizzare questo coefficiente per altri vertici collimati.

Il coefficiente di rifrazione K varia da luogo a luogo e per uno stesso luogo varia con il tempo; in particolare si hanno delle sensibili variazioni diurne dovute al fatto che il sole scalda l'aria in maniera diversa a seconda delle ore del giorno e quindi varia anche la densità dell'atmosfera. L'esperienza mostra che il coefficiente di rifrazione è massimo al mattino ($K = 0,19$), decresce presentando un minimo nelle ore pomeridiane ($K = 0,14$), durante le quali si mantiene all'incirca costante, e torna ad aumentare fino al tramonto del sole ($K = 0,16$).

Il valore più basso del coefficiente di rifrazione K si riscontra nelle regioni equatoriali, e si ha un progressivo aumento procedendo verso i poli. Alla latitudine dell'Italia settentrionale può essere mediamente assunto pari a 0,17.

6.5.4. Precisione della livellazione trigonometrica

Applicando la formula di propagazione degli errori alla [12] avremo:

$$\Delta_{AB} = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \cdot \text{ctg} Z_A + \frac{1-K}{2R} D^2$$

valutiamo quale sarà l'errore quadratico medio del dislivello.

Le variabili indipendenti nella formula sopra indicata sono:

➤ la distanza D:

$$\sigma_{\Delta_{AB}}^2 = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial D} \right)^2 \sigma_D^2 \text{ e quindi lo s.q.m.} \quad \sigma_{\Delta_{AB}} = \frac{\partial \Delta}{\partial D} \sigma_D \cong \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \text{ctg} Z_A \sigma_D \cong \frac{\Delta_{AB}}{D} \sigma_D$$

$$\text{ipotizzando } \begin{cases} \Delta_{AB} = 500m \\ D = 10km \\ \sigma_D = 0.3m \end{cases} \quad \sigma_{\Delta_{AB}} = \frac{500}{10.000} \cdot 0.3 = 1.5cm$$

➤ il coefficiente di rifrazione K:

$$\sigma_{\Delta_{AB}}^2 = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial K} \right)^2 \sigma_K^2 \text{ e quindi lo s.q.m.} \quad \sigma_{\Delta_{AB}} = \frac{\partial \Delta}{\partial K} \sigma_K = \frac{D^2}{2R} \sigma_K$$

ipotizzando $\sigma_K = \pm 0.01$

D =	1 km	5 km	10 km	20 km	30 km
$\sigma_{\Delta_{AB}} =$	0.1 cm	2 cm	8 cm	32 cm	72 cm

➤ l'angolo zenitale Z_A :

$$\sigma_{\Delta_{AB}} = \frac{D}{\text{sen}^2 Z_A} \sigma_{Z_A} \text{ (trascurando } Q_m / R)$$

	D =	0.5 km	1 km	5 km	10 km	20 km
$\sigma_{Z_A} = 0^{\text{mm}},0006$	$\sigma_{\Delta_{AB}} =$	0.5 cm	1 cm	5.4 cm	12.9 cm	37.9 cm
$\sigma_{Z_A} = 0^{\text{mm}},0015$	$\sigma_{\Delta_{AB}} =$	0.8 cm	1.6 cm	8.2 cm	16.5 cm	-
$\sigma_{Z_A} = 0^{\text{mm}},01$	$\sigma_{\Delta_{AB}} =$	5.5 cm	11 cm	55 cm	-	-

Si può constatare quindi che per distanze fino a 10 km l'influenza di σ_K per quanto proporzionale a D^2 , è bassa e si può ritenere che entro tale limite, lo s.q.m. del dislivello sia proporzionale alla distanza e si può assumere mediamente:

$$\sigma_{\Delta_{AB}} = \pm 1,2 D$$

dove σ_{Δ} è espresso in cm e D in km.

Si può constatare inoltre che l'apporto del termine S_D è inferiore a quello del termine f_z , ovvero che lo s.q.m. della distanza influenza S_D molto meno di quanto faccia lo s.q.m. dell'angolo zenitale. L'influenza del termine in S_K diventa predominante dopo i 10 km, e dopo tale limite si può ritenere che lo s.q.m. del dislivello cresca con il quadrato della distanza. Per questo motivo è sconsigliabile effettuare misure di dislivello tra punti con distanza eccedente tale valore.

6.6 LA LIVELLAZIONE CELERIMETRICA

Questo metodo di livellazione viene utilizzata nelle operazioni di rilievo di dettaglio e richiede l'uso di una stazione totale (o di uno strumento integrato) per la misura contemporanea dell'angolo zenitale e della distanza. In questo caso si considera un piano come superficie di riferimento per le quote, avendo l'accortezza di correggere l'angolo zenitale dalle influenze sistematiche della rifrazione atmosferica e della curvatura terrestre così come discusso in precedenza.

Indicando con:

s = "slope" la distanza inclinata misurata col distanziometro (s massima < 1 km oppure < 500 m);

\mathbf{f} = l'angolo zenitale corretto del punto B;

h = l'altezza strumentale cioè la distanza tra il centro strumentale e il punto A;

l = l'altezza della palina o del treppiede misurata dal punto B al centro del segnale angolare;

dt = la distanza ridotta al piano orizzontale che passa per A.

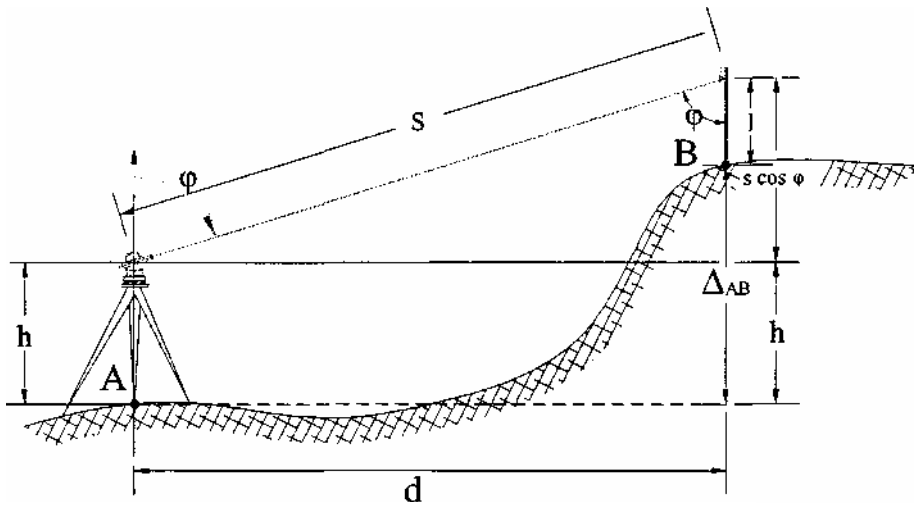


Fig. 6.13 - Livellazione celerimetrica

dalla fig. 6.13 appare evidente

$$d = s \operatorname{sen} \varphi$$

$$s = \frac{d}{\operatorname{sen} \varphi}$$

$$\Delta_{AB} = s \cos \varphi + h - l$$

$$\Delta_{AB} = d \operatorname{ctg} \varphi + h -$$