

ESERCITAZIONI
DI
TOPOGRAFIA

INDICE ESERCITAZIONI

cap/par	pag.	argomento
1.	1	SISTEMA INTERNAZIONALE
1.1.	2	UNITÀ DI MISURA DEGLI ANGOLI
1.2.	8	RICHIAMI DI GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO
1.2.1.	9	Riferimenti cartesiano e polare associati
1.2.2.	10	Angolo di direzione di una semiretta orientata
1.2.3.	11	Angolo piano
1.2.4.	12	Trasporto degli angoli di direzione lungo una spezzata
1.2.5.	13	Trasporto delle coordinate cartesiane lungo una spezzata
1.2.6.	14	Esempio di calcolo (intersezione semplice in avanti)
1.2.7.	17	Esempio di calcolo (poligonale)
1.3.	26	TRASFORMAZIONI PIANE
1.3.1.	26	Traslazione rigida
1.3.2.	27	Rotazione rigida
1.3.3.	29	Rototraslazione rigida
1.3.4.	29	Rototraslazione con variazione di scala isotropa
1.3.5.	30	Rototraslazione con variazione di scala anisotropa
1.3.6.	31	Omografia generale
1.3.7.	31	Considerazioni finali
1.4.	34	SISTEMI DI RIFERIMENTO SPAZIALI
1.5.	36	ESEMPI DI CARTOGRAFIA NAZIONALE
1.5.1.	40	Esercizi di cartografia
	48	APPENDICE A
	49	APPENDICE B
	51	APPENDICE C
	57	APPENDICE D
	59	APPENDICE E
2.1.	60	Definizione di angolo azimutale, distanza zenitale, distanza e dislivello
2.2.	60	IL TEODOLITE
2.3.	63	CANNOCCHIALE A LUNGHEZZA COSTANTE
2.3.1.	66	Caratteristiche del cannocchiale
2.4.	67	LAMINA PIANO PARALLELA
2.5.	68	LE LIVELLE
2.5.1.	69	La livella sferica
2.5.2.	70	La livella lorica
2.5.3.	73	La livella torica a coincidenza di immagini
2.6	73	LA BASETTA TOPOGRAFICA
2.7.	74	CONDIZIONI DI RETTIFICA DEL TEODOLITE
2.8.	75	CONDIZIONE OPERATIVA DEL TEODOLITE
2.9.	75	MESSA IN STAZIONE DEL TEODOLITE
2.10.	76	Mezzi di lettura ai cerchi negli strumenti ottico-meccanici
2.10.1.	76	Lettura a stima
2.10.2.	78	Strumenti micrometrici
2.10.3.	81	Mezzi di lettura ai cerchi negli strumenti elettronici
2.10.3.1.	81	La lettura assoluta
2.10.3.2.	82	Lettura incrementale
2.10.4.	84	Esempi di sistemi di lettura

2.11.	88	MISURA DEGLI ANGOLI AZIMUTALI
2.11.1.	88	Influenza degli errori residui nella misura degli angoli azimutali
2.11.2.	90	Rettifica dell'asse di collimazione
2.11.3.	91	Errore di eccentricità
2.11.4.	93	Errori di graduazione dei cerchi
2.12.	94	Misura degli angoli zenitali
2.12.1.	96	Errori che influenzano le letture zenitali
2.13.	101	ACCESSORI PER GLI STRUMENTI TOPOGRAFICI
2.13.1.	101	Il treppiede
2.13.2.	102	Il filo a piombo e i piombini speciali
2.14.	104	SEGNALI
2.14.1.	105	Segnali provvisori
2.14.2.	107	Segnali permanenti
2.15.	108	MONOGRAFIE
3.	111	STRUMENTI PER LA MISURA DEI DISLIVELLI
3.1.	111	La Stadia
3.2.	112	Il Livello
3.2.1.	112	Livelli ottico - meccanici
3.2.1.1.	115	Rettifica di un livello
3.2.2.	116	Autolivelli
3.2.3.	121	Livelli elettronici

1. SISTEMA INTERNAZIONALE

In questo capitolo vengono richiamate alcune nozioni elementari riguardanti le unità di misura di angoli e distanze, gli strumenti di geometria analitica e di analisi che verranno comunemente utilizzati durante il corso in modo da rendere agevole per lo studente lo studio dei procedimenti di calcolo che verranno sviluppati.

Tutte le grandezze misurate o calcolate dovranno sempre essere rappresentate secondo le regole del SISTEMA INTERNAZIONALE (SI).

Vediamo le principali:

grandezza	unità SI	significato
angolo piano	rad	<i>radiante</i>
lunghezza	m	<i>metro</i>
area	m ²	<i>metro quadro</i>
volume	m ³	<i>metro cubo</i>
tempo	s	<i>secondo</i>
velocità	m/s	<i>metri al secondo</i>
pressione	Pa	<i>pascal</i>
ecc..		

I multipli e i sottomultipli di queste unità di misura sono espresse secondo le seguenti regole:

10 ⁻⁹	10 ⁻⁶	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹	unità SI	10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁶	10 ⁹
<i>nano</i>	<i>micro</i>	<i>milli</i>	<i>centi</i>	<i>deci</i>		<i>deca</i>	<i>etto</i>	<i>kilo</i>	<i>mega</i>	<i>giga</i>
n	μ	m	c	d		da	h	k	M	G

esempi:

10 ⁻⁹	10 ⁻⁶	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹	m	10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁶	10 ⁹
nm	μm	mm	cm	dm		dam	hm	km	Mm	Gm

10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹	m ²	10 ¹	10 ²	10 ³
mm ²	cm ²	dm ²		dam ²	hm ²	km ²

per le superfici è tollerata l'unità di misura non SI:

		m ²		10 ²
				ha

1.1 UNITÀ DI MISURA DEGLI ANGOLI

L'ampiezza di un angolo può essere espressa in diversi sistemi di misura; quelli più utilizzati in topografia sono:

1. sistema sessagesimale
2. sistema sessadecimale
3. sistema centesimale
4. sistema matematico

Richiamiamo qui di seguito le caratteristiche essenziali di questi sistemi di misura:

1. **SISTEMA SESSAGESIMALE:** l'unità di misura è il *grado sessagesimale* ($^{\circ}$) definito come $1/360$ dell'angolo giro. I sottomultipli del grado sessagesimale sono il *primo sessagesimale* ($'$), pari a $1/60$ di grado sessagesimale, e il *secondo sessagesimale* ($"$) pari a $1/60$ di primo sessagesimale. Le frazioni di secondi sono espresse nel sistema decimale. Questo sistema di misura è utilizzato ancora in cartografia per esprimere le coordinate geografiche dei punti.
2. **SISTEMA SESSADECIMALE:** l'unità di misura è il *grado sessagesimale* ($^{\circ}$). I sottomultipli sono: il *primo sessadecimale*, definito come la centesima parte del grado sessagesimale e il *secondo sessadecimale*, definito come la centesima parte del primo sessadecimale. Questo sistema di misura non è più utilizzato in topografia ma rappresenta il passaggio obbligato per trasformare l'ampiezza di un angolo espressa nel sistema sessagesimale in altre unità di misura.
3. **SISTEMA CENTESIMALE:** l'unità di misura è il *grado centesimale* (gon) definito come $1/400$ dell'angolo giro. I suoi sottomultipli sono: il *primo centesimale*, definito come centesima parte del grado centesimale e il *secondo centesimale*, definito come la centesima parte del primo centesimale. Il sistema centesimale è quello ormai universalmente adottato da tutte le strumentazioni topografiche per esprimere l'ampiezza degli angoli.
4. **SISTEMA MATEMATICO:** l'unità di misura è il *radiante* definito come l'ampiezza dell'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza stessa. Come i sistemi sessadecimale e centesimale, il sistema matematico è un sistema di misura a base decimale ed è quello utilizzato dai calcolatori elettronici per il calcolo delle funzioni trigonometriche.

Quando si devono eseguire calcoli che prevedono l'uso d'ampiezze di angoli può essere necessario convertire i valori numerici delle ampiezze da un sistema di misura ad un altro. Nel seguito richiamiamo quindi brevemente le procedure da utilizzare.

CONVERSIONE SESSAGESIMALE O SESSADECIMALE

Si utilizza l'algoritmo per il cambio di base di un numero.

L'esempio qui sotto riportato richiama brevemente tale procedura:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{sessagesimale} & & \text{sessadecimale} \\
 a = 47^{\circ} 25' 12'' & \Rightarrow & a = [(12/60) + 25]/60 + 47 = 47^{\circ},4200
 \end{array}$$

Il passaggio inverso fornirà il valore originale di a:

$$47^{\circ},4200 - 47^{\circ} = 0^{\circ},4200$$

$$0^{\circ},4200 \cdot 60 = 25',2$$

$$25',2 - 25 = 0^{\circ},2$$

$$0^{\circ},2 \cdot 60 = 12''$$

$$\alpha_{\text{sessag}} = 47^{\circ} 25' 12''$$

CONVERSIONE SESSADECIMALE <=> CENTESIMALE O MATEMATICO

Questi tre sistemi sono tutti a base decimale. In questo caso la conversione da un sistema di misura ad un altro si basa su una semplice relazione di proporzionalità.

Sia a_{sessad} l'ampiezza dell'angolo a espressa nel sistema sessadecimale e a_{cent} , a_{rad} i valori della medesima ampiezza espressi rispettivamente nel sistema centesimale e nel sistema matematico. Valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{\alpha_{\text{sessad}}}{180^{\circ}} = \frac{\alpha_{\text{cent}}}{200} = \frac{\alpha_{\text{rad}}}{\pi}$$

che consentono i passaggi diretto e inverso da un sistema di misura ad un altro.

ESEMPIO NUMERICO

Si conosce l'ampiezza di un angolo espressa nel sistema sessagesimale $a = 45^{\circ} 53' 58",3$

M vuole esprimere tale valore nei sistemi di misura sessadecimale, centesimale e matematico.

Innanzitutto occorre notare come il valore a sia espresso con l'approssimazione del decimo di secondo sessagesimale.

Durante le conversioni occorrerà fare attenzione a non perdere informazioni su tale valore a causa degli arrotondamenti o troncamenti inopportuni.

Nel sistema sessadecimale, un decimo di secondo sessagesimale equivale alla quantità:

$$\frac{0",1}{3600''} = 0^{\circ},00003$$

quindi dovremo esprimere l'ampiezza dell'angolo a nel sistema sessadecimale considerando come ultima cifra significativa la quinta cifra decimale.

Effettuando la trasformazione si ottiene il seguente valore: $a_{\text{sessad}} = 45^{\circ},89953$ Effettuando la conversione contraria otteniamo l'esatto valore di partenza, per cui l'approssimazione utilizzata nei calcoli rispetta il principio del mantenimento di tutta l'informazione iniziale.

Se invece avessimo arrotondato il risultato della conversione alla quarta cifra decimale, avremmo ottenuto: $a_{\text{sessad}} = 45^{\circ},8995$ che ritrasformato nel sistema sessagesimale di partenza fornisce $a_{\text{sessaf}} = 45^{\circ} 53' 58",2$ valore non corrispondente al dato iniziale.

Seguendo lo stesso procedimento, possiamo dunque procedere alle successive due trasformazioni richieste. L'approssimazione necessaria per il corretto passaggio al sistema centesimale risulta essere:

$$\frac{0",1}{3600''} \cdot \frac{200}{180} = 0,00003 \text{ gon}$$

Esercitazioni di TOPOGRAFIA

per cui, anche in questo caso, dovremo considerare come ultima cifra significativa la quinta cifra decimale. Risulterà quindi:

$$\alpha_{cent} = \frac{\alpha_{sessad}}{180} \cdot 200 = 50,99948^{gon}$$

L'approssimazione necessaria per la conversione nel sistema matematico è:

$$\frac{0,1}{3600''} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,0000005$$

Per cui per poter esprimere correttamente l'angolo α in radianti dovremo tenere conto della settima cifra decimale.

$$\alpha_{rad} = \frac{\alpha_{sessad}}{180} \cdot \pi = \frac{\alpha_{cent}}{200} \cdot \pi = 0,8010979$$

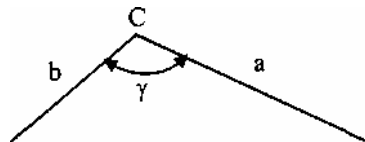
Esempio: verificare le seguenti conversioni:

valore	trasformazione	risultato
57° 23' 18"	in sessadecimali	(57°,3883)
35°,2234	in sessagesimali	(35° 13' 24",2)
25°,1321	in centesimali	(27,9245 gon)
42° 27' 45"	in centesimali	(47,1806 gon)
32°,2935	in radianti	(0,5636279 rad)
143 ^{gon} ,2396	in radianti	(2,2500024 rad)
0 ^{rad} ,2345	in sessagesimali	(13° 26' 9,1")
0°,7413	in centesimali	(0,8237 gon)

Esercizi di topografia elementare da svolgere:

1. dato un triangolo qualunque ABC, noti due lati e l'angolo compreso, calcolare il terzo lato:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



$$a = 695,52 \text{ m}$$

$$b = 1675,40 \text{ m}$$

$$\gamma = 38,6543^{gon}$$

$$c = 1173,34 \text{ m}$$

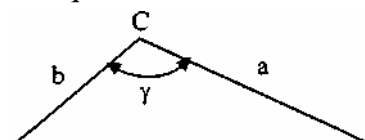
$$a = 785,48 \text{ m}$$

$$b = 382,57 \text{ m}$$

$$\gamma = 53,8724^{gon}$$

$$c = 604,14 \text{ m}$$

2. dato un triangolo qualunque ABC, noti due lati e l'angolo compreso, calcolare la superficie:



$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$a = 131,20 \text{ m}$$

$$b = 159,70 \text{ m}$$

$$\gamma = 84,8086^{gon}$$

$$S = 10179,46 \text{ m}^2$$

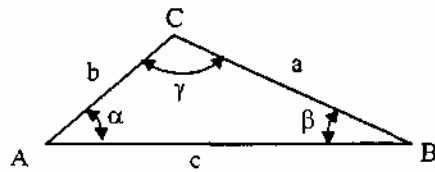
$$a = 1453,12 \text{ m}$$

$$b = 546,84 \text{ m}$$

$$\gamma = 73,5427^{gon}$$

$$S = 363492,14 \text{ m}^2$$

3. in un triangolo qualunque, la somma di due lati sta alla loro differenza come la tangente della semisomma degli angoli opposti a questi due lati sta alla tangente della loro semidifferenza:



$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\begin{aligned} a &= 58.25 \text{ m} \\ b &= 45.83 \text{ m} \\ \gamma &= 78,^{\text{gon}} 3340 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha-\beta}{2} &= \tan \frac{\alpha+\beta}{2} \frac{a-b}{a+b} & \frac{\alpha+\beta}{2} &= 60,^{\text{gon}} 8330 \\ & & \frac{\alpha-\beta}{2} &= 10,^{\text{gon}} 6481 \\ & & \alpha &= 71,^{\text{gon}} 4811 \\ & & \beta &= 50,^{\text{gon}} 1849 \\ \frac{c}{\sin \gamma} &= \frac{a}{\sin \alpha} & c &= 60,92 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a = 58.25 \text{ m} \quad b = 45.83 \text{ m} \quad g = 78,^{\text{gon}} 3340 \quad a = 71,^{\text{gon}} 4811 \quad b = 50,^{\text{gon}} 1849 \quad c = 60,92 \text{ m} \\ a = 345,83 \text{ m} \quad b = 764,34 \text{ m} \quad g = 52,^{\text{gon}} 8424 \quad a = 28,^{\text{gon}} 5240 \quad b = 118,^{\text{gon}} 6336 \quad c = 589,11 \text{ m} \end{aligned}$$

Esercizi di geodesia

1) Le coordinate geodetiche del vertice POLITECNICO di Torino, riferite all'ellissoide WGS84, sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= 45^\circ 03' 48", 1186 \\ \mathbf{l} &= 7^\circ 39' 40", 6046 \\ h &= 310,764 \text{ m} \end{aligned}$$

I parametri dell'ellissoide WGS84 sono:

$$\begin{aligned} a &= 6.378.137 \text{ m} \\ \mathbf{a} &= 1/298,257223563 \\ e^2 &= 0,006694379990 \end{aligned}$$

Determinare le coordinate cartesiane geocentriche.

	risultati
$X = (N + h) \cos\varphi \cos\lambda$	$N = 6.388.862,020 \text{ m}$
$Y = (N + h) \cos\varphi \sin\lambda$	$X = 4.472.544,489 \text{ m}$
$Z = (N(1 - e^2) + h) \sin\varphi$	$Y = 601.634,185 \text{ m}$
	$Z = 4.492.545,119 \text{ m}$

2) Il vertice IGM del 1° ordine "SUPERGA" (asse cupola) ha le seguenti coordinate geografiche (riferite all'ellissoide internazionale):

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= 45^\circ 04' 48", 308 \\ \mathbf{l} &= -4^\circ 41' 03", 307 \end{aligned}$$

Calcolare nel vertice IGM:

1. i raggi principali di curvatura (p N)
2. il raggio R della sfera locale
3. il raggio di curvatura di una sezione obliqua di azimut $\alpha=45^\circ$ e inclinata di $\beta=30^\circ$ rispetto alla normale
4. il raggio del parallelo

i parametri dell'ellissoide internazionale di Hayford sono: $a= 6.378.388 \text{ m}$
 $e^2 = 0,006722670022$

	risultati
$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$	0,99831321
$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}$	6.367.676,65 m
$N = \frac{a}{W}$	6.389.165,17 m
$R = \sqrt{\rho N}$	6.378.411,86 m
$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$	raggio di curvatura della sezione normale avente azimut $=45^\circ$ 6.378.402,81 m
Applicando MEUSNIER : $R_\beta = R_\alpha \cos \beta$	5.523.858,87 m
raggio del parallelo $r = N \cos \varphi$	4.511.502,79 m

- 3) si consideri la geodetica uscente con un azimut $\alpha = 40^\circ$ da un punto P di latitudine $\varphi = 40'$
 Calcolare l'azimut della geodetica in P' di latitudine $\varphi' = 41^\circ$ e in P'' di latitudine $\varphi'' = 42^\circ$

i parametri dell'ellissoide internazionale di Hayford sono: $a= 6.378.388 \text{ m}$
 $e^2 = 0,006722670022$

Risultati:

punto	latitudine	W	$r = \frac{a \cos \varphi}{W}$
P	40°	0,998610211	4.892.928,82 m
P'	41°	0,998552188	4.820.810,16 m
P''	42°	0,998493875	4.747.215,93 m

Applicando il teorema di Clairaut:

$$r \sin \alpha = \text{cost} \quad 4.892.928,82 \sin 40^\circ = \text{cost} \quad 3.145.114,02 = \text{cost}$$

da cui sarà possibile ricavare l'azimut della geodetica alle diverse latitudini:

$$\alpha' = \arcsin \frac{\cos \varphi}{r_{\varphi}} \quad \arcsin \frac{3.145.114,02}{4.820.810,16} \quad 40^{\circ} 43' 23'',06$$

$$\alpha'' = \arcsin \frac{\cos \varphi}{r_{\varphi}} \quad \arcsin \frac{3.145.114,02}{4.747.215,93} \quad 41^{\circ} 29' 31'',78$$

4) Verifica dei teoremi della geodesia operativa.

A partire dal vertice IGM di SUPERGA considerare una geodetica uscente avente azimuth $\alpha = 45^{\circ}$ e una lunghezza di 100, 500, 1.000, 10.000, 20.000 km

Risultati:

Prendendo i parametri calcolati nell'esercizio n° 2:

sviluppo di geodetica [km]	$\frac{S'-S}{S} = \frac{S^4}{360N^2R_{\alpha}^2} \left(\frac{e^2}{1-e^2} \right)^2 \sin^2 2\alpha \cos^4 \varphi$	$A - \alpha = \frac{S^2}{12NR_{\alpha}} \frac{e^2}{1-e^2} \sin 2\alpha \cos^2 \varphi$
100	-	0'',014
500	-	0'',36
1.000	$2 \cdot 10^{-11}$	1'',42
10.000	$2 \cdot 10^{-7}$	-
20.000	$3 \cdot 10^{-6}$	-

5) Rispetto all'origine O di coordinate geografiche (φ, λ) note, determinate le coordinate geodetiche polari del punto P(ρ, T), calcolare le coordinate geodetiche rettangolari (E,N) dello stesso punto P:

origine O	punto P	parametri dell'ellissoide internazionale
$\varphi_0 = 42^{\circ} 51' 11'',2$	$T = 58.724,23 \text{ m}$	$a = 6.378.388 \text{ m}$
$\lambda_0 = 12^{\circ} 39' 48'',6$	$\beta = 67^{\circ} 27' 18'',5$	$\alpha = 1/297$

Risultati:

$$\alpha = 0,003367003$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2 = 0,006722670$$

$$W = 0,998443957$$

$$\rho = 6.365.175,449 \text{ m}$$

$$N = 6.388.328,513 \text{ m}$$

$$3\varepsilon = \frac{T \sin \beta \cdot T \cos \beta}{2\rho N} = 3'',09$$

$$\text{Est} = T \sin (\beta - \varepsilon) = 54.236,39 \text{ m}$$

$$\text{Nord} = T \cos (\beta - 2\varepsilon) = 22.515,79 \text{ m}$$

1.2 RICHIAMI DI GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO

Per poter tradurre i problemi geometrici in problemi di calcolo, occorre rappresentare i diversi enti geometrici mediante numeri o equazioni.

Questa possibilità si realizza assegnando un sistema di riferimento nell'ambiente in cui si lavora. La rappresentazione analitica di un ente geometrico dipende dalla scelta del sistema di riferimento: scelte oculute consentono di mettere in evidenza particolari proprietà degli enti che si studiano. In topografia si utilizzano essenzialmente il riferimento ortonormale e il riferimento polare.

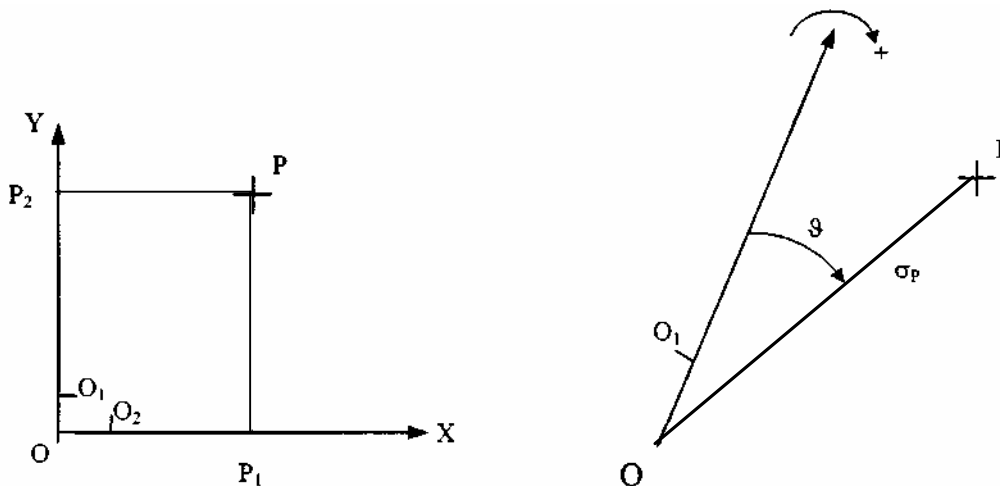


Figura 1 - Riferimento ortonormale e coordinate cartesiane
Riferimento polare e coordinate polari

Il riferimento ortonormale è definito da una coppia di rette tra loro ortogonali, sulle quali si fissa un riferimento cartesiano, scegliendo il punto O, comune alle due rette, come origine, e i due punti unità O_1 e O_2 in modo tale che:

$$OO_1 = OO_2$$

Indicheremo, d'ora in poi, tale riferimento con la notazione $R[O.XY]$.

Fissato un riferimento ortonormale, si può identificare ogni punto P con le sue coordinate X_p , Y_p . Se P_1 e P_2 sono le proiezioni ortogonali di P sugli assi X e Y, le coordinate X_p e Y_p sono le lunghezze con segno dei segmenti OP_1 e OP_2 .

Il riferimento polare è definito da un punto O, detto polo, da una semiretta di origine OO_1 , detta

asse polare, da un'unità di misura OO_1 , e da un verso positivo per le rotazioni (**in topografia tradizionalmente si considera positivo il senso orario**).

Per ogni punto P del piano (ad eccezione del polo), si possono individuare le seguenti grandezze reali:

- il raggio vettore S_p coincidente con la lunghezza del segmento OP
- l'anomalia α_p coincidente con la rotazione oraria che sovrappone l'asse polare alla semiretta OP.

Le quantità S_p , α_p rappresentano le coordinate polari del punto P. Per convenzione in topografia l'anomalia è un angolo sempre positivo con valori compresi tra 0 e 2π .

1.2.1 - Riferimenti cartesiano e polare associati

Consideriamo un sistema di riferimento polare la cui origine coincida con l'origine di un sistema cartesiano $R[O.XY]$ e il cui asse polare coincida in verso e direzione con l'asse Y del sistema cartesiano.

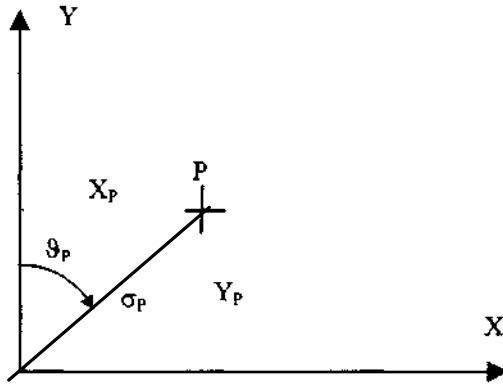


Figura 2 - Riferimenti cartesiano e polare associati

Analizziamo ora le relazioni che consentono di trasformare le coordinate polari di un punto P nelle relative coordinate cartesiane e viceversa.

Dalla figura 2 si ottengono immediatamente le seguenti relazioni:

$$X_p = \sigma_p \cdot \text{sen } \vartheta_p \qquad \sigma_p = \sqrt{X_p^2 + Y_p^2} \qquad (1)$$

$$Y_p = \sigma_p \cdot \text{cos } \vartheta_p \qquad \vartheta_p = \text{arc tan } \frac{X_p}{Y_p}$$

Per quanto riguarda il calcolo dell'anomalia α_p occorre completare la definizione puramente geometrica espressa dalla quarta relazione delle (1).

Abbiamo visto, infatti, che l'anomalia è per definizione una quantità positiva, mentre il risultato numerico della funzione arctan è rappresentata da un numero compreso tra $-\pi/2$ e $+\pi/2$.

Per risolvere in modo corretto il problema si opera nel seguente modo.

Poniamo:

$$K = \text{arc tan } \frac{X_p}{Y_p}$$

il valore dell'anomalia ϑ_p si determina tenendo conto dei seguenti casi particolari:

$X_p > 0$ AND $Y_p > 0$	\Rightarrow	$\vartheta_p = K$
$X_p > 0$ AND $Y_p < 0$	\Rightarrow	$\vartheta_p = K + \pi$
$X_p < 0$ AND $Y_p < 0$	\Rightarrow	$\vartheta_p = K + \pi$
$X_p < 0$ AND $Y_p > 0$	\Rightarrow	$\vartheta_p = K + 2\pi$
$X_p = 0$ AND $Y_p > 0$	\Rightarrow	$\vartheta_p = 0$
$X_p = 0$ AND $Y_p < 0$	\Rightarrow	$\vartheta_p = \pi$
$X_p > 0$ AND $Y_p = 0$	\Rightarrow	$\vartheta_p = \pi/2$
$X_p < 0$ AND $Y_p = 0$	\Rightarrow	$\vartheta_p = 3\pi/2$

Ovviamente se X_p e Y_p sono entrambe nulle, non è possibile definire alcuna soluzione in quanto il punto P coincide con l'origine del sistema polare.

1.2.2 - Angolo di direzione di una semiretta orientata

L'angolo di direzione di una semiretta orientata è una grandezza di grande utilità nello sviluppo dei calcoli in topografia.

Consideriamo, in un riferimento cartesiano, la semiretta orientata AB (vedi fig. 3)

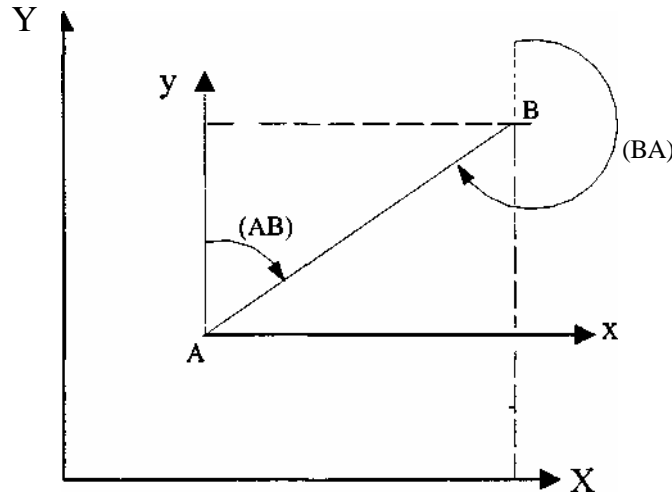


Figura 3 - Angolo" di direzione di una semiretta orientata

Si definisce angolo di direzione della semiretta orientata AB, la rotazione oraria che la parallela all'asse Y del sistema cartesiano passante per il punto A deve compiere per sovrapporsi alla semiretta AB. Esso viene indicato con la notazione (AB).

Osservando la fig. 3 è facile notare che l'angolo di direzione (AB) coincide con l'anomalia del punto B, in un sistema di riferimento polare che ha origine in A e asse polare parallelo all'asse Y del sistema cartesiano. Ricordando quanto definito all'inizio di questo paragrafo, l'angolo di direzione sarà dunque una quantità sempre positiva e con valore compreso tra 0 e 2π .

L'angolo di direzione della semiretta AB può essere determinato se si conoscono le coordinate cartesiane dei due punti A e B.

Consideriamo un secondo sistema cartesiano parallelo a quello fino ad ora utilizzato R[O.XY] avente origine in A (R[A.xy]); questo sistema è chiamato sistema cartesiano parziale mentre quello di origine O sistema cartesiano totale.

Se X_A , Y_A e X_B , Y_B sono rispettivamente le coordinate totali di A e B, per quanto abbiamo detto le coordinate parziali di A risultano entrambe nulle, mentre le coordinate parziali di B saranno espresse dalle seguenti relazioni:

$$x_B = X_B - X_A \quad y_B = Y_B - Y_A$$

Risulta a questo punto immediato ricavare la formula per il calcolo dell'angolo di direzione (AB) note che siano le coordinate cartesiane totali di A e B. Ricordando le (1) risulta infatti:

$$(AB) = \arctan \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} = \arctan \frac{x_B}{y_B} \quad (2)$$

Ovviamente poiché l'angolo di direzione è una anomalia occorre considerare in quale degli otto casi elencati nel paragrafo precedente si sta operando per poter determinare con esattezza il valore dell'angolo di direzione ricercato.

Osservando la fig. 3 si nota inoltre che vale la seguente relazione:

$$(BA) = (AB) + \rho$$

In generale, noto (AB) , angolo di direzione della semiretta orientata AB , l'angolo di direzione della semiretta orientata BA si può determinare secondo la seguente relazione:

$$\begin{aligned} (BA) &= (AB) + \pi & \text{se } (AB) < \pi \\ (BA) &= (AB) - \pi & \text{se } (AB) > \pi \end{aligned} \quad (3)$$

Esercizi:

calcolare l'angolo di direzione (PA) nei seguenti casi:

$X_p = 123.49 \text{ m}$	$X_A = 103.41 \text{ m}$	$(PA) = 369^{\text{g}}.1695$
$Y_p = 144.35 \text{ m}$	$Y_A = 182.52 \text{ m}$	
	$X_A = 224.35 \text{ m}$	$(PA) = 32^{\text{g}}.0578$
	$Y_A = 327.42 \text{ m}$	
	$X_A = 62.62 \text{ m}$	$(PA) = 232^{\text{g}}.8992$
	$Y_A = 37.24 \text{ m}$	
	$X_A = 183.92 \text{ m}$	$(PA) = 165^{\text{g}}.9586$
	$Y_A = 42.32 \text{ m}$	

1.2.3 - Angolo piano

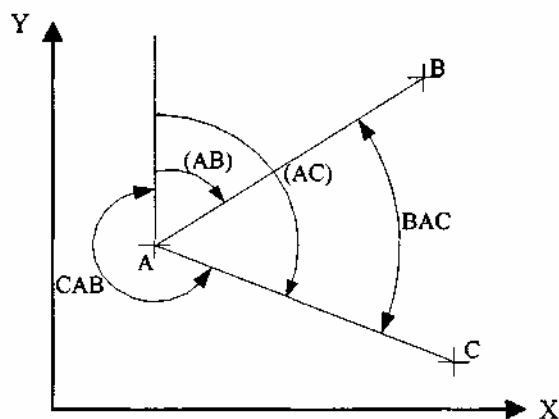


Figura 4 - Angolo piano: notazione topografica

La fig. 4 rappresenta due semirette orientate AB e AC non parallele; queste ultime individuano nel piano due angoli esplementari. Per indicare in modo univoco a quale dei due angoli si vuole fare riferimento, in topografia si usa una particolare notazione che deriva dalla definizione che, in topografia, viene data per l'angolo piano.

Si definisce angolo piano tra due semirette orientate, la rotazione **oraria** che una semiretta deve compiere attorno al punto di intersezione con la seconda semiretta per sovrapporsi a quest'ultima.

Nel caso rappresentato in fig.4, l'angolo acuto è definito dalla rotazione oraria che la semiretta AB deve compiere attorno al punto A per sovrapporsi alla semiretta AC .

Questo angolo viene indicato con la notazione **BAC**: il punto B viene chiamato **punto indietro** e il punto C **punto avanti** ($BAC =$ punto indietro punto di stazione punto avanti). Concordemente alla definizione data, l'altro angolo indicato in fig. 4 si indicherà con la notazione

CAB e in questo caso C è il punto indietro e B il punto avanti (CAB — punto indietro punto di stazione punto avanti).

La notazione angolare proposta consente di individuare in modo univoco a quale angolo si sta facendo riferimento.

Osservando ancora la fig. 4 si può dedurre la seguente relazione:

$$BAC = (AC) - (AB)$$

dalla quale si ricava la seguente regola di validità generale: l'ampiezza di un angolo piano è data dalla differenza tra l'angolo di direzione della semiretta orientata tra il vertice dell'angolo e il punto avanti e l'angolo di direzione della semiretta orientata tra il vertice e il punto indietro.

1.2.4 - Trasporto degli angoli di direzione lungo una spezzata

Nel sistema cartesiano R[O.XY] consideriamo una spezzata di vertici A_1, A_2, \dots, A_n .

Siano note le seguenti grandezze: l'angolo di direzione del primo lato della spezzata A_1A_2 e gli angoli misurati in A_2 , in A_3 , ecc..

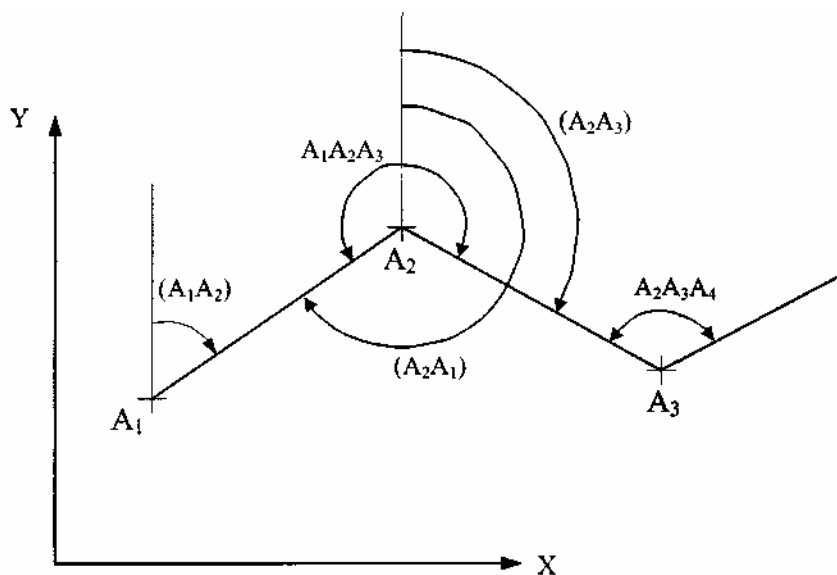


Figura 5 - Trasporto degli angoli di direzione lungo una spezzata

Per calcolare gli angoli di direzione successivi al primo basta calcolare i corrispondenti angoli di direzione reciproci, aggiungere l'angolo misurato nel vertice e togliere 2π quando il risultato del calcolo eccede 2π .

$$(A_2A_3) = (A_2A_1) + A_1A_2A_3 - 2\pi$$

$$(A_2A_3) = (A_1A_2) + \pi + A_1A_2A_3 - 2\pi$$

$$(A_2A_3) = (A_1A_2) + A_1A_2A_3 - \pi$$

Tale regola presuppone che per la spezzata si sia definito un verso di percorrenza, e che gli angoli misurati siano sempre quelli che permettono di sovrapporre un lato al successivo con una rotazione

oraria.

Questa relazione può essere generalizzata nella seguente regola:

l'angolo di direzione in un vertice (A_i) si ottiene sommando all'angolo di direzione del vertice precedente (A_{i-1}) l'angolo azimutale misurato (A_i); se la somma dei due termini è maggiore di π bisogna sottrarre π , se la somma dei due termini è minore di π bisogna sommare π ,

$$(A_i A_{i+1}) = (A_i A_{i-1}) + A_{i-1} A_i A_{i+1} \pm \pi$$

1.2.5 - Trasporto delle coordinate cartesiane lungo una spezzata

Nel sistema cartesiano $R[O.XY]$ consideriamo una spezzata di vertici A_1, A_2, \dots, A_n . Siano noti gli angoli di direzione di tutti i lati della spezzata, le lunghezze di tutti i lati l_1, l_2, \dots, l_n e le coordinate cartesiane X_1, Y_1 del primo vertice, (vedi fig. 6).

Si vogliono determinare le coordinate cartesiane di tutti i vertici della spezzata.

Come prima cosa si determinano le coordinate parziali (vedi par. 1.2.2) di ogni vertice di coordinate totali incognite, rispetto al vertice precedente usando le (1).

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \cdot \text{sen}(A_1 A_2) & y_2 &= l_1 \cdot \text{cos}(A_1 A_2) \\ x_3 &= l_2 \cdot \text{sen}(A_2 A_3) & y_3 &= l_2 \cdot \text{cos}(A_2 A_3) \end{aligned} \quad (6)$$

Quindi si procede al calcolo delle coordinate totali di ogni vertice che, come risulta facilmente verificabile osservando la fig. 6, risultano essere pari alla somma delle coordinate totali del vertice precedente e delle coordinate parziali del vertice in esame:

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 + x_2 & Y_2 &= Y_1 + y_2 \\ X_3 &= X_2 + x_3 & Y_3 &= Y_2 + y_3 \end{aligned} \quad (7)$$

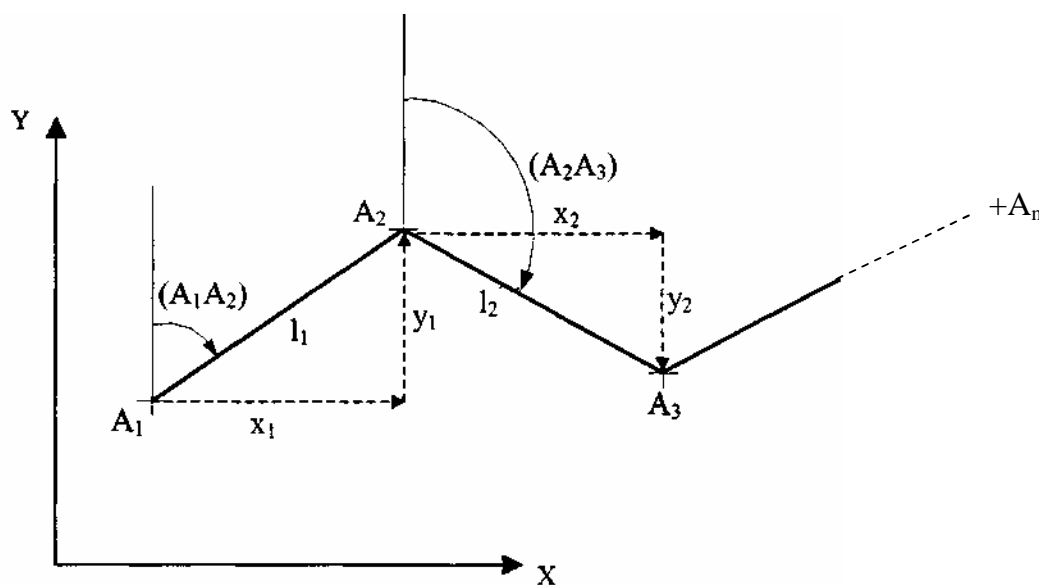


Figura 6 - Trasporto delle coordinate cartesiane lungo una spezzata

1.2.6 - Esempio di calcolo (intersezione semplice in avanti)

Per determinare le coordinate planimetriche di un punto P, si fa stazione in due punti di coordinate note A (X_A, Y_A) e B (X_B, Y_B) e si misurano i due angoli azimutali α, β (vedi Fig. 7).

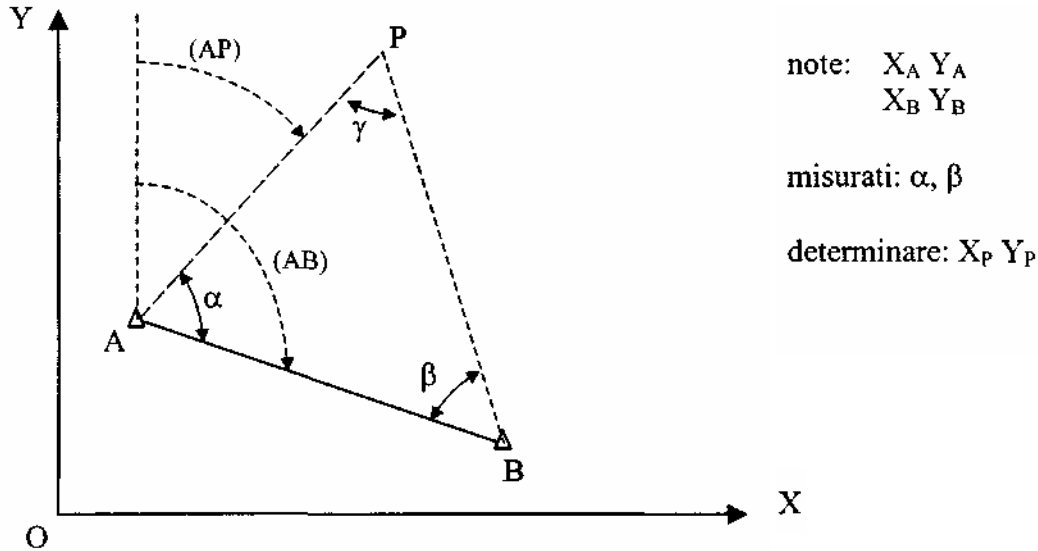


Figura 7 - intersezione semplice in avanti

Calcolo dell'angolo di direzione (AB)	$(AB) = \text{arc tan} \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}$
Calcolo della distanza AB	$\overline{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$
Calcolo dell'angolo di direzione (AP)	$(AP) = (AB) - \alpha$
Calcolo della distanza AP	$\overline{AP} = \frac{\overline{AB}}{\sin \gamma} \sin \beta$
	$X_P = X_A + \overline{AP} \sin (AP)$
	$Y_P = Y_A + \overline{AP} \cos (AP)$

Il calcolo delle coordinate di P può essere condotto anche partendo dal punto B:

Calcolo dell'angolo di direzione (BA)	$(BA) = \text{arc tan} \frac{X_A - X_B}{Y_A - Y_B} = (AB) + \pi$
Calcolo della distanza \overline{BA}	$\overline{BA} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$
Calcolo dell'angolo di direzione (BP)	$(BP) = (BA) + \beta$
Calcolo della distanza \overline{BP}	$\overline{BP} = \frac{\overline{AB}}{\sin \gamma} \sin \alpha$
	$X_P = X_B + \overline{BP} \sin (BP)$
	$Y_P = Y_B + \overline{BP} \cos (BP)$

Le coordinate del punto P ottenute conducendo i calcoli sia a partire dal punto A che dal punto B devono essere coincidenti.

Nel caso dell'intersezione semplice in avanti non esistono misure esuberanti e quindi il doppio calcolo può servire solamente per controllarne l'esattezza intrinseca.

Se invece si utilizzano più di due punti noti e quindi si misurano più di due angoli azimutali, si rientra nel caso della intersezione multipla in avanti che prevede una soluzione con un calcolo di compensazione perché in questo caso le misure (3) sono esuberanti rispetto alle incognite (2). In prima approssimazione ed in attesa di conoscere gli sviluppi analitici del trattamento statistico delle misure possiamo dire che il valore più attendibile delle coordinate del punto P sarà la media aritmetica dei valori ottenuti partendo dal punto A, B e C.

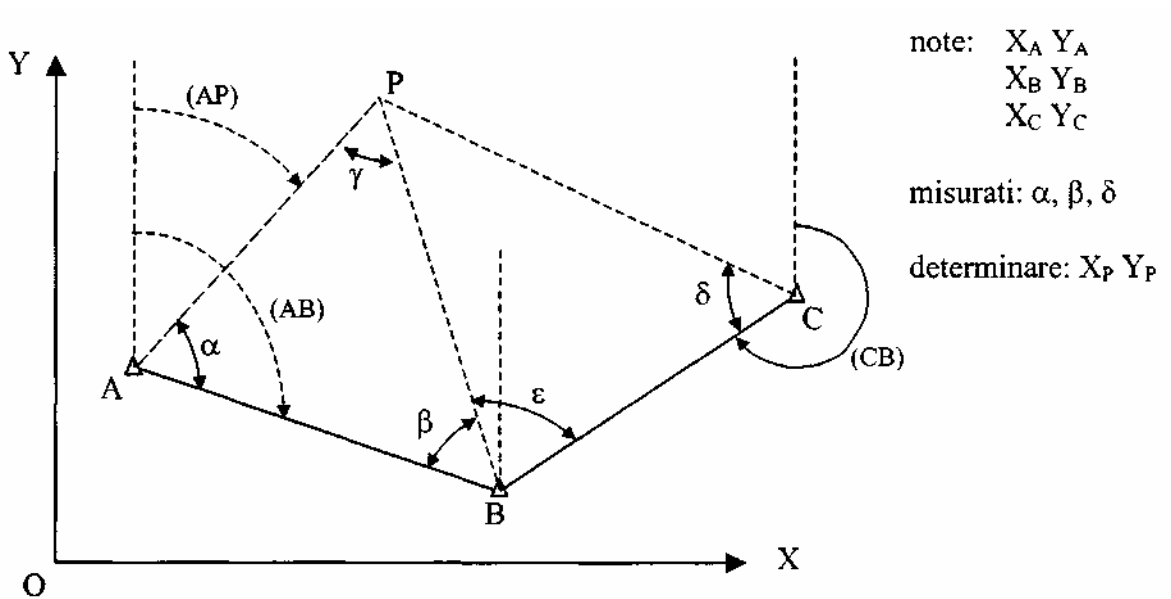


Figura 8 - intersezione multipla in avanti

- | | |
|---------------------------------------|---|
| Calcolo dell'angolo di direzione (BC) | $(BC) = \arctan \frac{X_C - X_B}{Y_C - Y_B}$ |
| Calcolo di ϵ | $\epsilon = 400^{gon} - (BP) + (BC)$ |
| Calcolo dell'angolo di direzione (CB) | $(CB) = (BC) + \pi$ |
| Calcolo dell'angolo di direzione (CP) | $(CP) = (CB) + \delta$ |
| Calcolo della distanza CP | $\overline{CP} = \frac{\overline{BP}}{\sin \delta} \sin \epsilon$ |
| | $X_P = X_C + \overline{CP} \sin (CP)$ |
| | $Y_P = Y_C + \overline{CP} \cos (CP)$ |

Esempio numerico svolto:

$X_A =$	5.212,43 m		
$Y_A =$	16.451,16 m		
$X_B =$	18.151,21 m		
$Y_B =$	6.263,14 m		
$\alpha =$	72 ^g ,4118		
$\beta =$	82 ^g ,1264		
$\gamma =$	45 ^g ,4618		
$(AB) =$	142 ^g ,463292	$(BA) =$	342 ^g ,463292
$\overline{AB} =$	16.468,387 m	$\overline{AB} =$	16.468,387 m
$(AP) =$	70 ^g ,051492	$(BP) =$	24 ^g ,589692
$\overline{AP} =$	24.160,097	$\overline{BP} =$	22820,305 m
$X_P =$	26.748,10 m	$X_P =$	26.748,10 m
$Y_P =$	27.402,20 m	$Y_P =$	27402,20 m

$X_C =$	36.230,12
$Y_C =$	11.424,27
$\delta =$	83 ^g ,6063
$(BC) =$	82 ^g ,2968
$\varepsilon =$	57 ^g ,70711
$(CB) =$	282 ^g ,2968
$\overline{CB} =$	18.801,18
$(CP) =$	365 ^g ,9031
$\overline{CP} =$	18.579,67
$X_P =$	26.747,97
$Y_P =$	27.402,16

IL valore più plausibile delle coordinate del punto sarà, come già detto, la media aritmetica dei valori ottenuti partendo dal punto A, B e C:

$$\begin{aligned} X_P = Y_P & \quad \mathbf{26.748,03 \text{ m}} \\ & \quad \mathbf{27.402,18 \text{ m}} \end{aligned}$$

Esempi di intersezione multipla in avanti da svolgere:

$X_A =$	5.141,15 m	$X_A =$	3.215,14 m
$Y_A =$	3.521,47 m	$Y_A =$	10.234,51 m
$X_B =$	12.561,24 m	$X_B =$	8.561,25 m
$Y_B =$	2.534,56 m	$Y_B =$	16.538,57 m
$X_C =$	18.354,27 m	$X_C =$	16.328,52 m
$Y_C =$	8.531,29 m	$Y_C =$	15.537,62 m
$\alpha =$	97 ^g ,1578	$\alpha =$	92 ^g ,5432
$\beta =$	67 ^g ,2147	$\beta =$	72 ^g ,4327
$\delta =$	87 ^g ,3242	$\delta =$	102 ^g ,6087
$X_P =$	7.300,26 m	$X_P =$	15.170,37 m
$Y_P =$	15.601,25 m	$Y_P =$	2.295,38 m

1.2.7 - Esempio di calcolo (poligonale)

La poligonale è un complesso di punti che viene rilevato ripetendo lo schema elementare del rilievo di un punto per coordinate polari o, in altre parole, è una spezzata che congiunge i punti da rilevare e di cui si misurano tutti gli angoli e tutti i lati partendo, necessariamente, da un punto e da una direzione noti. Mediante il calcolo si determinano le coordinate **planimetriche** di tutti i vertici. Nella pratica operativa la poligonale ha sempre due punti di coordinate note alle estremità; lo schema più usuale è quello di Fig. 9:

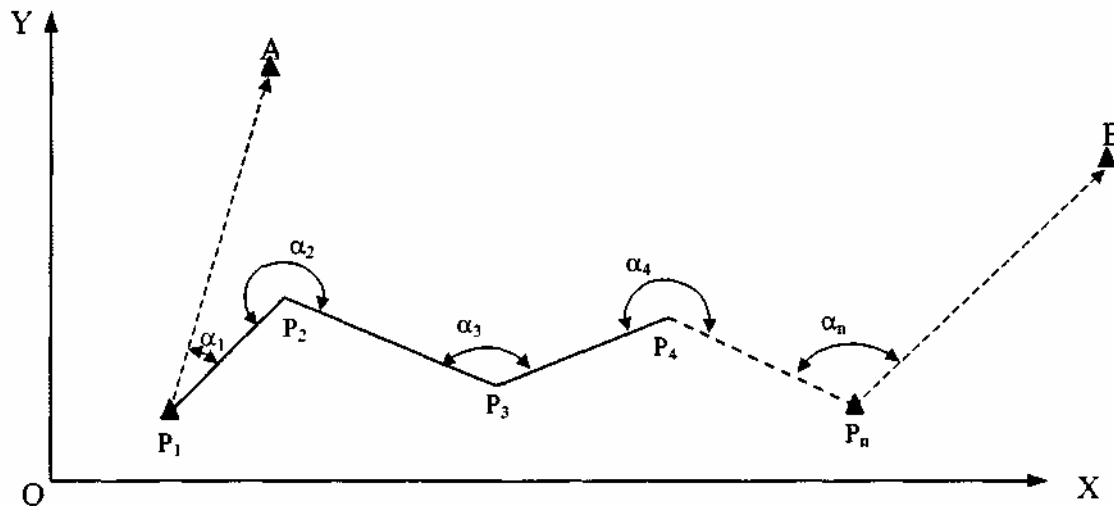


Figura 9 - poligonale aperta vincolata agli estremi

La poligonale parte da un punto P_1 dove si misura l'angolo α_1 che il primo lato forma con la direzione che congiunge tale punto con un altro punto noto A, e si chiude sul punto P_n nel quale si misura anche l'angolo α_n che l'ultimo lato della poligonale forma con la direzione che congiunge tale punto con il punto noto B. Si misurano inoltre tutti i lati $P_1-P_2, P_2-P_3, \dots, P_{n-1}-P_n$.

Le misure esuberanti rispetto al minimo necessario sono sempre tre indipendentemente dal numero dei vertici della poligonale.

La poligonale è pertanto un'operazione controllata in quanto, attraverso le misure esuberanti, è possibile un calcolo di compensazione che permette l'individuazione di eventuali errori grossolani nelle misure.

La poligonale è chiusa se la spezzata si richiude sul punto di partenza. Per il calcolo delle coordinate dei vertici si assume normalmente un sistema di assi con l'origine su uno dei vertici e l'asse X o Y coincidente con uno dei lati uscenti da questo vertice:

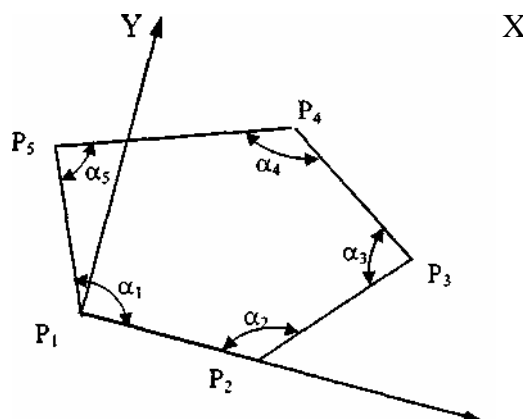


Figura 10 - poligonale chiusa

Gli angoli e le distanze dovranno essere misurati con strumenti adeguati alle precisioni da ottenere secondo le procedure operative descritte più avanti. Il procedimento di misura è il seguente:

1. sui primi tre vertici (P_1, P_2, P_3) si dispongono i treppiedi e le basette;
2. si effettua il centramento delle basette sui punti materializzati a terra;
3. su P_1 e P_3 si posizionano i segnali di collimazione;
4. su P_2 si posiziona la total-station e si effettua la misura dell'angolo azimutale e delle distanze con P_1 e P_3 ;
5. successivamente il treppiede che sta in P_1 viene spostato in P_4 e si scambiano nei vertici P_2 e P_3 di total-station e di segnale di collimazione;
6. questa sequenza si ripete per tutti i vertici della poligonale;

Una poligonale può essere calcolata e compensata con gli algoritmi rigorosi descritti nella parte di trattamento statistico delle misure ma, in molti casi, visto il basso grado di esuberanza delle misure (solo tre) rispetto al minimo indispensabile si può procedere con una compensazione empirica. Le differenze rilevabili nelle coordinate dei vertici tra il metodo rigoroso e quello empirico sono di modesta entità e la preferenza del primo metodo rispetto al secondo può essere dettata da ragioni organizzative e non da una maggior precisione attesa.

La compensazione empirica di una poligonale si esegue nel modo seguente (con riferimento alla Fig. 9):

con le coordinate note dei punti P_1, A, U_n, B si calcolano gli angoli di direzione (P_1A) e (P_nB):

$$(P_1A) = \arctan \frac{X_A - X_1}{Y_A - Y_1}$$

$$(P_nB) = \arctan \frac{X_B - X_n}{Y_B - Y_n}$$

Si calcolano quindi gli angoli di direzione in tutti i vertici rimanenti:

$$(P_1P_2) = (P_1A) + \alpha_1$$

$$(P_1P_3) = (P_1P_2) + \alpha_2 \pm \pi$$

.....

$$(P_nB) = (P_{n-1}P_n) + \alpha_n \pm \pi$$

La differenza tra l'angolo di direzione (P_nB) ottenuto attraverso gli angoli misurati α_i e lo stesso angolo di direzione ottenuto attraverso le coordinate dei vertici P e B fornirà un **errore di chiusura angolare**:

$$e_a = (P_nB)_{\text{misura}} - (P_nB)_{\text{coordinate}}$$

Supponendo che le coordinate dei punti noti siano prive di errore, l'errore di chiusura angolare e_a rappresenta l'effetto globale degli errori accidentali di misura degli angoli azimutali α_i .

L'errore di chiusura angolare e_a è una quantità aleatoria il cui s.q.m. è pari a \sqrt{n} volte lo s.q.m. S_a della misura di un singolo angolo; pertanto in assenza di errori grossolani il valore di e_a dovrà essere compreso tra i limiti di $\pm 3S_a \sqrt{n}$. La tolleranza t_a dell'errore di chiusura angolare si assume pertanto pari a:

$$t_a = 3\sigma_a \sqrt{n}$$

Il valore di t_a dipende ovviamente dal teodolite, dai segnali, dal metodo di misura utilizzato ecc..

Si assumono valori di σ_a pari a:

$$\begin{array}{ll} \sigma_a = 0^g,0005 & \text{poligonale di alta precisione} \\ \sigma_a = 0^g,0010 & \text{poligonale di media precisione} \end{array}$$

Se l'errore di chiusura angolare e_a è minore o uguale alla tolleranza t_a si compensano empiricamente gli angoli misurati apportando ad ognuno una correzione pari a e_a/n e si ricalcolano tutti gli angoli di direzione con i valori angolari compensati. Se l'errore di chiusura angolare e_a è maggiore della tolleranza t_a si devono rifare le misure.

Si calcolano quindi le coordinate dei vertici secondo le [6] e [7] ottenendo:

$$\begin{array}{ll} X_2 = X_1 + \overline{P_1 P_2} \sin(P_1 P_2) & Y_2 = Y_1 + \overline{P_1 P_2} \cos(P_1 P_2) \\ X_3 = X_2 + \overline{P_2 P_3} \sin(P_2 P_3) & Y_3 = Y_2 + \overline{P_2 P_3} \cos(P_2 P_3) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_n = X_{n-1} + \overline{P_{n-1} P_n} \sin(P_{n-1} P_n) & Y_n = Y_{n-1} + \overline{P_{n-1} P_n} \cos(P_{n-1} P_n) \end{array}$$

Le coordinate del punto P_n sono note e, considerate prive di errore, permettono il calcolo degli errori di chiusura:

$$\varepsilon_X = (X_n)_{\text{calcolato}} - (X_n)_{\text{noto}} \qquad \varepsilon_Y = (Y_n)_{\text{calcolato}} - (Y_n)_{\text{noto}}$$

La quantità $\varepsilon_l = \sqrt{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2}$ si chiama **errore di chiusura laterale** e deve risultare **minore o uguale** ad una **tolleranza t_l** . In effetti a formare l'errore di chiusura ε_l concorrono anche gli errori di misura degli angoli, ma in una compensazione empirica non se ne tiene conto.

La tolleranza deve tenere conto sia degli s.q.m. di misura dei lati, ovvero degli errori accidentali di misura, sia degli eventuali errori sistematici. Considerando una spezzata pressochè rettilinea di n lati di lunghezza media l , di sviluppo $L = n l$, indicato con σ_l lo s.q.m. della misura di un lato si ha:

$$\sigma_L^2 = n\sigma_l^2 = \frac{L}{l}\sigma_l^2 \text{ e quindi } \sigma_L = \frac{\sigma_l}{\sqrt{l}}\sqrt{L} \text{ cresce proporzionalmente alla radice della lunghezza totale}$$

L ; per tenere conto degli errori accidentali di misura dei lati la formula deve contenere un termine del tipo $p\sqrt{L}$ dove p assume un valore dell'ordine di $3\frac{\sigma_l}{\sqrt{l}}$.

Una formulazione classica della tolleranza laterale è la seguente:

$$t_l = p\sqrt{L} + qL$$

dove con L si intende lo sviluppo lineare della poligonale e dove q rappresenta il contributo dell'errore sistematico di misura delle distanze.

IL Catasto Italiano, in tempi non molto recenti, adottava i seguenti coefficienti:

$p = 0,015$ per terreni facili
 $p = 0,020$ per terreni medi
 $p = 0,025$ per terreni difficili

$q = 0,0008$ per distanze misurate senza distanziometro ad onde
 $q = \text{trascurabile}$ per distanze misurate con distanziometro ad onde

Verificato che l'errore di chiusura laterale e_1 è inferiore alla tolleranza, per eliminare le discrepanze fra le coordinate calcolate e le coordinate note del punto P_n si distribuiscono le correzioni Dx e Dy alle proiezioni dei lati sugli assi coordinati.

La ripartizione delle correzioni avviene tenendo conto del metodo di misura adottato.

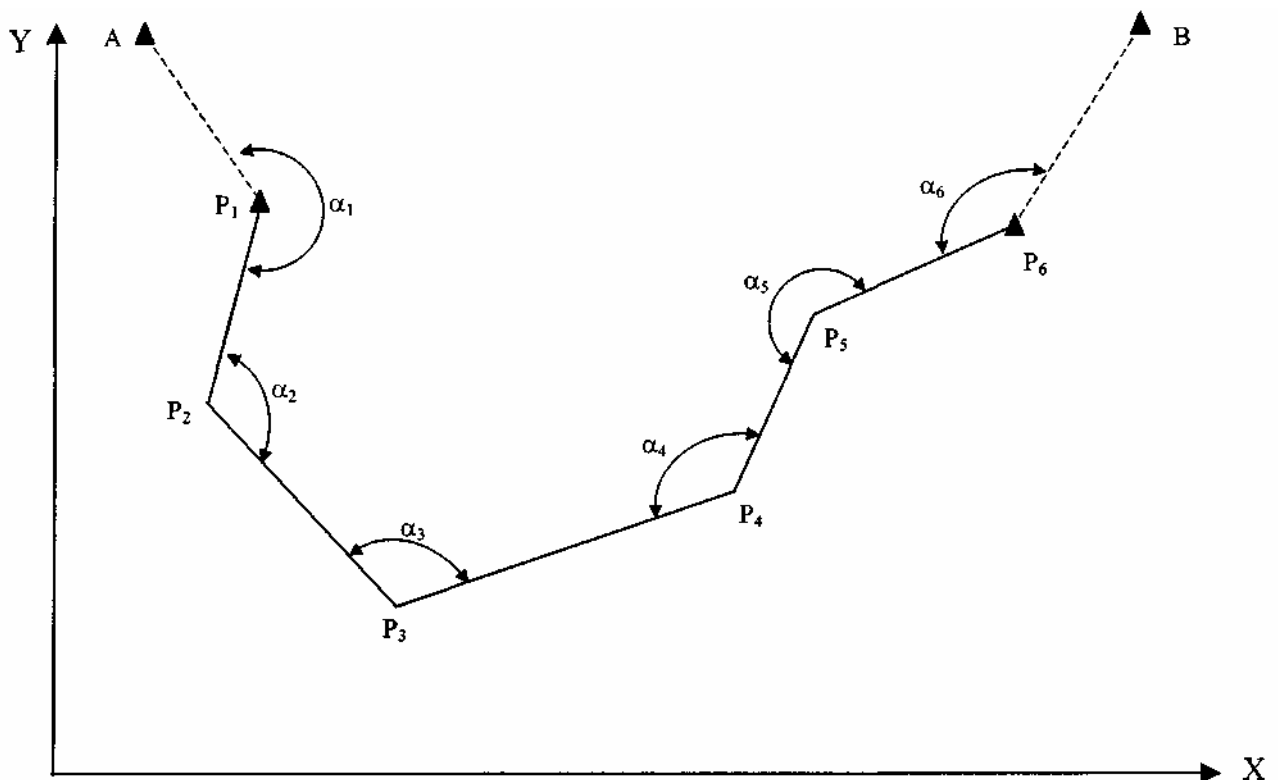
Oggi tutte le distanze si misurano con il distanziometro ad onde che fornisce la misura affetta da un errore proporzionale alla distanza solo per valori superiori al km.

Entro 1 km l'errore di misura si può ritenere costante e la ripartizione dell'errore di chiusura laterale potrà quindi avvenire in parti uguali per tutti i lati (stesso criterio adottato per la ripartizione dell'errore di chiusura angolare).

Solo per le poligonali con lati superiori ad 1 km è necessario ripartire l'errore di chiusura laterale in parti proporzionali alla lunghezza stessa dei lati.

Con le proiezioni compensate si calcolano infine per somma le coordinate compensate dei vertici.

Esempio di compensazione di una poligonale aperta vincolata agli estremi:



POLIGONALE APERTA VINCOLATA AGLI ESTREMI

Punto	α [gon]	angolo di direzione [gon]	α_{comp} [gon]	angolo di direzione comp. [gon]	lati [m]	$l \sin \theta$	$l \cos \theta$	X [m]	Y [m]	$l \sin \theta$ comp.	$l \cos \theta$ comp.	Xcomp [m]	Ycomp [m]
A												518,14	2861,27
		173,8198		173,8198									
P ₁	245,5262		245,52581					845,61	2110,37			845,61	2110,37
		219,346		219,3456	651,34	-194,897	-621,497			-194,904	-621,525		
P ₂	134,1526		134,15221					650,7129	1488,873			650,71	1488,85
		153,4986		153,4978	848,93	566,4131	-632,343			566,4063	-632,371		
P ₃	130,2161		130,21571					1217,126	856,5292			1217,11	856,47
		83,7147		83,71353	1108,15	1072,084	280,4128			1072,078	280,3852		
P ₄	160,3725		160,37211					2289,21	1136,942			2289,19	1136,86
		44,0872		44,08563	843,21	538,3557	648,9809			538,3489	648,9533		
P ₅	237,6515		237,65111					2827,566	1785,923			2827,54	1785,81
		81,7387		81,73674	795,29	762,7879	225,0351			762,7811	225,0075		
P ₆	147,1714		147,17101					3590,354	2010,958			3590,32	2010,82
		28,9201		28,90775									
B												4795,94	4480,85

$$\varepsilon_{\alpha} = 0,002356$$

$$t_a = 0,003674$$

$$\varepsilon_x = 0,0341$$

$$\varepsilon_y = 0,1380$$

$$\varepsilon_l = 0,1422$$

$$t_l = 0,9775$$

$$\Delta_x = -0,06825$$

$$\Delta_y = -0,027602$$

esempio di poligonale aperta vincolata agli estremi da calcolare:

Punto	α [gon]	angolo di direzione [gon]	α_{comp} [gon]	angolo di direzione comp. [gon]	lati [m]	$l \sin \theta$	$l \cos \theta$	X [m]	Y [m]	$l \sin \theta$ comp.	$l \cos \theta$ comp.	Xcomp [m]	Ycomp [m]
A												61,83	15,25
P ₁	170,3954											227,71	60,61
P ₂	180,1436				68,84								
P ₃	192,5562				61,50								
P ₄	76,8527				44,51								
P ₅	174,8563				28,94								
P ₆	245,9153				31,68								
P ₇	324,1433				83,28								
												191,24	221,42
B												308,47	346,78

$\epsilon_{\alpha} =$
 $t_{\alpha} =$
 $\Delta_{\alpha} =$

$\epsilon_X =$
 $\epsilon_Y =$
 $\epsilon_l =$
 $t_l =$
 $\Delta_X =$
 $\Delta_Y =$

Dal punto di vista del calcolo e della compensazione la poligonale chiusa è un caso particolare di una poligonale aperta in cui l'ultimo vertice coincide con il primo vedi Fig. 10. Le procedure di compensazione empirica illustrate per la poligonale aperta vincolata agli estremi si semplificano. La condizione a cui devono soddisfare gli angoli misurati α_i deriva immediatamente dalla relazione che lega la somma degli angoli interni di un poligono di n lati:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2) \cdot 200^{gon} = 0$$

L'errore di chiusura angolare ϵ_a si ottiene quindi immediatamente:

$$\epsilon_a = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2) \cdot 200^{gon}$$

Che dovrà essere distribuito, in parti uguali, cambiato di segno fra tutti gli angoli misurati se, ovviamente è inferiore alla tolleranza.

Assunto un sistema di riferimento con l'origine coincidente con il punto P1 e l'asse X coincidente con il lato P1P2 si conoscerà immediatamente il primo angolo di direzione $(P1P2) = 100^{gon}$.

Dato che $X_n = X_1$ e $Y_n = Y_1$ si dovranno verificare anche le seguenti condizioni:

$$\sum_{i=1}^n l_i \text{sen}(P_i P_{i+1}) = 0 \quad \sum_{i=1}^n l_i \text{cos}(P_i P_{i+1}) = 0$$

Le componenti ΔX e ΔY dell'errore di chiusura laterale ϵ_1 saranno quindi:

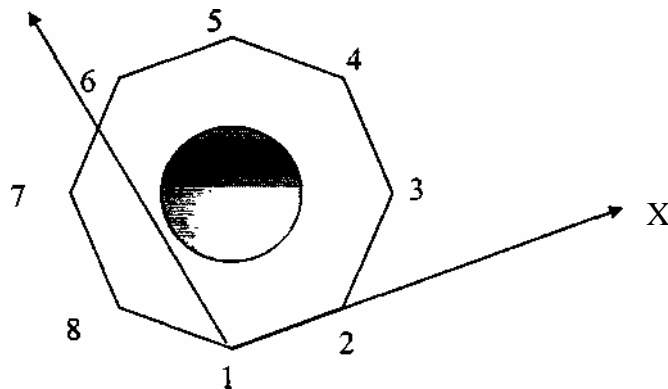
$$\Delta_X = \sum_{i=1}^n l_i \text{sen}(P_i P_{i+1}) \quad \Delta_Y = \sum_{i=1}^n l_i \text{cos}(P_i P_{i+1})$$

In analogia a quanto illustrato per le poligonali aperte vincolate agli estremi si dovrà verificare che l'errore di chiusura laterale ϵ_1 sia inferiore alla tolleranza t_l . La correzione $-\Delta x$ si distribuirà su tutte le proiezioni dei lati, mentre la correzione $-\Delta y$ si distribuirà su tutte le proiezioni tranne che sulla prima, allo scopo di mantenere il punto P2 sull'asse delle ascisse. Il criterio di distribuzione dell'errore di chiusura laterale è lo stesso applicato per le poligonali aperte vincolate agli estremi.

Esempio di calcolo e di compensazione di una poligonale chiusa:

per il rilievo del battistero di PISA si sono materializzate 8 stazioni per il rilievo di dettaglio e si sono eseguite le misure necessarie per la determinazione delle loro coordinate.

Il sistema di riferimento scelto ha origine nel punto 1, asse delle X coincidente con il lato 1-2 e orientato positivamente procedendo dal punto 1 al punto 2.



ver tice	angoli misurati	angoli compensati	angoli di direzione	lati	coordinate parziali		coordinate parziali compensate		coordinate totali	
	[gon]	[gon]	[gon]	[m]	$l_i \sin \vartheta_i$	$l_i \cos \vartheta_i$	x [m]	y [m]	X [m]	Y [m]
1			100,0000		0,0	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
				44,555						
2	149,1385	149,138675	49,138675		44,555	0,0	44,5542	0,0	44,55	0,00
				43,460						
3	151,6144	151,614575	0,75325		30,3123	31,1438	30,3115	31,1526	74,87	31,15
				43,800						
4	150,0357	150,035875	350,789125		0,5182	43,7969	0,5174	43,8057	75,38	74,96
				44,560						
5	150,1036	150,103775	300,8929		- 31,1157	31,8968	-31,1165	31,9056	44,27	106,86
				44,290						
6	149,0740	149,074175	249,967075		- 44,2856	0,6212	- 44,2864	0,6300	0,02	107,49
				44,530						
7	150,02395	150,024125	199,9912		- 31,4712	- 31,5037	- 31,4720	- 31,4949	- 31,49	76,00
				44,560						
8	149,9777	149,977875	149,969075		0,0062	- 44,5600	0,0054	- 44,5512	- 31,49	31,45
				44,508						
1	150,03075	150,030925	100,0000		31,4872	- 31,4566	31,4864	- 31,4478	0,00	0,00
Σ	1199,9986	1200,000000		354,263	0,0064	-0,0616	0,0	0,0		
	1200,0000				ϵ_x	ϵ_y				

$$\epsilon_\alpha = 1199,9986 - 1200 = - 0,0014^{\text{gon}}$$

$$\epsilon_l = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2} = \sqrt{0,0064^2 + 0,0616^2} = 0,062 \text{ m}$$

esempio di poligonale chiusa da calcolare:

Esercitazioni di TOPOGRAFIA

ver tice	angoli misurati	angoli compensati	angoli di direzione	lati	coordinate parziali		coordinate parziali compensate		coordinate totali	
	[gon]	[gon]	[gon]	[m]	$l_i \sin \vartheta_i$	$l_i \cos \vartheta_i$	x [m]	y [m]	X [m]	Y [m]
1			100,0000		0,0	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
				495,12						
2	199,5644									
				695,05						
3	62,0037									
				459,87						
4	131,7645									
				524,94						
5	234,7485									
				568,44						
6	60,1070									
				581,24						
1	111,8135								0,00	0,00
$\Sigma\alpha$										
					ϵ_x	ϵ_y	ϵ_x	ϵ_y		

$\epsilon_\alpha =$
 tolleranza $\alpha =$
 $\Delta_\alpha =$

$\epsilon_l =$
 tolleranza l =
 $\Delta_x =$
 $\Delta_y =$

1.3 TRASFORMAZIONI PIANE

Si definisce trasformazione piana un qualsiasi modello matematico che consenta di trasformare le coordinate di un punto, definite in un sistema di riferimento iniziale $R[O_i, X_i, Y_i]$, nelle coordinate del medesimo punto definite in un secondo sistema di riferimento finale $R_f[O_f, X_f, Y_f]$.

Una generica trasformazione piana è definita da due equazioni che dipendono da una serie di parametri.

Siano X_i, Y_i , le coordinate di un punto nel sistema iniziale e X_f, Y_f le coordinate del medesimo punto nel sistema finale. Siano a_1, a_2, \dots, a_n i parametri della trasformazione piana. Le equazioni fondamentali di una generica trasformazione piana si possono indicare nel seguente modo:

$$\begin{aligned} X_f &= f(a_1, a_2, \dots, a_n / X_i, Y_i) \\ Y_f &= g(a_1, a_2, \dots, a_n / X_i, Y_i) \end{aligned} \quad (8)$$

Il numero dei parametri e la forma delle equazioni che definiscono la trasformazione, dipendono dalle differenze tra gli elementi caratterizzanti i due sistemi di riferimento in gioco (origine, orientamento degli assi, unità di misura, ecc.)

Nel seguito accenneremo brevemente ad alcune trasformazioni piane tra sistemi di riferimento cartesiani correntemente usate in topografia.

1.3.1 - Traslazione rigida

Consideriamo il caso in cui i due sistemi di riferimento, iniziale e finale, hanno gli assi tra loro paralleli ma origini diverse. Note le coordinate di un generico punto P nel sistema di riferimento iniziale, vogliamo determinare le sue coordinate nel sistema di riferimento finale.

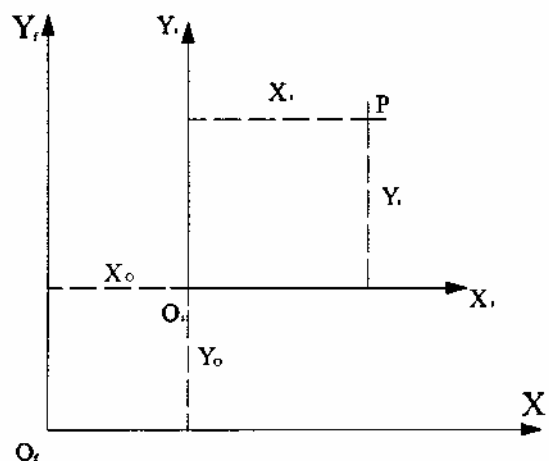


Figura 11 - Traslazione rigida

Dalla fig. 11 si ottengono le seguenti relazioni:

$$X_f = X_i + X_0 \quad Y_f = Y_i + Y_0 \quad (9)$$

Le (9) rappresentano le equazioni fondamentali di questa particolare trasformazione piana chiamata traslazione rigida. I parametri di questa trasformazione sono 2 e rappresentano le coordinate dell'origine del sistema iniziale definite nel sistema di riferimento finale.

A partire dalle (9) è altresì semplice ricavare le equazioni della trasformazione piana inversa, cioè quella che consente di passare dal sistema finale al sistema iniziale:

$$X_i = X_f - X_0 \qquad Y_i = Y_f - Y_0 \qquad (10)$$

Se di un punto si conoscono le coordinate in entrambe i sistemi di riferimento è possibile determinare i valori dei parametri della trasformazione risolvendo il sistema formato dalle due equazioni (9) o (10) nelle due incognite X_0, Y_0 . A questo punto, di tutti i punti di cui si conoscono le coordinate in uno solo dei due sistemi di riferimenti considerati, è possibile, sempre utilizzando le (9) o le (10), determinare le coordinate incognite nel secondo sistema di riferimento.

1.3.2 - Rotazione rigida

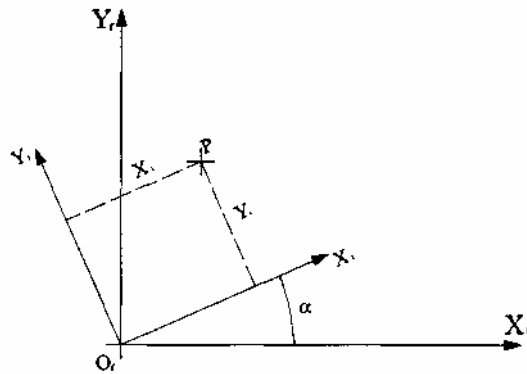


Figura 12 - Rotazione rigida

Consideriamo adesso il sistema iniziale e il sistema iniziale rappresentati in fig. 12: essi hanno origine in comune ma gli assi ruotati di un angolo di ampiezza α (consideriamo positive le rotazioni orarie). Per trasformare le coordinate X_i, Y_i del punto P nelle sue coordinate X_f, Y_f si usano le seguenti relazioni (facilmente desumibili osservando la fig. 12).

$$X_f = (X_i - Y_i \cdot \tan \alpha) \cdot \cos \alpha = X_i \cdot \cos \alpha - Y_i \cdot \sin \alpha \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} Y_f &= \frac{Y_i}{\cos \alpha} + X_f \cdot \tan \alpha = \\ &= \frac{Y_i}{\cos \alpha} + X_i \cdot \sin \alpha - Y_i \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= X_i \cdot \sin \alpha + Y_i \left(\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) = \\ &= X_i \cdot \sin \alpha + Y_i \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Questa trasformazione piana dipende quindi dal solo parametro α .

Per ricavare le equazioni della trasformazione inversa scriviamo le (11) in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \quad (12)$$

La matrice \mathbf{R} si chiama matrice di rotazione e, come si può facilmente verificare, è una matrice ortogonale. È noto che una delle proprietà delle matrici ortogonali consiste nell'identità tra la matrice inversa e la matrice trasposta, ossia:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

Quindi la trasformazione inversa può essere scritta nella forma:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} = \mathbf{R}^T \cdot \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} \quad (13)$$

Se di un punto si conoscono le coordinate in entrambi i sistemi, è possibile determinare il valore del parametro della trasformazione, α , risolvendo il sistema formato dalle due equazioni (11) e ricavando l'espressione risolutiva per la quantità $\sin \alpha$ e quindi ricavando il valore dell'angolo cercato. Ricavando dalla prima equazione il valore di $\sin \alpha$ (o di $\cos \alpha$) e sostituendo tale valore nella seconda equazione si ottengono rispettivamente le seguenti soluzioni:

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{Y_f X_i - Y_i X_f}{X_i^2 + Y_i^2} \right) = \arccos \left(\frac{Y_f Y_i - X_i X_f}{X_i^2 + Y_i^2} \right) \quad (14)$$

Analoga soluzione si può ottenere risolvendo il sistema (12) o (13) considerando le due incognite:

$$\mathbf{a} = \sin \alpha \quad \mathbf{b} = \cos \alpha$$

Riscriviamo il sistema (12) considerando le due nuove incognite:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b} & -\mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -Y_i & X_i \\ X_i & Y_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix}$$

La soluzione del problema darà fornita dalla seguente relazione:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y_i & X_i \\ X_i & Y_i \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix}$$

IL valore dell'angolo α si otterrà dalla seguente espressione:

$$\alpha = \arctan \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

1.3.3 - Rototraslazione rigida

La trasformazione piana definita rototraslazione rigida consiste nella sommatoria degli effetti delle due trasformazioni piane appena viste. Consideriamo quindi i due sistemi iniziale e finale rappresentati in fig. 13. Sommando le (9) e le (11) in notazione matriciale possiamo definire le equazioni fondamentali di questa trasformazione piana:

$$\begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \quad (15)$$

Questa trasformazione è definita dai tre parametri geometrici \mathbf{a} , X_o , Y_o . Per il calcolo di questi tre parametri è necessario conoscere le coordinate nei due sistemi di due punti P1 e P2 e risolvere il seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} X_{f1} \\ Y_{f1} \\ X_{f2} \\ Y_{f2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y_{i1} & X_{i1} & 1 & 0 \\ X_{i1} & Y_{i1} & 0 & 1 \\ -Y_{i2} & X_{i2} & 1 & 0 \\ X_{i2} & Y_{i2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ X_o \\ Y_o \end{pmatrix}$$

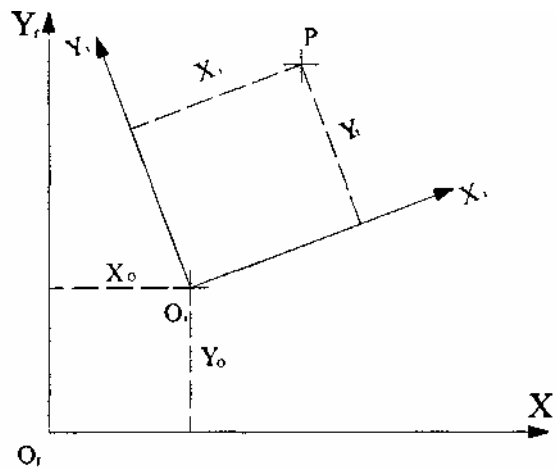


Figura 13 - Rototraslazione rigida

1.3.4 - Rototraslazione con variazione di scala isotropa

Questa trasformazione considera due sistemi, iniziale e finale, che hanno origini diverse, assi ruotati e unità di misura differenti ma uguali sui rispettivi assi delle ascisse e delle ordinate. Le equazioni di questa particolare trasformazione piana derivano dalle (15) dopo aver introdotto un fattore di scala λ , applicato alle coordinate iniziali.

$$\begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \end{pmatrix} + \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \quad (17)$$

I parametri di questa trasformazione piana sono dunque quattro: λ , α , X_0 , Y_0 . Per determinare il loro valore occorre conoscere le coordinate di due punti nei due sistemi di riferimento e quindi risolvere il sistema qui sotto indicato:

$$(18) \quad \begin{pmatrix} X_{f1} \\ Y_{f1} \\ X_{f2} \\ Y_{f2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y_{i1} & X_{i1} & 1 & 0 \\ X_{i1} & Y_{i1} & 0 & 1 \\ -Y_{i2} & X_{i2} & 1 & 0 \\ X_{i2} & Y_{i2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \\ X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

dove $a^* = \lambda \cdot a$, $b^* = \lambda \cdot b$

Ricordando i significati dei termini a e b , per calcolare i valori di α e λ si utilizzano le seguenti relazioni:

$$\alpha = \arctan \frac{a^*}{b^*} \qquad \lambda = \sqrt{(a^*)^2 + (b^*)^2}$$

1.3.5 - Rototraslazione con variazione di scala anisotropa

Se le unità di misura adottate sugli assi dei due sistemi di riferimento sono diverse in entrambi i sistemi, occorrerà introdurre due fattori di scala indipendenti per le ascisse e per le ordinate. In questo caso la trasformazione piana che consente di passare dalle coordinate del sistema iniziale a quelle del sistema finale sono così definite:

$$\begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_x \cdot X_i \\ \lambda_y \cdot Y_i \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Questa trasformazione dipende da cinque parametri: λ_x , λ_y , α , X_0 , Y_0 . La loro determinazione è possibile, se sono note le coordinate nei due sistemi di riferimento di almeno tre punti, risolvendo il seguente sistema:

$$(20) \quad \begin{pmatrix} X_{f1} \\ Y_{f1} \\ X_{f2} \\ Y_{f2} \\ X_{f3} \\ Y_{f3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_{i1} & -Y_{i1} & 0 & 1 & 0 \\ X_{i1} & 0 & 0 & Y_{i1} & 0 & 1 \\ 0 & X_{i2} & -Y_{i2} & 0 & 1 & 1 \\ X_{i2} & 0 & 0 & Y_{i2} & 0 & 1 \\ 0 & X_{i3} & -Y_{i3} & 0 & 1 & 0 \\ X_{i3} & 0 & 0 & Y_{i3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

dove:

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_x \cdot \sin \alpha \\ b_1 &= \lambda_x \cdot \cos \alpha \\ a_2 &= \lambda_y \cdot \sin \alpha \\ b_2 &= \lambda_y \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Il calcolo dei parametri geometrici della trasformazione risulta possibile con le seguenti relazioni:

$$\lambda_x = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\lambda_y = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{a_1}{b_1} = \arctan \frac{a_2}{b_2}$$

1.3.6 - Omografia generale

Questa trasformazione piana mette in relazione due sistemi di riferimento che oltre alle differenze viste nel caso precedente (diverse origini, diverse direzioni degli assi e diverse unità di misura sugli assi corrispondenti) hanno assi di riferimento che formano tra loro angoli non necessariamente retti e che comunque sono diversi da sistema a sistema. La figura 14 rappresenta un possibile esempio del caso generale ora descritto.

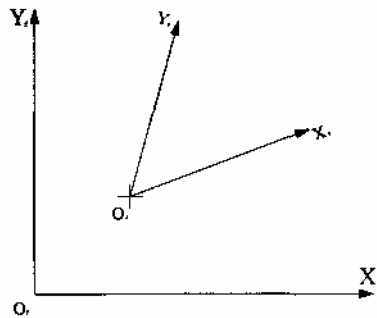


Figura 14 - Sistemi di riferimento iniziale e finale nella trasformazione omografica



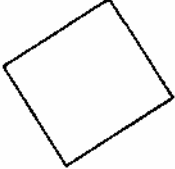

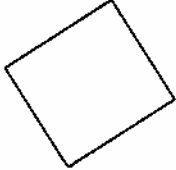

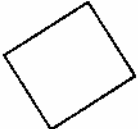
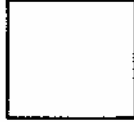



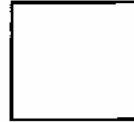
Le equazioni di questa trasformazione sono le seguenti:

$$X_f = \frac{aX_1 + bY_1 + c}{gX_1 + hY_1 + 1} \quad Y_f = \frac{dX_1 + eY_1 + f}{gX_1 + hY_1 + 1} \quad (21)$$

Come si nota dalle (21), i parametri che definiscono questo tipo di trasformazione piana sono 8 per cui, analogamente a quanto visto in precedenza, essi sono determinabili una volta che siano note le coordinate di almeno quattro punti in entrambi i sistemi di riferimento. Il sistema risolvibile non è lineare per cui la ricerca della sua soluzione andrà effettuata con il metodo iterativo descritto nei paragrafi seguenti.

1.3.7 - Considerazioni finali

Nella tabella seguente mediante alcune figure si descrivono gli effetti pratici di tutte le trasformazioni piane considerando di operare su un quadrilatero qualsiasi, definito nel sistema iniziale, volendolo trasformare in un quadrato perfetto nel sistema finale. Al crescere del numero dei parametri che governano le trasformazioni cresceranno le differenze morfologiche e di posizione dei quadrilateri di partenza rispetto al quadrato che si desidera raggiungere.

Trasformazione	Quadrilatero iniziale	Quadrilatero finale
Traslazione		
Rotazione		
Rototraslazione rigida		
Rototraslazione con variazione di scala isotropa		
Trasformazione	Quadrilatero iniziale	Quadrilatero finale
Rototraslazione con variazione di scala anisotropa		
Omografia generale		

ESERCIZI NUMERICI PROPOSTI

Siano date le coordinate di 4 punti espresse in un sistema di riferimento locale:

$$\begin{array}{llll} X'_1 = 120.37 \text{ m} & X'_2 = 215.51 \text{ m} & X'_3 = 150.14 \text{ m} & X'_4 = 392.12 \text{ m} \\ Y'_1 = 85.95 \text{ m} & Y'_2 = 321.07 \text{ m} & Y'_3 = 412.30 \text{ m} & Y'_4 = 49.75 \text{ m} \end{array}$$

Le coordinate dei punti 1 e 2 sono pure note in un sistema di riferimento globale

$$\begin{array}{ll} X_1 = 1214.17 \text{ m} & X_2 = 1338.59 \text{ m} \\ Y_1 = 1417.61 \text{ m} & Y_2 = 1638.56 \text{ m} \end{array}$$

Si vogliono ricavare i parametri della trasformazione da sistema locale a globale e le coordinate dei punti 3, 4 nel sistema globale. Il sistema può essere scritto nella forma estesa:

$$\begin{array}{l} X_0 + 120.37 a + 85.95 b - 1214.17 = 0 \\ Y_0 + 85.95 a - 120.37 b - 1417.61 = 0 \\ X_0 + 215.51 a + 321.07 b - 1338.59 = 0 \\ Y_0 + 321.07 a - 215.51 b - 1638.56 = 0 \end{array}$$

e in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 120.37 & 85.95 \\ 0 & 1 & 85.95 & -120.37 \\ 1 & 0 & 215.51 & 321.07 \\ 0 & 1 & 321.07 & -215.51 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1214.17 \\ 1417.61 \\ 1338.59 \\ 1638.56 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema avviene una volta invertita la matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4921 & 0.3128 & -0.4921 & -0.3128 \\ -0.3128 & 1.4921 & 0.3128 & -0.4921 \\ -0.0015 & -0.0036 & 0.0015 & 0.0037 \\ -0.0036 & 0.0015 & 0.0037 & -0.0015 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1214.17 \\ 1417.61 \\ 1338.59 \\ 1638.56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1083.82 \\ 1347.79 \\ 0.991514 \\ 0.127966 \end{pmatrix}$$

da cui sono ricavabili i valori di

$$\lambda = 0.999737$$

$$\alpha = 8.1711 \text{ gon}$$

Le coordinate dei punti 3 e 4 nel sistema globale sono ricavabili dalle:

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1083.82 \\ 1347.79 \end{pmatrix} + 0.999737 \begin{bmatrix} \cos 8.1711 & \sin 8.1711 \\ -\sin 8.1711 & \cos 8.1711 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 150.14 \\ 412.30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1285.45 \\ 1737.38 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$X_4 = 1478.98 \text{ m}$$

$$Y_4 = 1346.94 \text{ m}$$

1.4. SISTEMI DI RIFERIMENTO SPAZIALI

Fino ad ora abbiamo considerato il problema del posizionamento di una serie di punti appartenenti ad un unico piano. Quando i punti considerati non appartengono ad un unico piano per definirne le posizioni è necessario utilizzare dei sistemi di riferimento tridimensionali.

Risulta ovviamente possibile definire in molti modi un sistema di riferimento spaziale; nel seguito descriveremo brevemente il sistema cartesiano tridimensionale e il sistema sferico. Altri sistemi di riferimento tridimensionali verranno introdotti durante le lezioni di geodesia e cartografia.

Il riferimento cartesiano tridimensionale è definito da una terna di rette tra loro ortogonali, sulle quali si fissa un riferimento cartesiano, scegliendo il punto O, comune alle tre rette, come origine, e i tre punti unità O₁, O₂ e O₃ in modo tale che:

$$\overline{OO_1} = \overline{OO_2} = \overline{OO_3}$$

Indicheremo, d'ora in poi, tale riferimento con la notazione R[O.XYZ].

Fissato un riferimento ortonormale, si può identificare ogni punto P con le sue coordinate X_p, Y_p, Z_p. Se P₀ è la proiezione del punto P eseguita sul piano [XY] lungo la direzione Z e P₁ e P₂ sono le proiezioni ortogonali di PO sugli assi X e Y, le coordinate X_p e Y_p sono le lunghezze con segno dei segmenti OP₁ e OP₂, mentre la coordinata Z_p è la distanza tra P e P₀.

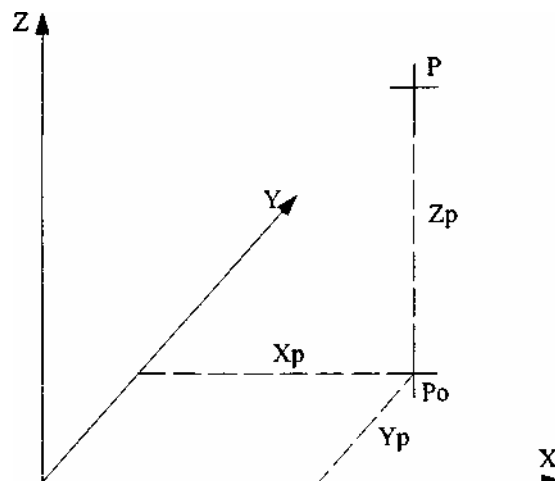


Figura 15 - Sistema di riferimento cartesiano tridimensionale

IL riferimento sferico è definito da un punto O, detto polo, da un piano a, da una semiretta di origine OO₁, detta asse polare e appartenente al piano a, da un'unità di misura OO₁, da un verso positivo per le rotazioni sul piano a (in topografia tradizionalmente si considera positivo il senso orario) e da una semiretta OO₂ perpendicolare al piano a.

Consideriamo un punto P nello spazio e la sua proiezione PO sul piano a. Si possono individuare le seguenti grandezze reali:

- il raggio vettore σ_P coincidente con la lunghezza del segmento OP;
- l'anomalia ϑ_P coincidente con la rotazione oraria che sovrappone l'asse polare alla semiretta OP₀;
- la rotazione oraria φ_P che sovrappone la semiretta OO₂ alla semiretta OP.

Le quantità σ_P , ϑ_P , φ_P rappresentano le coordinate sferiche del punto P.

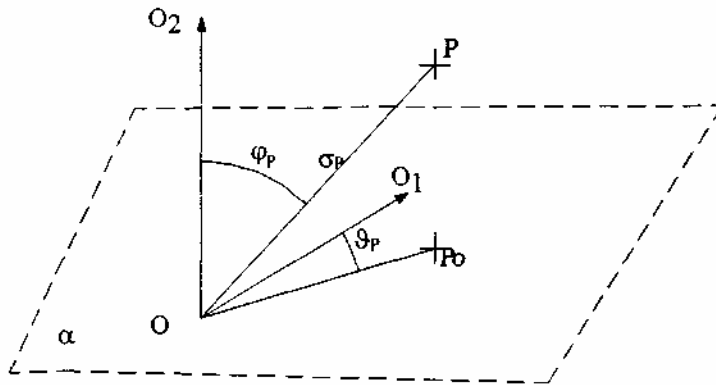


Figura 16 - Sistema di riferimento sferico

Analogamente a quanto abbiamo visto nel caso piano, consideriamo i due riferimenti ora definiti in modo tale che le origini coincidano, che l'asse OO_2 coincida con l'asse Z del riferimento cartesiano e con l'asse OO coincidente con l'asse delle Y del sistema cartesiano. Cerchiamo ora di definire le formule che consentono di trasformare le coordinate sferiche del punto P nelle relative coordinate cartesiane. Risulta:

$$\begin{aligned} X_P &= \sigma_P \cdot \text{sen } \varphi_P \cdot \text{sen } \vartheta_P \\ Y_P &= \sigma_P \cdot \text{sen } \varphi_P \cdot \text{cos } \vartheta_P \\ Z_P &= \sigma_P \cdot \text{cos } \varphi_P \end{aligned} \quad (22)$$

Risulta evidente che le prime due relazioni delle (22) coincidono con le prime due relazioni delle (1). Infatti il segmento OP_0 ($= \sigma_P \cdot \text{sen } \varphi_P$) rappresenta il raggio vettore del punto P_0 nel sistema polare piano associato al sistema cartesiano piano $[R.OXY]$.

Si possono definire in modo analogo le relazioni inverse che consentono di trasformare le coordinate cartesiane del punto P nelle sue coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \sqrt{X_P^2 + Y_P^2 + Z_P^2} \\ \varphi_P &= \arccos \frac{Z_P}{\sigma_P} \\ \vartheta_P &= \arctan \frac{X_P}{Y_P} \end{aligned} \quad (23)$$

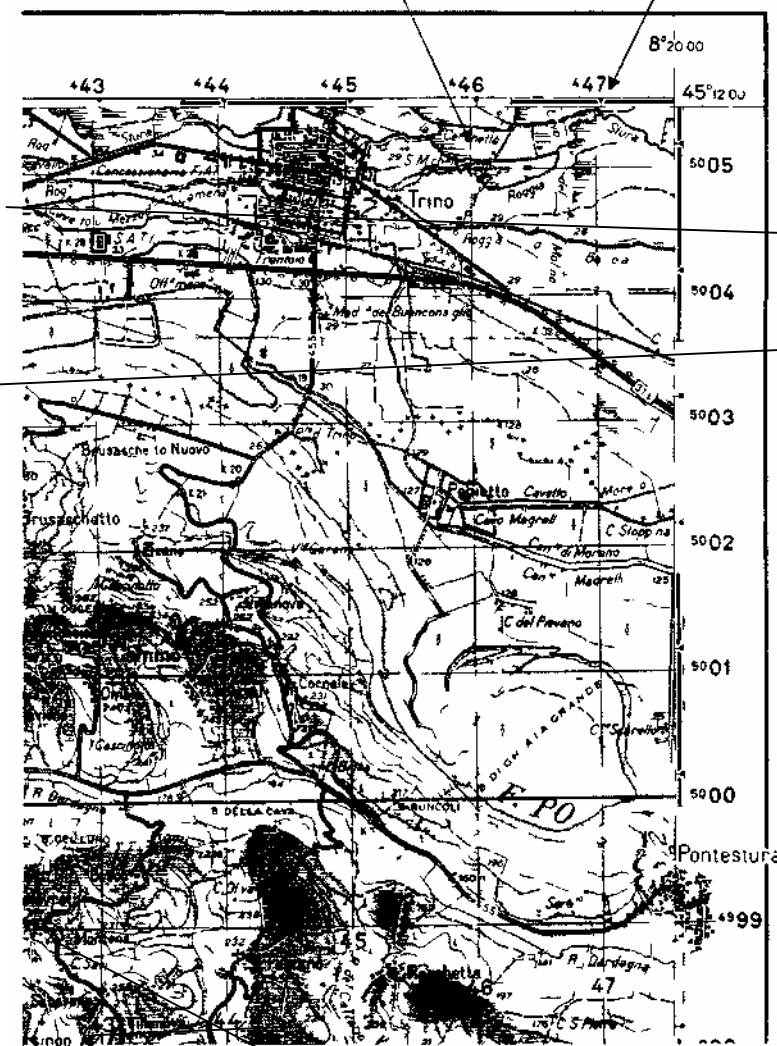
Il calcolo della coordinata φ_P non richiede particolari accorgimenti, mentre per il calcolo dell'anomalia si seguono le medesime procedure indicate al paragrafo 1.2.1 del presente capitolo.

1.5. ESEMPI DI CARTOGRAFIA NAZIONALE

Tutto il territorio nazionale è suddiviso in 636 fogli in scala 1:50000
 La carta è in corso di allestimento.
 E' inquadrata nel sistema UTM - ED50.
 Deriva dai rilievi in scala 1:25000 (per sfolgimento e riduzione)
 E' stampata a 6 o 3 colori con l'orografia a sfumo o curve di livello

reticolato Gauss – boaga (non disegnato)

reticolato UTM



FOLGIO N° 157-TRINO
 SERIE M792 FOLGIONI 32 8 a 1 EDIZIONE 1 GM

PROIEZIONE CONFORME UNIVERSALE TRASVERSA
 DI MERCATORE (UTM)
 LE COORDINATE GEOGRAFICHE SONO RIFERITE ALL'ELIPSOIDE INTERNAZIONALE CON ORIENTAMENTO MEDIO EUROPEO E AL 1950
 LONGITUDINE DI ROMA (M. MARCO) DA GREENWICH 27° 2' 30"
 LATITUDINE DI ROMA (M. MARCO) 43° 53' 49"

QUADRETTATURA CHILOMETRICA GAUSS BOAGA

PER TRACCIARE LA QUADRETTATURA
 in base a valori di coordinate dei vertici di un triangolo conosciuti lungo i margini
 FUSO OVEST FUSO EST

corrispondenti valori chilometrici alle 1° e 2° linee da Sud verso Nord e da Ovest verso Est. Tracciare le linee E-O e N-S collegando i corrispondenti valori di egual valore (o per avere lo stesso valore chilometrico)

VALORI IN METRI DEL E COORDINATE DEI VERTICI DELL'ELEMENTO
 e di altri punti della carta in base al sistema di riferimento

VERTICE	FUSO OVEST	N	E	FUSO EST	N
N O	421801	5005168			
N E	427582	5005298			
S O	42126	4983350			
S E	427390	4983078			

QUADRETTATURA CHILOMETRICA UTM

DESIGNAZIONE DI ZONA 32T

DELLA CARTA IN QUADRE
 D'INTELLIGIBILITÀ

MR	3000	3000000
MQ		

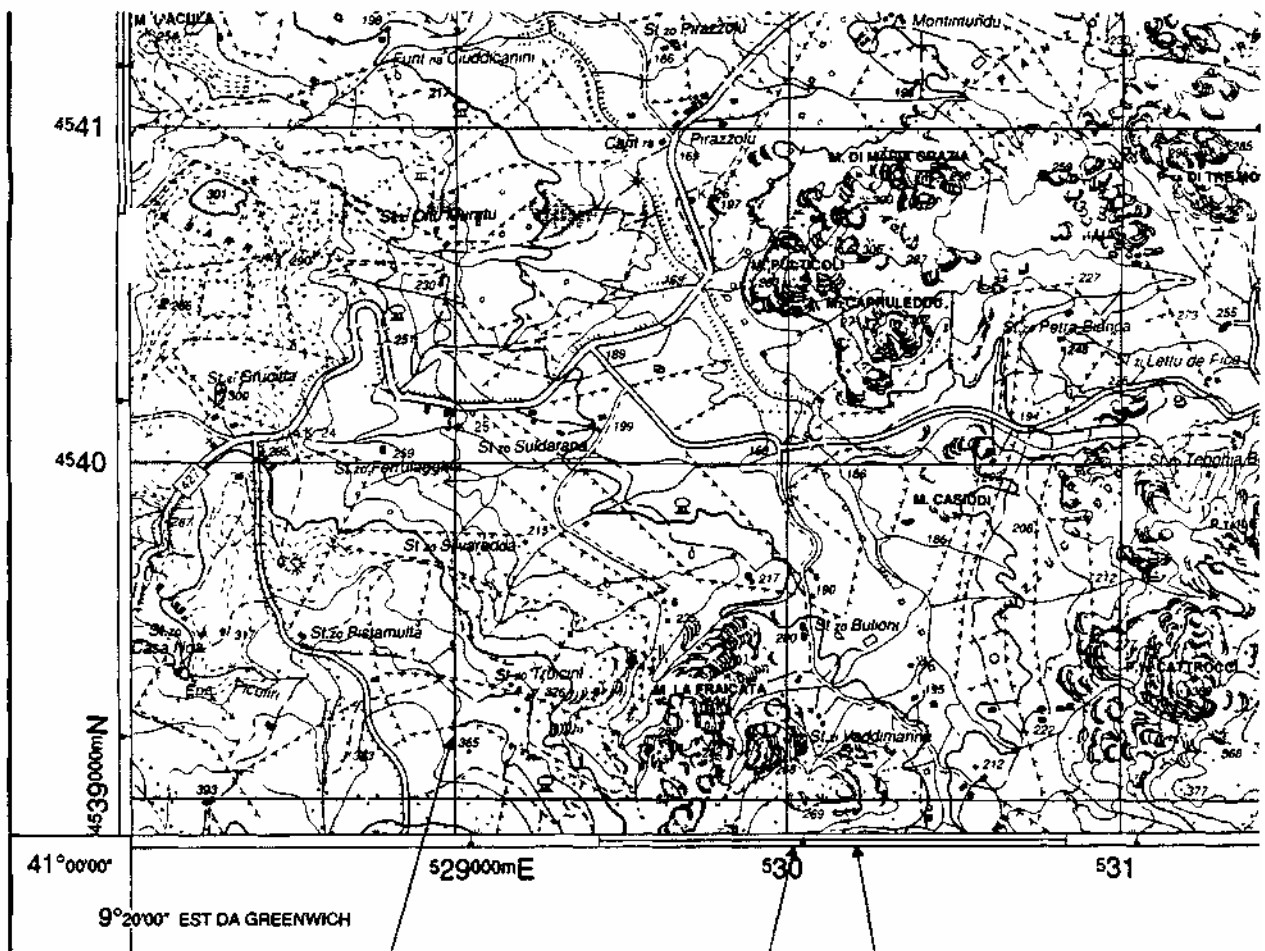
VALORI CHILOMETRICI IN QUADRE ISOLATE RIFERITI ALLA QUADRETTATURA UTM
 PLANI E TAGLIE RIFERITI AL GRADUATO

ESEMPIO DI DESIGNAZIONE DI UN PUNTO
 (SOPRASTAMPAZIONE 1:50000)
 EXAMPLE OF A STAMP-REFERENCING
 ON THE 1:50000 MAP

NOME DEL PUNTO
 STAMP-POINT BRIC CASTELLO 42

È il numero che identifica il punto di riferimento in base al sistema di riferimento UTM. Il numero è sempre uguale a quello trovato sulla carta. Il numero è sempre uguale a quello trovato sulla carta.

Tutto il territorio nazionale è suddiviso in 2298 sezioni m scala 1:25.000).
 La carta è in corso di allestimento.
 E' inquadrata nel sistema UTM - ED50.
 Deriva da restituzione fotogrammetrica.
 E' stampata a 4 colori con l'orografia a sfumo o curve di livello.



ISTITUTO GEOGRAFICO MILITARE

Carta ufficiale dello Stato (Legge n°68 del 2-2-1960) © Copyright - IGMI Firenze - 1994 - Edizione 1
 Tutti i diritti di riproduzione e di rielaborazione totale o parziale sotto qualunque forma riservati.

reticolato UTM

reticolato geografico

reticolato Gauss - Boaga

FOGLIO N° 428 SEZ. III - ARZACHENA
SERIE 25 - EDIZIONE 1 - IGMI

**PROIEZIONE CONFORME UNIVERSALE TRASVERSA
DI MERCATORE (U T M)**

LE COORDINATE GEOGRAFICHE SONO RIFERITE ALL'ELLISSOIDE
INTERNAZIONALE CON ORIENTAMENTO MEDIO EUROPEO (ED 1959)
LONGITUDINE DI ROMA (M. MARIO), DA GREENWICH: 12°27'10",83
LATITUDINE DI ROMA (M. MARIO): 41°55'31",49

QUADRETTATURA CHILOMETRICA GAUSS - BOAGA

VALORI IN METRI DELLE COORDINATE DEI VERTICI DELL'ELEMENTO:
(Le cifre più grandi indicano le decine e le unità chilometriche)

VERTICE	FUSO OVEST		FUSO EST	
	E	N	E	N
N.O.	1527842	4549808		
N.E.	1541938	4549674		
S.O.	1527984	4538707		
S.E.	1542002	4538773		

TRACCIAMENTO DELLA QUADRETTATURA CHILOMETRICA GAUSS - BOAGA
In base ai valori delle coordinate dei vertici, attribuire ai contrassegni lungo i margini
FUSO OVEST → ← FUSO EST

i corrispondenti valori chilometrici (non i valori aumentati da sud verso nord e da ovest verso est) ad
unire i contrassegni di ugual tipo e valore sia in direzione S - N che O - E.

DATI DI ORIENTAMENTO PER IL CENTRO DELLA CARTA

FUSO 32

$\gamma = \begin{cases} 0''16 \\ 4''8 \end{cases}$

N = Nord geografico
Nm = Nord magnetico
Nq = Nord quadrettatura
 δ = Declinazione magnetica
 γ = Convergenza

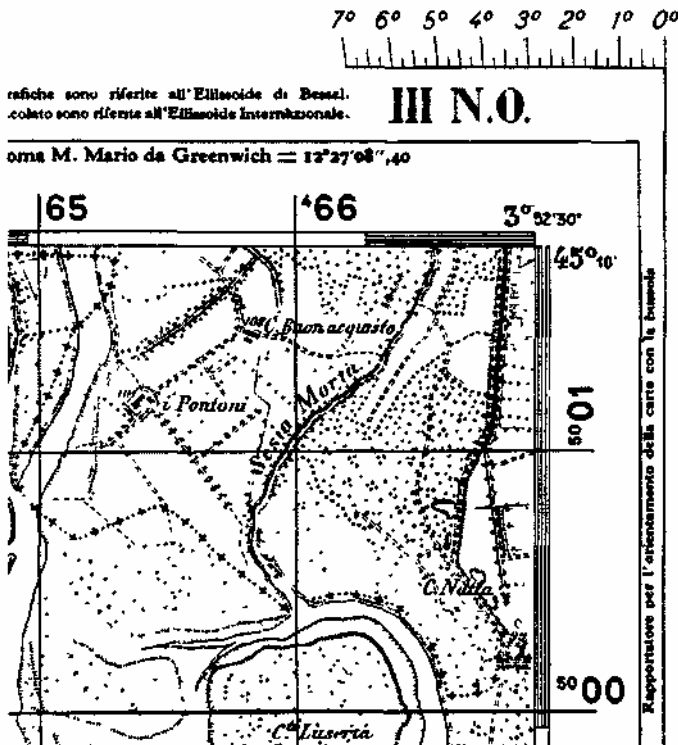
Nel grafico sono tracciate le linee di
egual declinazione intervallate di 5';
le eventuali zone di anomalia
magnetica sono rappresentate con
tratteggi.

Declinazione magnetica nel centro della carta al 1° gennaio 1985: $\delta = -0°55' = -16''3$
Il valore della declinazione varia annualmente di circa $+7'00'' = +2''1$

Per determinare la direzione del Nord magnetico si traccia il punto "P" al centro del lato sud della carta con
il tratto graduato, ubicato sul lato nord, corrispondente al valore della declinazione magnetica
precedentemente calcolato.

**MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE
PER DISTANZE CALCOLATE TRA PUNTI CONTENUTI NELLA SEZIONE:**
 $m = 0,99982$

Tutto il territorio nazionale è suddiviso in 3545 tavolette in scala 1:25.000 (serie V)
 La carta è tutta pubblicata.
 E' inquadrata nel sistema Gauss - Boaga e reticolato chilometrico UTM.
 Deriva in parte da restituzione fotogrammetrica.
 E' stampata in diverse versioni da 1 a 5 colori.

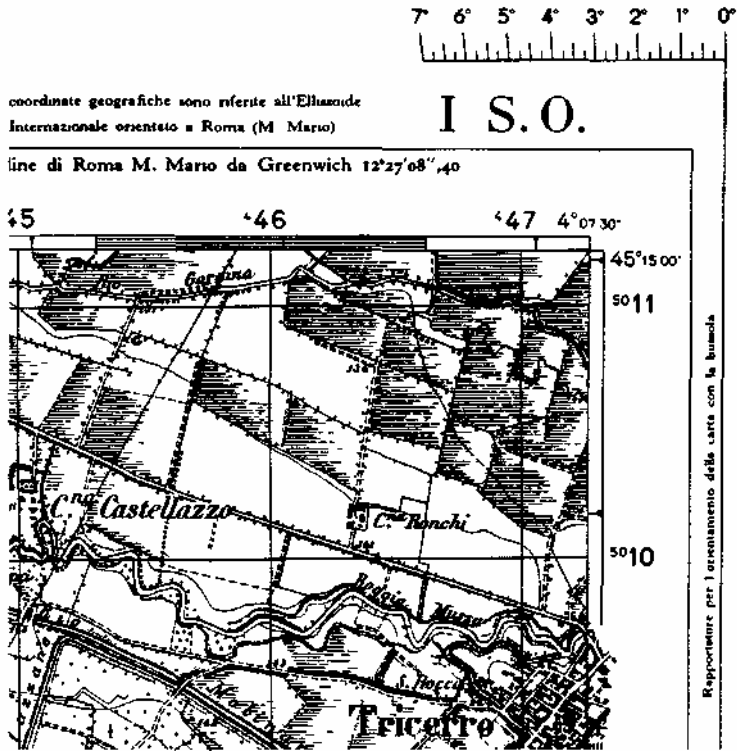


SERIE M 891
 FOGLIO TICINETO 58 III NO
 EDIZIONE 3 - I G M I

RETICOLATO CHILOMETRICO
 NELLA PROIEZIONE CONFORME
 UNIVERSALE TRASVERSA DI MERCATORE
Sistema U. T. M.

SOVRAPPOSIZIONE DEI DUE FUSI : 30' (da 0° 30' a
 Roma M. M)
ORIGINE DELLE COORDINATE :
 Coordinate Est : il meridiano centrale del fuso con valore
 venzionale + 500000 m
 „ Nord : l'equatore

La presente carta topografica appartiene alla
ZONA 32 T
 ed ai quadrati di 100 km di lato



SERIE M 891
 FOGLIO TRINO 57 I SO
 EDIZIONE 3 I G M I

RETICOLATO CHILOMETRICO
 NELLA PROIEZIONE CONFORME
 UNIVERSALE TRASVERSA DI MERCATORE
Sistema U. T. M.
 (Dati europei 1950)

LE LINEE CONTRASSEGNAE DA NUMERI NERI INDICANO
 RETICOLATO U T M FUSO 32, ELLISSOIDE INTERNAZION

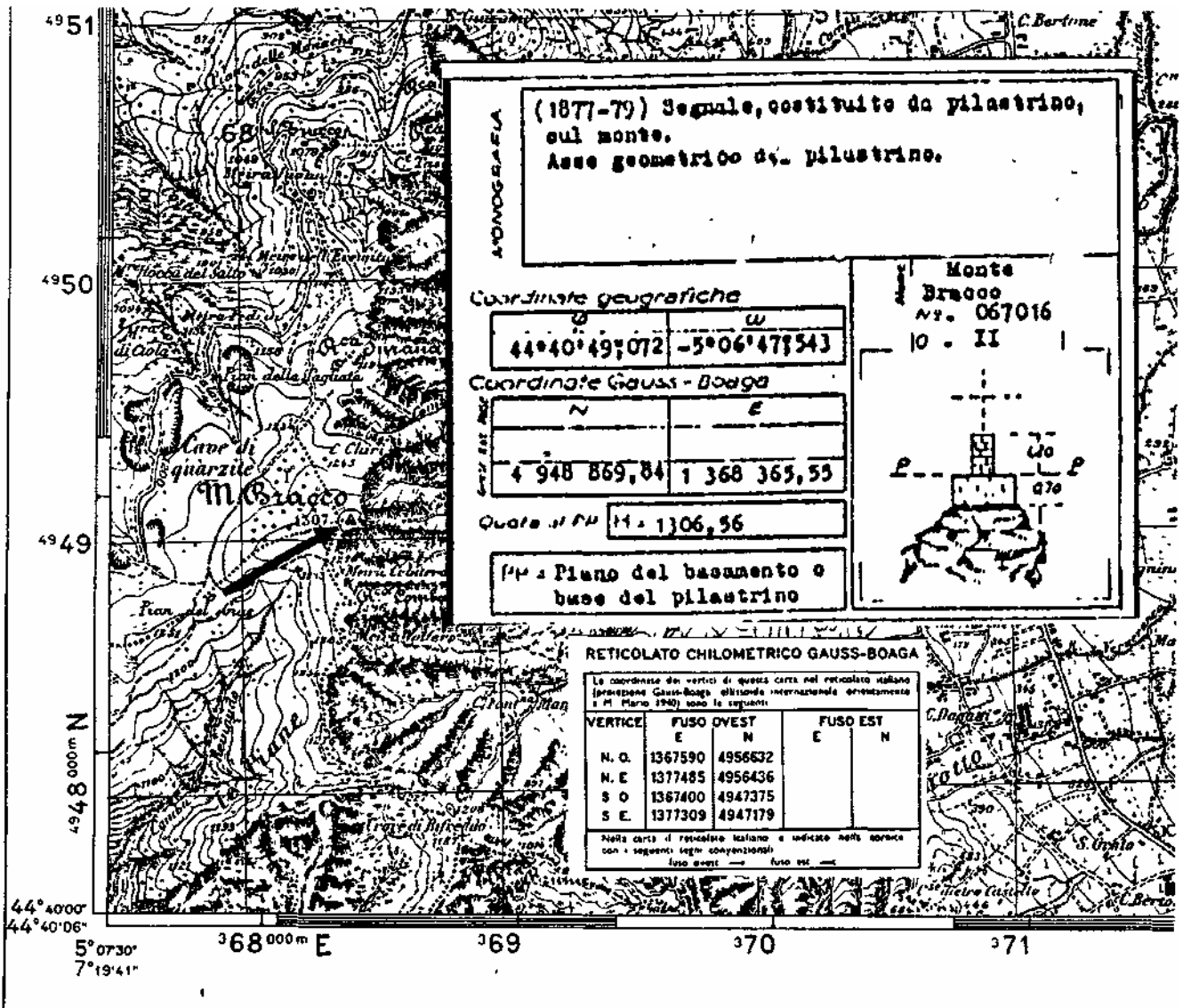
DESIGNAZIONE DI ZONA 32T	ESEMPIO DI DESIGNAZIONE DI UN CON L'APPROSSIMAZIONE DI 100
Identificazione di quadrato di 100 chilometri di lato	NOME DEL PUNTO * C ^{na} GIOIC
	1) Leggere le lettere che identificano il quadrato di 100 chilometri di lato nel quale si trova il punto 2) Leggere il valore del meridiano reticolato immediatamente ad Ovest del
	MR

1.5.1. Esercizi di cartografia

Calcolo del modulo di deformazione lineare (ml) in un punto individuato su una carta disegnata nella proiezione di GAUSS.

Consideriamo un punto particolare rappresentato nella tavoletta 67 II S.E. e precisamente il vertice trigonometrico M. BRACCO (2° ordine).

Le coordinate di questo punto sono misurabili direttamente sulla cartografia o, trattandosi di un vertice trigonometrico, sono note dalla monografia del punto:



Monte BRACCO	coordinate cartografiche e
Nord	4.948.869,84 m
Est	1.368.365,55 m
H	1.306,56 m
φ	44° 40' 49",072
ω	- 5° 06' 47",543

- a) depuro la coordinata Est della falsa origine:
 per il fuso ovest $X = \text{Est} - 1.500.000 \text{ m}$ $= -131.634,45$
 per il fuso est $X = \text{Est} - 2.520.000 \text{ m}$
 la X rappresenta la distanza dal meridiano centrale del fuso

- b) calcolo dei parametri p, N, e R:

$$\begin{aligned} a &= 6.378.388 \text{ m} \\ e^2 &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 0,006722670022 \\ W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = 0,99833676 \\ \rho &= \frac{a(1 - e^2)}{W^3} = 6.367.227,12 \text{ m} \\ N &= \frac{a}{W} = 6.389.014,81 \text{ m} \\ R &= \sqrt{\rho N} = 6.378.111,66 \text{ m} \end{aligned}$$

- c) calcolo del modulo di deformazione lineare m_l

$$m_l = 0,9996 \left(1 + \frac{X^2}{2\rho N 0,9996^2} \right) = 0,999812$$

Viste le approssimazioni introdotte per ricavare la formula indicata sopra, si considera valido il modulo di deformazione lineare ricavato in un intorno non superiore a 10 km.

Il modulo di deformazione lineare può essere calcolato anche utilizzando le coordinate geografiche (latitudine φ e longitudine λ):

$$m_l = 0,9996 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \cos^2 \varphi \right)$$

la longitudine λ deve essere riferita al meridiano centrale del fuso e deve essere espressa in radianti:

$$\begin{aligned} \text{per il fuso ovest} \quad \lambda_{\text{depurata}} &= \lambda_{\text{letta}} + 12^\circ 27' 08'',4 - 9^\circ \\ \text{per il fuso est} \quad \lambda_{\text{depurata}} &= \lambda_{\text{letta}} + 12^\circ 27' 08'',4 - 15^\circ \end{aligned}$$

nell'esempio sarà:

$$\lambda_{\text{depurata}} = -5^\circ 06' 47'',543 + 12^\circ 27' 08'',4 - 9^\circ = -1^\circ 39' 39'',143$$

e quindi:

$$\lambda_{\text{depurata}} = -1^\circ 39' 39'',143 \quad \lambda^{\text{rad}} = -1^\circ,660873056 \frac{\pi}{180} = -0,028987703$$

e quindi:

$$m_l = 0,9996 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \cos^2 \varphi \right) = 0,999812$$

Viste le approssimazioni introdotte per ricavare la formula indicata sopra, si considera valido il modulo di deformazione lineare ricavato in un intorno non superiore a 10 km.

Calcolo del modulo di deformazione lineare m_l di un segmento di retta.

Consideriamo un particolare segmento di retta definito da due vertici trigonometrici: M. Bracco e M. Faglia No.

Le coordinate di questi punti sono misurabili direttamente sulla cartografia o, trattandosi di vertici trigonometrici, sono note dalle monografie dei punti:

Monte BRACCO (2° ordine)	Coordinate cartografiche geografiche	e
Nord	4.948.869,84 m	
Est	1.368.365,55 m	
H	1.306,56 m	
φ	44° 40' 49",072	
λ	- 5° 06' 41",543	

Monte PAGLIANO (1° ordine)	coordinate cartografiche geografiche	e
Nord	4.933.038,81 m	
Est	1.376.791,92 m	
H	988,77 m	
φ	44° 32' 21",594	
λ	- 5° 00' 11",276	

a) calcolo dei parametri ρ e N nel punto medio del segmento M. Bracco - M. Pagliano:

$$\varphi_{\text{medio}} = (\varphi_{\text{BRACCO}} + \varphi_{\text{PAGLIANO}}) / 2 = 44^\circ 36' 35",333$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_{\text{medio}}} = 0,99834084$$

$$\rho_m = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} = 6.367.147,88 \text{ m}$$

$$N_m = \frac{a}{W} = 6.388.988,31 \text{ m}$$

$$R = \sqrt{\rho N} = 6.378.058,75 \text{ m}$$

b) depuro le coordinate Est della falsa origine:

$$\text{Monte Bracco} \quad X = \text{Est} - 1.500.000 \text{ m} \quad = - 131.634,45$$

$$\text{Monte Pagliano} \quad X = \text{Est} - 1.500.000 \text{ m} \quad = - 123.208,08$$

la X rappresenta la distanza dal meridiano centrale del fuso

e) calcolo del modulo di deformazione lineare m_l del segmento M. Bracco - M. Fagliano:

$$m_l = 0,9996 \left(1 + \frac{X_1^2 + X_1 X_2 + X_2^2}{6 \rho_m N_m 0,9996^2} \right) = 0,9997997$$

Calcolo della distanza tra due punti di coordinate note o misurate sulla cartografia.

Consideriamo i due punti noti M. Bracco e M. Fagliano di cui conosciamo già le coordinate:

Monte BRACCO (2° ordine)	coordinate cartografiche	Monte PAGLIANO (1° ordine)	coordinate cartografiche
Nord	4.948.869,84 m	Nord	4.933.038,81 m
Est	1.368.365,55 m	Est	1.376.791,92 m
H	1.306,56 m	H	988,77 m

a) calcolo della distanza cartografica d_c :

$$\Delta_{EST} = EST_{BRACCO} - EST_{PAGLIANO} = - 8.426,37 \text{ m}$$

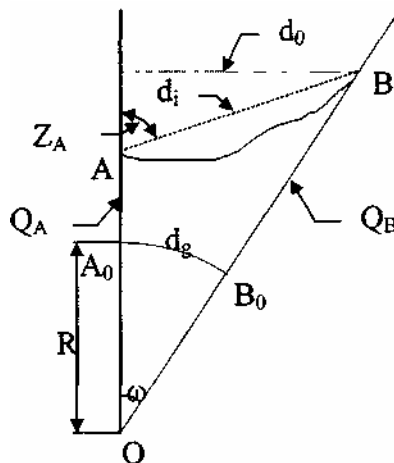
$$\Delta_{NORD} = NORD_{BRACCO} - NORD_{PAGLIANO} = 15.831,03 \text{ m}$$

$$d_c = \sqrt{\Delta_{NOR}^2 + \Delta_{EST}^2} = 17.933,91 \text{ m}$$

b) calcolo della distanza ridotta alla superficie di riferimento d_g

$$d_g = \frac{d_c}{m_f} = \frac{17.933,91}{0,999799} = 17.937,50 \text{ m}$$

e) calcolo della distanza ridotta alla quota di M. Bracco:

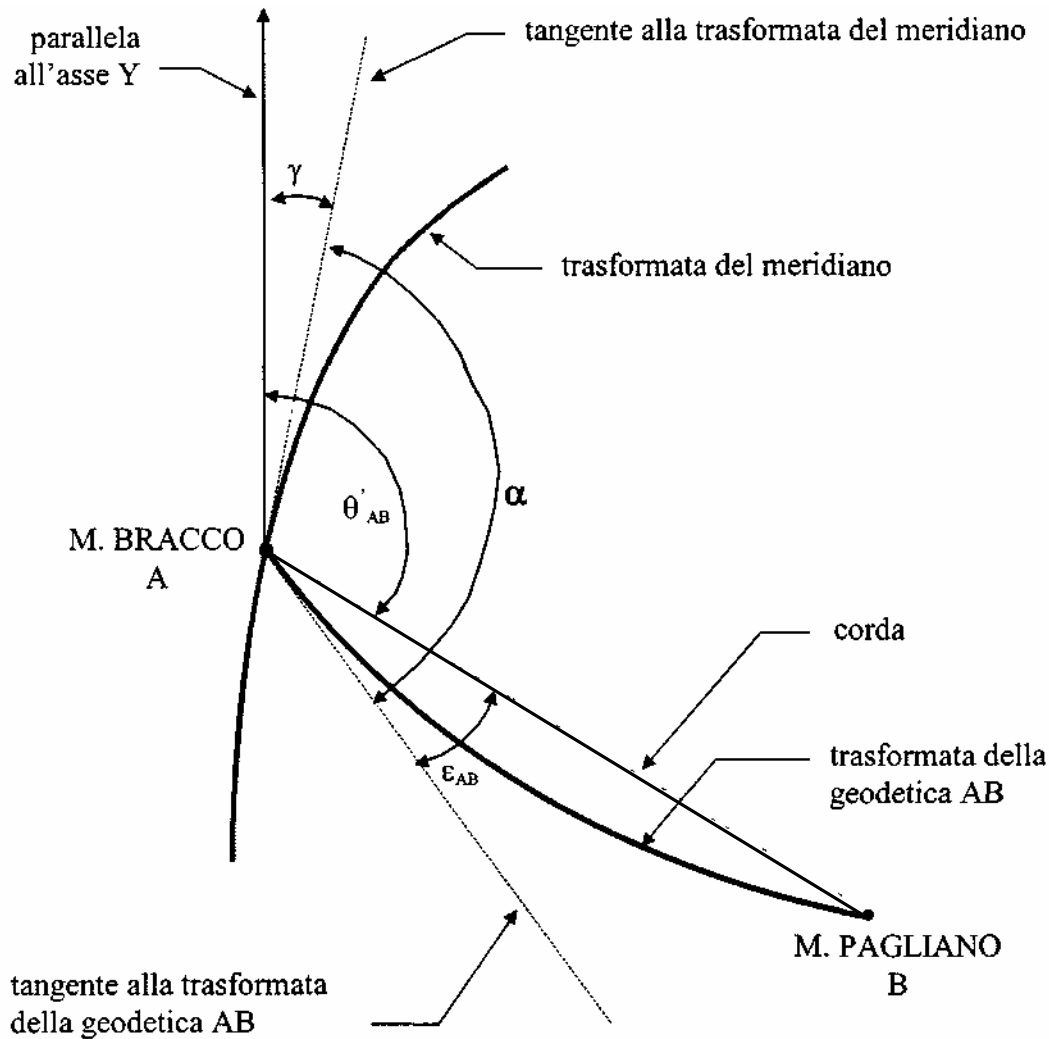


$$d_0 = \frac{d_c}{m_f} = \frac{d_g}{1 - \frac{Q_{BRACCO}}{R}} = \frac{17.937,50}{1 - \frac{1.306,56}{6.378.058,75}} = 17.941,18 \text{ m}$$

d) calcolo della distanza ridotta alla quota di M. Pagliano:

$$d_0 = \frac{d_c}{m_f} = \frac{d_g}{1 - \frac{Q_{PAGLIANO}}{R}} = \frac{17.937,50}{1 - \frac{988,77}{6.378.058,75}} = 17.940,28 \text{ m}$$

Calcolo di un azimut α in un vertice di coordinate note.



Le coordinate dei vertici A (M. Bracco) e B (M. Fagliano) consentono di calcolare l'angolo di direzione α_{AB} riferito al Nord del reticolato chilometrico o asse Y:

$$\theta'_{AB} = \arctg \frac{\text{Est}_B - \text{Est}_A}{\text{Nord}_B - \text{Nord}_A} = \frac{+8.426,37\text{m}}{-15.831,03\text{m}} = 151^\circ,9750014 = 151^\circ 58' 30''$$

La convergenza del meridiano γ nel punto A è dato dalla relazione:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{3} \lambda^2 \cos^2 \varphi \left(1 + 3 \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi \right) \right) \text{ con}$$

λ e φ = latitudine e longitudine
 a = sem. asse maggiore ellissoide
 b = semiasse minore ellissoide

$$\lambda_{\text{depurata}} = -5^\circ 06' 47'',543 + 12^\circ 27' 08'',4 - 9^\circ = -1^\circ 39' 39'',143$$

$$\lambda_{\text{depurata}}^{\text{rad}} = -1^\circ,660873056 \frac{\pi}{180} = -0,028987703$$

$$\varphi = 44^\circ 40' 49'',072$$

$$a = 6.378.388 \text{ m}$$

$$c = 6.356.911,95 \text{ m}$$

$$\gamma = \lambda \operatorname{sen} \varphi \left(1 + \frac{1}{3} \lambda^2 \cos^2 \varphi \left(1 + 3 \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi \right) \right) = -0.020384184^{\text{rad}} = -1^\circ 10' 04'',54$$

Calcolo della riduzione alla corda ϵ_{EAB}

$$\epsilon_{AB} = \frac{(Y_A - Y_B)(2X_A + X_B)}{6\rho_m N_m \cdot 0,9996^2} \quad \text{dove:}$$

$X_A = \text{Est}_{\text{Bracco}} - 1.500.000 \text{ m} =$	$1.368.365,55 - 1.500.000 = -131.634,45 \text{ m}$
$X_B = \text{Est}_{\text{Pagliano}} - 1.500.000 \text{ m} =$	$1.376.791,92 - 1.500.000 = -123.208,08 \text{ m}$
$Y_A = \text{Nord}_{\text{Bracco}} =$	$4.948.869,84 \text{ m}$
$Y_B = \text{Nord}_{\text{Pagliano}} =$	$4.933.038,81 \text{ m}$
$\rho_m = \text{già calcolato}$	$6.367.147,88 \text{ m}$
$N_m = \text{già calcolato}$	$6.388.988,31 \text{ m}$

$$\epsilon_{AB} = -0,000025087^{\text{rad}} = -0^\circ 0' 05'',17$$

e quindi l'azimut α sarà pari a:

$$\alpha = \theta'_{AB} + \gamma - \epsilon_{AB} \text{ (regola generale)}$$

$$\alpha = 151^\circ 58' 30'' - 1^\circ 10' 04'',54 + 0^\circ 0' 05'',17 = 150^\circ 48' 30'',63$$

Conversione di coordinate da GAUSS - BOAGA a UTM

Note le coordinate Gauss-Boaga di M. Bracco determinare le corrispondenti coordinate nel sistema U.T.M.

Monte BRACCO (2° ordine foglio 67)	coordinate cartografiche e geografiche
Nord	4.948.869,84 m
Est	1.368.365,55 m
H	1.306,56 m
φ	44° 40' 49",072
λ	- 5° 06' 41",543

Il cambiamento di "DATUM" (da Gauss-Boaga a UTM), come già detto in precedenza, è avvenuto senza la possibilità di stabilire delle relazioni analitiche definite.

Gli scarti tra i due sistemi di riferimento sono però piccoli e circa costanti all'interno di un foglio in scala 1:100.000.

Queste costanti sono fornite a richiesta dall'IGM per ogni vertice della rete del 1° ordine mentre sono state rese pubbliche, arrotondate al metro, le stesse costanti relative a ciascun foglio in scala 1:100.000 (allegate alle presenti dispense).

Nel nostro esempio:

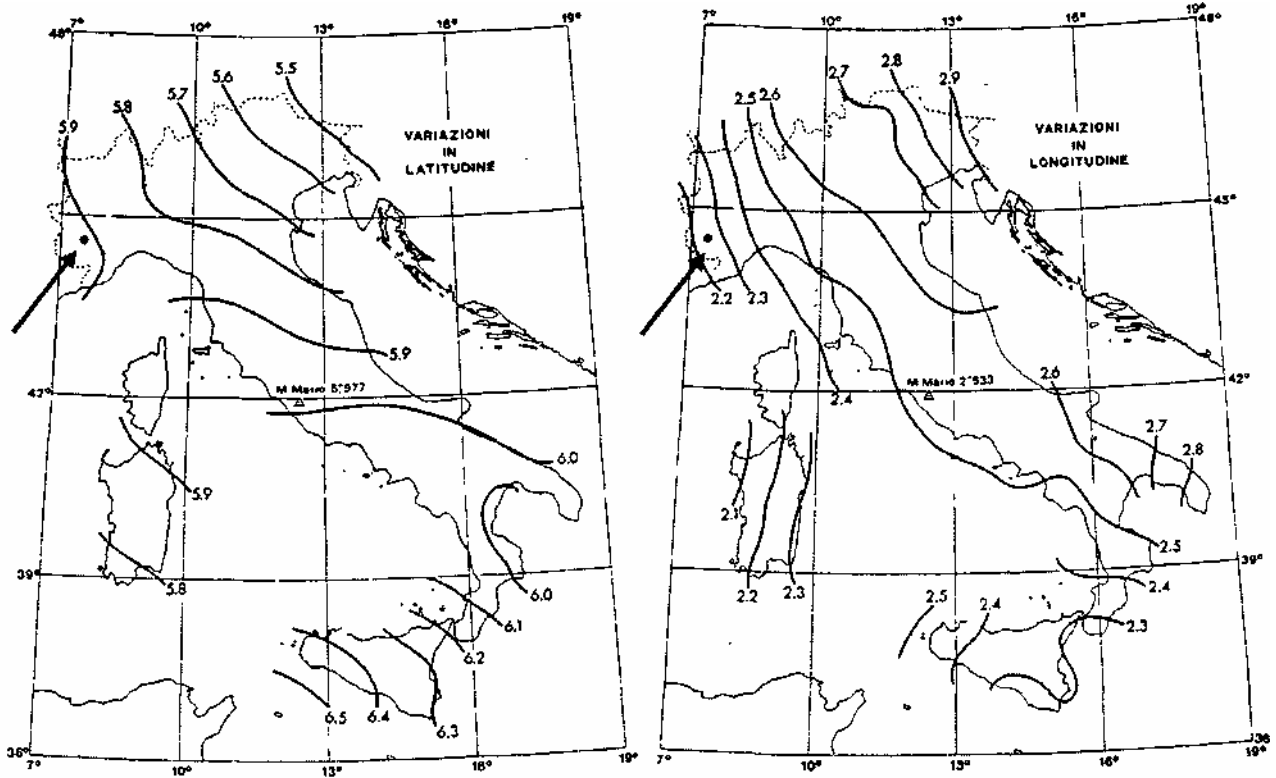
	Δ_{EST}	Δ_{NORD}
foglio 67	- 999.946 m	+ 182 m

La costante sottrattiva della Est dipende dalla diversa coordinata convenzionale assunta per il meridiano centrale (falsa origine).

$$\begin{aligned}
 E_{UTM} &= 1.368.365,55 - 999.946 &= 368.419,55 \text{ m} \\
 N_{UTM} &= 4.948.869,84 + 182 &= 4.949.051,84 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Il calcolo inverso da coordinate UTM a Gauu-Boaga si esegue applicando le costanti con i segni opposti.

Analoga conversione dal sistema Gauss-Boaga a UTM può essere eseguita per le coordinate geografiche. Le costanti da applicare devono essere desunte dall'interpolazione delle curve isotransitive:



interpolando le isotransitive ottengo:

$$\begin{aligned} \Delta_{\varphi} &= 5'',93 \\ \Delta_{\lambda} &= 2'',25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{UTM} &= 44^{\circ} 40' 49'',072 + 5'',93 &= 44^{\circ} 40' 55'',00 \\ \lambda_{UTM} &= - 5^{\circ} 06' 41'',543 + 12^{\circ} 27' 08'',4 + 2'',25 &= 7^{\circ} 20' 21'',66 \end{aligned}$$

APPENDICE A

CALCOLO DELLE DERIVATE TOTALI E PARZIALI

Saranno fornite solo le regole pratiche per il calcolo delle derivate totali e parziali di una funzione ad una o più variabili. Ricordiamo, a questo proposito, che la *derivata parziale* di una funzione a più variabili del tipo

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

calcolata rispetto ad una variabile x_i si ottiene considerando costanti nella funzione le altre $(n-1)$ variabili e derivando la funzione rispetto alla sola variabile x_i come un'ordinaria funzione ad una sola variabile.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d$$

La derivata parziale di questa funzione rispetto alla variabile x risulta:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = a$$

Infatti i restanti termini che contengono le variabili y e z sono considerati costanti e quindi di derivata nulla rispetto all'unica variabile considerata.

Regole fondamentali di derivazione.

Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in un punto x si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d(f \pm g)}{dx} &= \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx} \\ \frac{d(f \cdot g)}{dx} &= \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx} \\ \frac{d(f/g)}{dx} &= \frac{1}{g^2} \left(\frac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx} \right) \\ \frac{d[f(g)]}{dx} &= \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \end{aligned}$$

APPENDICE B

LINEARIZZAZIONE DI FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

Una funzione a più variabili del tipo

può essere linearizzata in punto del suo dominio¹ mediante una combinazione lineare del tipo:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_0 \cdot (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_0 \cdot (x_2 - x_2^0) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_0 \cdot (x_n - x_n^0)$$

dove:

$x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ --sono i valori numerici assunti dalle variabili x_1, x_2, \dots, x_n nel punto del dominio considerato attorno al quale si vuole linearizzare la funzione

$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ --è il valore numerico della funzione nel punto attorno al quale avviene la linearizzazione

$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_0$ --è il valore numerico della derivata parziale della funzione fatta rispetto alla generica variabile x , , calcolata nel punto attorno al quale si vuole linearizzare la funzione

La relazione sopra riportata rappresenta la parte lineare dello sviluppo in serie di Taylor che consente di approssimare una generica funzione con un polinomio di grado qualsiasi.

Consideriamo ad esempio l'equazione della parabola:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Linearizzare questa funzione ad una sola variabile attorno ad un punto x_0 , significa scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola nel punto in cui $x=x_0$.

Si deve considerare inoltre che la linearizzazione di una funzione consente di determinare in modo approssimato i valori numerici della funzione stessa in un piccolo intorno centrato sul valore attorno al quale è avvenuto lo sviluppo.

Consideriamo infatti la funzione:

$$f(x, y) = \sin(x^2 + 2y)$$

In base a quanto appena detto, la linearizzazione di tale funzione in un generico punto x_0, y_0 del suo dominio, porta al seguente risultato:

$$f(x, y) \cong \sin(x_0^2 + 2y_0) + [\cos(x_0^2 + 2y_0) \cdot 2x_0] \cdot (x - x_0) + [\cos(x_0^2 + 2y_0) \cdot 2] \cdot (y - y_0)$$

Se consideriamo il punto del dominio della funzione in cui $x_0=0.5$ e $y_0=1$ la linearizzazione della funzione risulta:

¹il dominio di una funzione è l'insieme dei valori che possono assumere le variabili della funzione stessa. In una funzione a più variabili con il termine "punto del dominio" si intende la serie di valori che le variabili della funzione assumono contemporaneamente.

$$\sin(x^2 + 2y) \cong \sin(2.25\text{rad}) + \cos(2.25\text{rad}) \cdot (x - 0.5) + 2 \cos(2.25) \cdot (y - 1)$$

Proponiamoci ora di calcolare il valore della funzione e della sua linearizzazione nel punto in cui $x_0=0.501$ e $y_0=1.001$. Il calcolo esatto della funzione fornisce:

$$f(x, y) = \sin(0.501^2 + 2 \cdot 1.001) = 0.7761845$$

mentre utilizzando lo sviluppo lineare otteniamo:

$$2.3485072 - 0.6281736 \cdot 0.501 - 1.2563472 \cdot 1.001 = 0.7761887$$

Come si nota i valori non sono molto diversi. La differenza tra valore vero e valore approssimato aumenta all'aumentare della distanza tra punto di calcolo e punto di linearizzazione.

APPENDICE C

ALGEBRA DELLE MATRICI

L'algebra matriciale è un insieme di regole che consentono di eseguire operazioni su particolari elementi matematici chiamati *matrici*.

La *matrice* è un insieme ordinato di numeri scritti su righe e colonne e viene solitamente indicata in modo sintetico mediante una lettera maiuscola:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matrice composta da m righe e n colonne si chiama *matrice di tipo (m,n)*.

I termini a_{ij} che compongono una matrice si chiamano *elementi della matrice*. Con la notazione adottata ogni elemento è univocamente individuato dai due numeri interi e positivi i,j che esprimono rispettivamente la riga e la colonna di appartenenza dell'elemento stesso.

Una matrice di tipo (m,n) si dice *rettangolare* se m è diverso da n.; si dice *quadrata* in caso contrario. In una matrice quadrata il numero m (=n) rappresenta *l'ordine della matrice*.

In una matrice quadrata di ordine m gli elementi $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{mm}$ costituiscono la *diagonale principale* della matrice stessa. Se gli elementi che si trovano al di sopra (o al di sotto) della diagonale principale di una matrice quadrata, sono tutti nulli, la matrice si dice *triangolare*.

Se tra gli elementi di una matrice quadrata vale la relazione:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

cioè se gli elementi che si trovano in posizione simmetrica rispetto alla diagonale principale sono a due a due uguali, la matrice si dice *simmetrica*.

Se gli elementi di una matrice simmetrica che non appartengono alla diagonale principale sono tutti nulli, la matrice si dice *diagonale*.

Una matrice diagonale nella quale gli elementi della diagonale principale sono tutti uguali a 1 si chiama *matrice unitaria*.

Una matrice di tipo (m,1) si chiama *vettore colonna*; una matrice di tipo (1,n) si chiama *vettore riga*.

Data una matrice A di tipo (m,n) si definisce *sottomatrice di A* una matrice B di tipo (r,s) i cui elementi appartengono a r righe e s colonne prefissate di A.

Si definisce *minore di ordine p estratto da A* una sottomatrice quadrata di ordine p.

Se A è una matrice quadrata di ordine n si definisce *minore complementare dell'elemento a_{ij}* , - il minore di ordine (n-1) che si ottiene cancellando in A la riga e la colonna di appartenenza dell'elemento a_{ij} .

Ad esempio se:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

il minore complementare dell'elemento a_{23} è la matrice

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Operazioni tra matrici.

1. TRASPOSIZIONE

Data una matrice A di tipo (m,n) si definisce *trasposta di A* , e si indica con A^t , una matrice di tipo (n,m) nella quale gli elementi della i -ma riga coincidono con gli elementi della i -ma colonna della matrice A .

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Si noti che se A è una matrice simmetrica allora la matrice A e la sua trasposta sono identiche.

2. ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Due matrici si possono addizionare (o sottrarre) se sono dello stesso tipo.

Date due matrici A e B di tipo (m,n) , la matrice C somma (o sottrazione) di A e B è una matrice di tipo (m,n) in cui ogni elemento è pari alla somma (o alla differenza) degli elementi di uguale posizione delle due matrici iniziali.

Siano

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

la matrice C somma delle due, e la matrice D differenza, risultano essere:

$$C = A + B = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad D = A - B = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 6 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

Per l'addizione e la sottrazione di matrici valgono la proprietà commutativa

$$A + B = B + A$$

e la proprietà associativa:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Inoltre la trasposta delle matrici somma (o sottrazione) risulta essere pari alla somma (o alla sottrazione) delle trasposte delle matrici iniziali.

3. MOLTIPLICAZIONE

Due matrici si possono moltiplicare fra loro se il numero delle colonne del moltiplicando e il numero di righe del moltiplicatore sono uguali.

Data la matrice A di tipo (m,n) e la matrice B di tipo (n,l), il prodotto della prima matrice per la seconda è una matrice C di tipo (m,l) il cui generico elemento c_{ij} risulta essere pari alla seguente espressione:

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{jp} \quad \text{dove} \quad i = 1, \dots, n \quad p = 1, \dots, l$$

Siano

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

risulta:

$$C = A \cdot B = \begin{vmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 6 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 & 16 & 18 & 2 \\ 28 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Per la moltiplicazione valgono la proprietà distributiva

$$A(B + C) = AB + AC \quad (A + B)C = AC + BC$$

e la proprietà associativa

$$A(BC) = (AB)C$$

Non vale invece la proprietà commutativa, per cui

$$AB \neq BA$$

Se AB è un prodotto eseguibile, non è detto che BA lo sia. Ad esempio se A è di tipo (2,3) e B è di tipo (3,6), il prodotto AB si può eseguire, mentre il prodotto BA no.

Si noti ancora che non esiste l'elemento nullo della moltiplicazione. Quindi se

$$AB = 0$$

non è detto che la matrice A o la matrice B siano matrici ad elementi tutti nulli. Inoltre vale la seguente proprietà

$$(AB)^t = B^t A^t$$

cioè la trasposta del prodotto di due matrici è pari al prodotto tra la trasposta del moltiplicatore e la trasposta del moltiplicando.

Il prodotto di una costante per una matrice di tipo (m,n) è una matrice di tipo (m,n) i cui elementi sono pari al prodotto della costante per l'elemento di ugual posto nella prima matrice:

$$5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 0 & 20 & 15 \end{vmatrix}$$

4. DETERMINANTE

Il *determinante* è un numero che viene associato a matrici quadrate ed è calcolato in funzione degli elementi della matrice stessa. L'ordine della matrice si indica anche come *ordine del determinante* ad essa associato.

Si definisce *complemento algebrico dell'elemento* a_{ij} di una matrice quadrata, il determinante associato al minore complementare dell'elemento a_{ij} preso col suo segno se la quantità (i+j) è pari oppure con segno opposto se la quantità (i+j) è dispari.

Il calcolo del determinante associato a una matrice si esegue applicando la seguente regola detta *regola di riduzione* (o prima regola di Laplace):

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE È UGUALE ALLA SOMMA DEI PRODOTTI DEGLI ELEMENTI DI UNA RIGA (O DI UNA COLONNA) PER I RELATIVI COMPLEMENTI ALGEBRICI.

ESEMPI NUMERICI.

1) Consideriamo una matrice di ordine 2

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Secondo la regola appena enunciata risulta:

$$\det A = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1$$

Infatti si sono sommati i prodotti degli elementi della prima riga (2,3) per i rispettivi complementi algebrici, ricordando che il determinante di un numero è pari al numero stesso.

2) Consideriamo ora una matrice di ordine 3

$$B = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Applicando sempre la prima regola di Laplace il calcolo del determinante risulta:

$$\det B = 4 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \det \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 3 \cdot (5 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + 2 \cdot (5 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = 13$$

Come si può facilmente intuire dagli esempi sopra riportati, il calcolo del determinante di una matrice di ordine 4 comporta il calcolo di 4 determinanti di matrici di ordine 3, ognuno dei quali comporta (come visto nell'esempio) il calcolo dei determinanti di tre matrici di ordine 2, e così via. Quindi l'applicazione della regola di riduzione su matrici di ordine qualunque comporta un numero di calcoli che cresce vertiginosamente all'aumentare dell'ordine della matrice. L'applicazione della prima regola di Laplace risulta invece vantaggiosa nel calcolo dei determinanti di matrici triangolari.

ESEMPIO NUMERICO.

Consideriamo la matrice triangolare

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di riduzione agli elementi della prima riga il calcolo del determinante risulta:

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot \det \begin{vmatrix} 5 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3 = 45$$

Generalizzando il determinante di una matrice triangolare di ordine qualsiasi è pari al prodotto degli elementi della diagonale principale.

Tra le numerose proprietà dei determinanti esiste la possibilità di calcolare matrici aventi lo stesso determinante. In particolare il determinante di una matrice non si altera se agli elementi di una sua riga (o di una sua colonna) si aggiunge una combinazione lineare qualsiasi degli elementi delle altre righe (o delle altre colonne). Utilizzando opportunamente tale proprietà è possibile trasformare la matrice originaria in una matrice triangolare e quindi procedere rapidamente al calcolo del suo determinante nei termini visti nell'esempio precedente.

Comunque venga affrontato il problema, quando l'ordine della matrice è elevato, il numero delle operazioni necessarie per il calcolo del determinante è tale per cui può essere svolto in modo rapido solo mediante opportuni programmi di calcolo che si basano sia sulle proprietà ora enunciate sia su altri metodi (ad esempio il metodo delle permutazioni).

5. INVERSIONE

Data una matrice A di ordine n , si definisce *inversa di A* e si indica con A^{-1} , una matrice di ordine n tale che:

$$A^{-1} \cdot A = I$$

dove I è la matrice unitaria di ordine n .

Si può dimostrare che gli elementi della matrice inversa sono forniti dalla relazione:

$$\alpha_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$

Si considera l'elemento trasposto, come si vede dall'esempio

dove A_{ji} è il complemento algebrico dell'elemento a_{ji} della matrice A . Da questa relazione si deduce che affinché una matrice sia invertibile, il suo determinante deve essere diverso da 0.

ESEMPIO NUMERICO:

Si vuole calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Innanzitutto verifichiamo che la matrice sia invertibile; risulta:

$$\det A = -8$$

Calcoliamo ora i complementi algebrici degli elementi di A .

L'inversa di A quindi risulta essere:

$$A_{11} = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -2$$

$$A_{12} = -(2 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = -2$$

$$A_{13} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 2$$

$$A_{21} = -(2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = -3$$

$$A_{22} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$A_{23} = -(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = -1$$

$$A_{31} = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 13$$

$$A_{32} = -(1 \cdot 5 + 1 \cdot 2) = -7$$

$$A_{33} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{13}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{vmatrix}$$

Per il controllo delle operazioni svolte è sufficiente svolgere il prodotto dell'inversa di A per A e verificare che il risultato coincida con la matrice unitaria di ordine 3.

APPENDICE D

SOLUZIONE DI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Consideriamo un sistema di m equazioni lineari in m incognite, del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = t_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = t_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = t_m \end{cases}$$

Utilizzando la notazione matriciale, il sistema si può riscrivere con la notazione compatta

$$AX=T$$

dove:

- A è una matrice di tipo (m,n) contenente i coefficienti delle incognite. Questa matrice viene detta *matrice dei coefficienti* o *matrice disegno del sistema*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

- X è un vettore colonna di m elementi contenente le incognite X_1, X_2, \dots, X_m Questo matrice viene chiamata *vettore delle incognite*

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_m \end{vmatrix}$$

- T è un vettore colonna di m elementi contenente i termini noti t_1, t_2, \dots, t_m . Questa matrice viene chiamata *vettore dei termini noti*

$$\begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_m \end{vmatrix}$$

Considerando la scrittura in forma matriciale del sistema, moltiplichiamo entrambi i membri a sinistra per la inversa di A . Risulta:

$$A^{-1}AX=A^{-1}T$$

Ricordando che

$$A^{-1}A = I \text{ e } IX = X$$

otteniamo

$$X = A^{-1}T$$

Questo significa che le soluzioni del sistema di equazioni lineari sono contenute nel vettore colonna che si ottiene moltiplicando l'inversa della matrice disegno per il vettore dei termini noti.

ESEMPIO NUMERICO

Si vuole risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Questo sistema può essere riscritto utilizzando la notazione matriciale nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti è già stata utilizzata negli esempi precedenti e ne conosciamo già l'inversa. Quindi siamo in grado di calcolare le soluzioni del sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{13}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{19}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Per verificare l'esattezza delle soluzioni determinate, è sufficiente sostituire tali valori nel sistema iniziale e verificare che tutte le equazioni risultino identicamente soddisfatte.

APPENDICE E

SOLUZIONE DI SISTEMI DI EQUAZIONI NON LINEARI

Consideriamo ora un sistema di m equazioni non lineari in m incognite del tipo:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

Sistemi di questo tipo solitamente non sono risolvibili in modo diretto, per cui solitamente si utilizza un metodo di ricerca della soluzione di tipo iterativo. Le equazioni vengono approssimate con delle combinazioni lineari ricavate secondo quanto esposto nell'appendice A

$$\begin{cases} f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 \cdot (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 \cdot (x_2 - x_2^0) + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_m}\right)_0 \cdot (x_m - x_m^0) = 0 \\ f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 \cdot (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 \cdot (x_2 - x_2^0) + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_m}\right)_0 \cdot (x_m - x_m^0) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right)_0 \cdot (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_2}\right)_0 \cdot (x_2 - x_2^0) + \dots + \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_m}\right)_0 \cdot (x_m - x_m^0) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema lineare si ottengono i valori delle correzioni $(x_i - x_i^0)$. Tali valori vengono sommati ai valori approssimati x_i^0 ottenendo una nuova serie di valori approssimati utilizzando i quali le equazioni originarie vengono nuovamente linearizzate generando un nuovo sistema lineare. Il procedimento viene iterato fino a quando i valori delle correzioni $(x_i - x_i^0)$ determinati risultano trascurabili e si assume come soluzione l'insieme dei valori

$$x_i = (x_i^0)^{n-1} + (\delta x_i)^n$$

dove il primo addendo rappresenta i valori approssimati utilizzati per ricavare il sistema lineare dell'ultima iterazione, e il secondo addendo le soluzioni di quest'ultimo sistema.

2.1. Definizione di angolo azimutale, distanza zenitale, distanza e dislivello

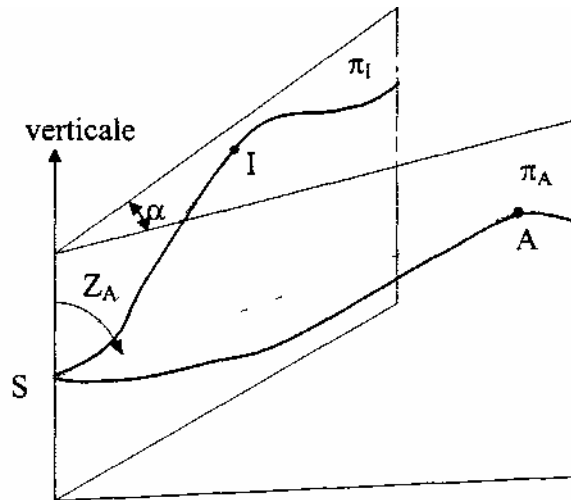


Fig.1 Definizione di angolo azimutale, distanza zenitale e dislivello.

Si definisce **angolo azimutale** l'angolo diedro formato dai due piani TCI, passante per il punto collimato I (punto indietro), e π_A , passante per il punto collimato A (punto avanti), del fascio di piani che ha per generatrice la verticale passante per il punto di stazione S (vedi Fig.1).

Si definisce **distanza zenitale** del punto A, l'angolo Z_A appartenente al piano π_A definito tra la verticale passante per S e la retta congiungente il punto S con il punto A (vedi Fig.1).

Si chiama **distanza misurata** SA la lunghezza del segmento di retta congiungente i due punti S e A, mentre dicesi **distanza topografica o distanza**, la lunghezza dell'arco di geodetica ottenuto dalla proiezione dei due punti S e A sulla superficie di riferimento.

Dicesi infine **dislivello** DSA la differenza di quota tra il punto A (Q_A) ed il punto S (Q_S) intendendo come quota (quota ortometrica) l'altezza del punto sul geode.

2.2. IL TEODOLITE

IL teodolite è costituito essenzialmente da tre parti: un basamento, un'alidada e un cannocchiale. Il **basamento** è una struttura meccanica che racchiude al suo interno un cerchio graduato (**cerchio azimutale**) disposto parallelamente al piano di appoggio del basamento stesso. Nella parte inferiore del basamento vi sono i tre perni che consentono di bloccare lo strumento alla basetta topografica, o al dispositivo di centramento forzato.

Il centro della circonferenza passante per i tre perni appartiene all'asse di rotazione dell'alidada.

L'**alidada** è una struttura meccanica che ruota attorno a un asse perpendicolare al basamento. Sull'alidada si trovano gli **indici di lettura** del cerchio azimutale (solidali all'alidada) e gli indici di lettura di un secondo cerchio graduato (il **cerchio zenitale**).

Il cerchio zenitale è incorporato all'interno dell'alidada, collegato rigidamente al cannocchiale e disposto in un piano perpendicolare all'asse attorno al quale ruota il cannocchiale dello strumento. Sull'alidada si trova una **livella loricata** che serve a rendere verticale l'asse di rotazione dell'alidada stessa.

Le rotazioni dell'alidada, sono controllate da due viti: una preposta a impedire o meno la rotazione manuale dell'alidada (**vite dei grandi spostamenti**) e la seconda in grado di effettuare piccole rotazioni dell'alidada, una volta eliminata la possibilità di rotazione manuale della stessa (**vite dei piccoli spostamenti**).

Negli strumenti ottico-meccanici di precisione solitamente il cerchio azimutale non è fisso, ma può essere ruotato mediante una apposita vite ad accesso protetto (vite reiteratrice), indipendentemente dal basamento e dall'alidada. Tali teodoliti vengono chiamati reiteratori.

In un'altra categoria di teodoliti, detti **ripetitori**, il cerchio azimutale può essere reso solidale al basamento oppure all'alidada mediante l'azione di un bottone di bloccaggio esterno.

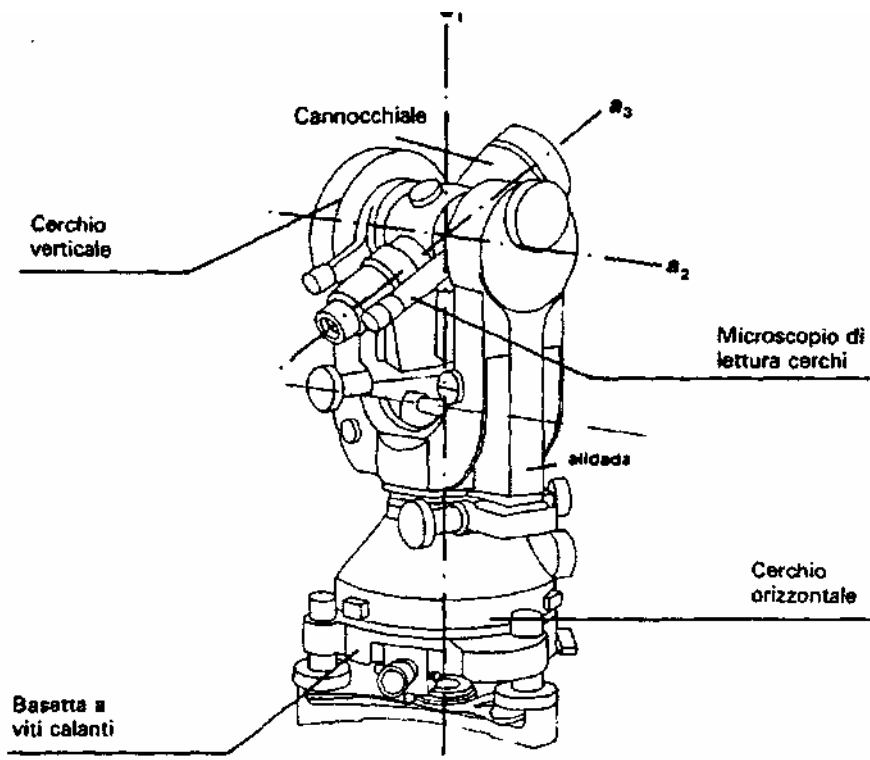


Figura 2 - Schema di un teodolite ottico-meccanico

In tutti i teodoliti ottico-meccanici di precisione, gli indici di lettura del cerchio zenitale non sono fissati rigidamente all'alidada, ma sono collegati a dei dispositivi che ne consentono l'assetto lungo la verticale con una precisione maggiore di quella garantita dalla livella torica dell'alidada. Questo dispositivo è costituito o da una livella torica ad elevata sensibilità (solitamente a coincidenza di immagini) o da **compensatori** ottici e/o meccanici.

Il cannocchiale è montato sull'alidada in modo da poter ruotare liberamente attorno a un asse parallelo al piano di appoggio del basamento. Tali rotazioni sono controllate da una coppia di viti del tutto identiche a quelle preposte al controllo delle rotazioni dell'alidada.

Agendo opportunamente con queste due coppie di viti è quindi possibile ruotare l'asse di collimazione del cannocchiale attorno al **centro strumentale** (intersezione tra l'asse di rotazione del cannocchiale e l'asse di rotazione dell'alidada) in qualsiasi direzione e quindi collimare un qualsiasi punto dello spazio circostante.

Nei moderni teodoliti elettronici il progetto complessivo del tradizionale teodolite ottico-meccanico è rimasto uguale, a parte i miglioramenti riguardanti la tecnologia dei materiali e delle procedure di costruzione che hanno reso gli strumenti più piccoli e più efficienti.

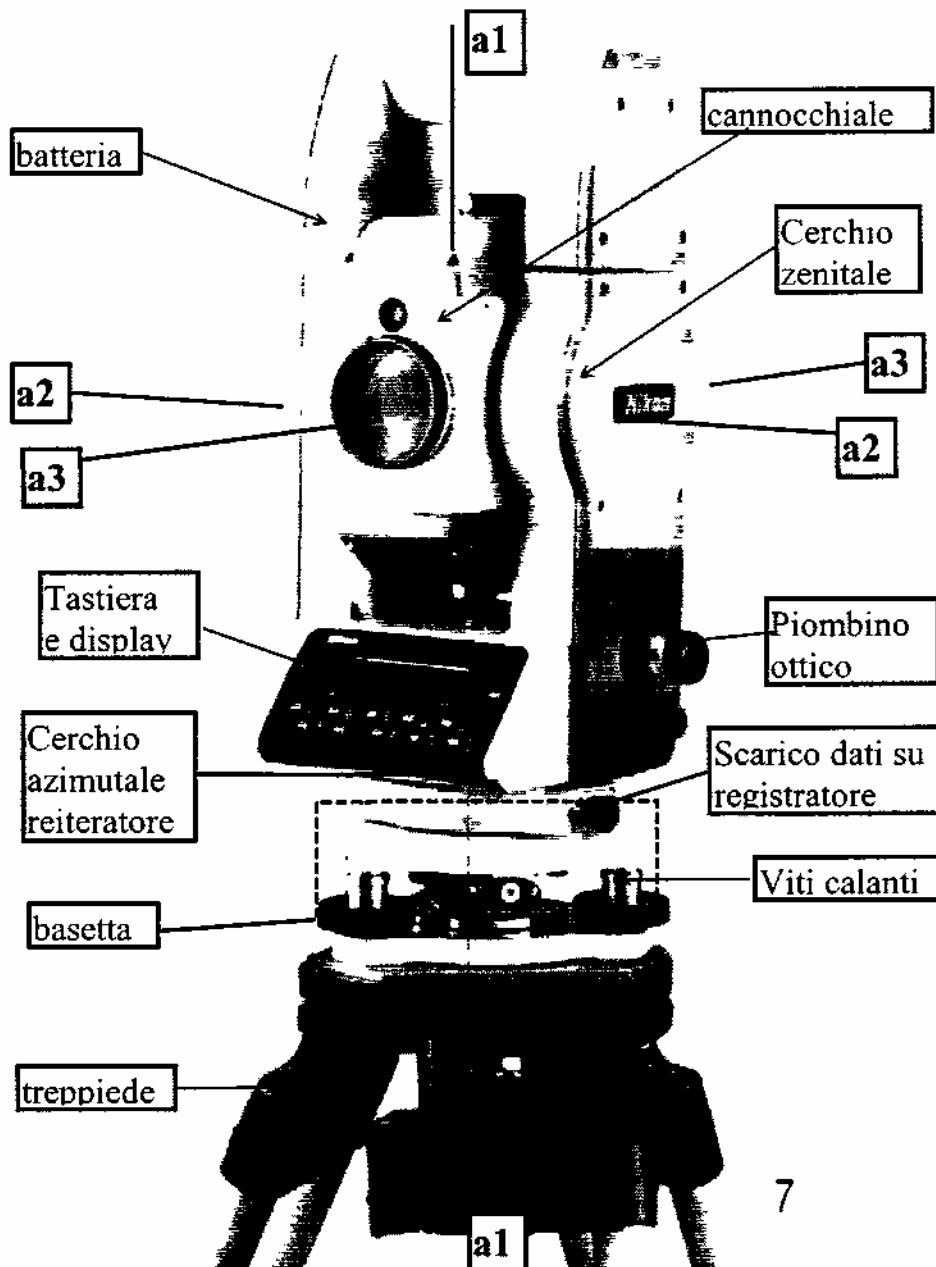


Figura 3 - Stazione totale

Così come sempre è avvenuto nell'ambito delle strumentazioni topografiche, l'avvento dell'elettronica non ha di per sé fornito precisioni maggiori nella misura ma ha consentito di raggiungere notevoli automatismi nelle fasi più pesanti per l'operatore. Nell'ambito delle versioni elettroniche dei teodoliti, la vera novità consiste nell'introduzione di sistemi di lettura elettronica (e quindi automatici) per le direzioni angolari e la possibilità della loro registrazione su un supporto magnetico.

I primi tentativi di costruzione dei teodoliti elettronici risalgono agli anni '50, anche se occorre arrivare agli anni '80 per vedere le prime realizzazioni commerciali.

I teodoliti elettronici consentono dunque la misura elettronica delle direzioni angolari: sono strumenti cioè identici dal punto di vista meccanico ai tradizionali teodoliti, ma le letture ai cerchi avvengono elettronicamente e sono poi visualizzate su un piccolo schermo e registrate su un supporto magnetico.

Per **stazione totale** si intende invece un teodolite elettronico che comprenda all'interno della sua struttura anche un distanziometro. Vi è la possibilità, quindi, di leggere direttamente su un display sia la distanza che le misure angolari.

Si chiamano infine **strumenti integrati** quegli strumenti che sono composti da un teodolite elettronico o tradizionale che è possibile connettere o collegare (di solito a cavallo del cannocchiale) con uno strumento distanziometrico ad onde. Sia le misure angolari che quelle di distanza sono lette automaticamente ma i due strumenti sono distinti e separabili.

Come vedremo meglio in seguito gli errori di rettifica e l'errore di verticalità influenzano negativamente le misure angolari eseguibili con un teodolite. Vedremo anche come, operando con strumenti ottico-meccanici sarà necessario adottare accorgimenti pratici particolari per ovviare a questi inconvenienti.

2.3. CANNOCCHIALE A LUNGHEZZA COSTANTE

I cannocchiali sono degli strumenti ottici che permettono di osservare oggetti lontani e di essi possono fornire immagini capovolte (cannocchiale astronomico) oppure diritte (cannocchiale terrestre e di Galileo) come quelli utilizzati negli strumenti topografici. Un cannocchiale è essenzialmente costituito da un obiettivo, un oculare e un reticolo. Considerando, per semplicità, obiettivo e oculare costituiti da due lenti sottili (vedi fig. 6) l'oggetto è posto davanti all'obiettivo a una distanza molto maggiore del doppio della sua distanza focale e quindi l'obiettivo stesso fornisce un'immagine reale, capovolta e rimpicciolita che si forma tra il primo fuoco dell'oculare e il centro ottico. In queste condizioni, l'oculare dà luogo a una seconda immagine che risulta virtuale, diritta (e quindi ancora capovolta rispetto all'oggetto) e ingrandita. Variando la distanza tra obiettivo e oculare variano sia la posizione dell'immagine dell'oculare sia il suo ingrandimento.

Nei moderni cannocchiali, l'obiettivo è un sistema ottico complesso ottenuto con l'accoppiamento di più lenti che ammetta come risultante una lente convergente, in modo da eliminare, o ridurre il più possibile, gli effetti delle aberrazioni; in genere, essendo il campo visivo del cannocchiale piuttosto limitato, è sufficiente correggere il cromatismo accoppiando una lente biconvessa di vetro crown con una lente menisco-divergente di vetro flint.

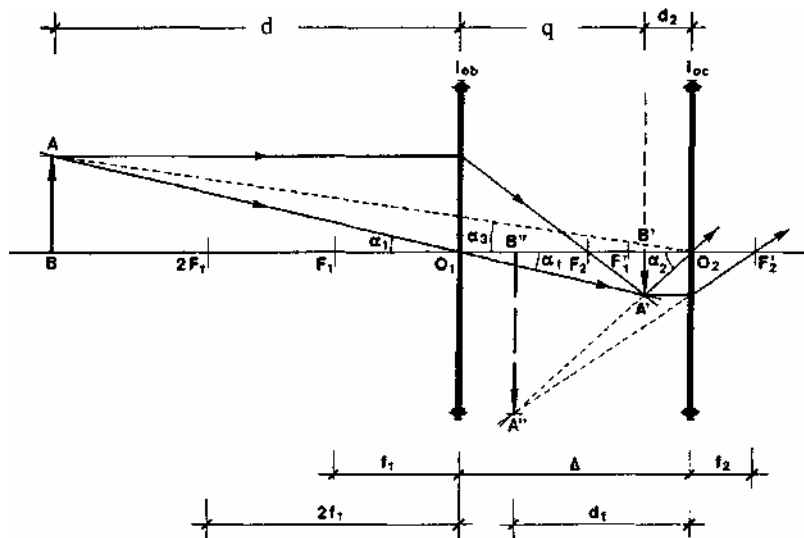


Figura 6 - Schema ottico-geometrico di un cannocchiale

L'oculare risulta composto dall'accoppiamento di più lenti in modo da formare un sistema ottico complesso convergente, al fine di correggere le aberrazioni di cromaticismo e di sfericità dovute alla notevole inclinazione dei raggi luminosi che giungono all'obiettivo e al fatto che per ottenere forti ingrandimenti è necessario avere corte distanze focali e quindi curvature rilevanti delle superfici rifrangenti: le due o più lenti che formano il sistema sono poste a piccola distanza fra loro: la lente rivolta verso l'obiettivo è detta collettiva.

Il reticolo risulta indispensabile nei cannocchiali topografici in quanto nei metodi di rilievo terrestre è necessario definire delle direzioni nello spazio. Il reticolo è costituito da un vetrino sul quale sono incisi due sottilissimi tratti, uno verticale e l'altro orizzontale, più altri tratti orizzontali o verticali equidistanti, chiamati fili del reticolo. In fig. 7 sono riportati alcuni esempi di reticoli. Il punto di intersezione dei due fili mediani individua il centro C del reticolo.

Una direzione generica nello spazio è definita dalla retta che unisce il centro del reticolo con il centro ottico dell'obiettivo: tale retta prende il nome di asse di collimazione del cannocchiale. Collimare un punto significa far passare per il punto stesso l'asse di collimazione.

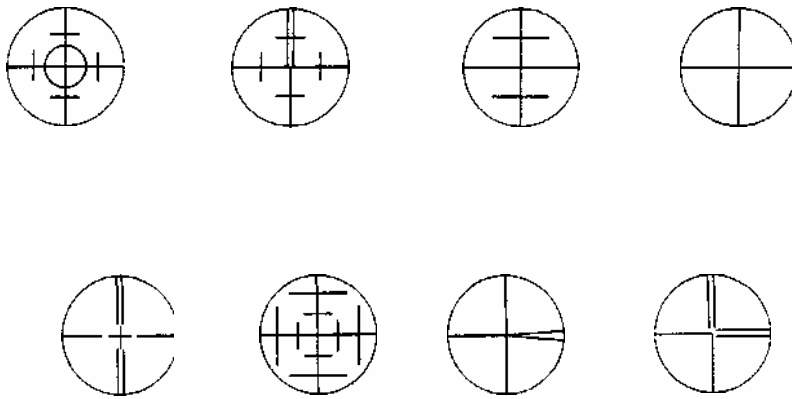


Figura 7 - Esempi di reticoli di cannocchiali topografici

Nei cannocchiali a lunghezza costante utilizzati negli strumenti topografici, l'obiettivo e il reticolo (vedi fig. 8) sono montati a una distanza fissa su un unico tubo; tra l'obiettivo e il reticolo è montata una lente divergente mobile, detta lente collettiva, montata in un tubo coassiale al precedente ed entro il quale può essere fatto scorrere dall'esterno mediante un dispositivo a cremagliera.

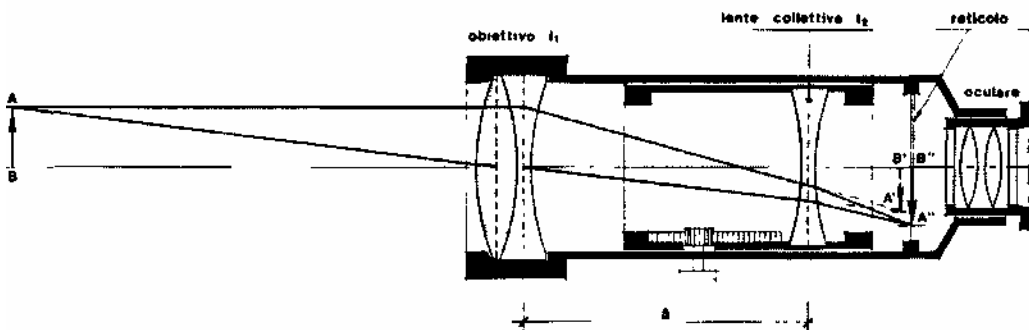


Figura 8 - Schema di montaggio di un cannocchiale a lunghezza costante

Un terzo tubo porta l'oculare; questo tubo può scorrere a vite o per attrito all'interno del tubo principale per consentire lievi spostamenti dell'oculare rispetto al reticolo.

Il reticolo non è fissato in modo rigido sul tubo principale, ma l'armatura che lo porta è collegata ad esso mediante quattro viti a contrasto diametralmente opposte che permettono spostamenti micrometrici orizzontali e verticali, più una quinta vite che consente di porre i fili del reticolo perfettamente orizzontale e verticale (vedi fig. 9). Il reticolo deve essere montato vicino al fuoco del sistema oculare. Il piano del reticolo deve coincidere con il piano sul quale si forma l'immagine reale generata dal sistema obiettivo.

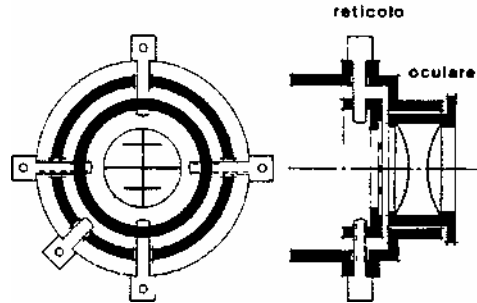


Figura 9 - Schema di montaggio del reticolo

Questa condizione può essere verificata collimando un oggetto ed effettuando piccoli spostamenti dell'occhio davanti all'oculare osservando con attenzione un filo del reticolo:

- > se il filo rimane fermo rispetto all'immagine, la condizione è soddisfatta;
- > se il filo sembra spostarsi rispetto all'immagine non si ha perfetta coincidenza fra i piani del reticolo e dell'immagine e la collimazione è soggetta a un errore di parallasse ai fili. In questo caso occorre migliorare l'adattamento alla distanza dell'oggetto, agendo sugli spostamenti della lente collettiva.

Il sistema obiettivo, in un cannocchiale a lunghezza costante, può essere considerato come costituito dall'obiettivo vero e proprio (l_1) e dalla lente collettiva (l_2). Se indichiamo con f_1 la distanza focale del sistema ottico l_1 , con f_2 la distanza focale della lente l_2 , con f la distanza focale del sistema ottico complesso formato da l_1 e l_2 e Δ la distanza variabile tra i sistemi l_1 e l_2 , si possono fare alcune considerazioni circa le relazioni che intercorrono tra questi elementi:

- > la distanza focale f può essere calcolata con la relazione

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - \Delta}$$

ed essendo Δ variabile, anche f risulta variabile;

il sistema delle due lenti f_1 e f_2 deve essere convergente in quanto sul reticolo si deve sempre formare un'immagine reale, per cui deve risultare $f > 0$. Essendo $f_1 > 0$ (l_1 è convergente) e $f_2 < 0$ (l_2 è divergente), il numeratore della [1] risulta negativo; dovendo essere f positivo deve risultare sempre verificata la seguente disuguaglianza:

$$f_1 + f_2 - \Delta < 0 \Rightarrow f_1 - |f_2| - \Delta < 0 \Rightarrow f_1 < |f_2| + \Delta$$

- l'immagine reale data dal sistema l_1 e l_2 deve risultare esterna al sistema stesso in modo da poter posizionare il reticolo;
- f_1 deve sempre risultare maggiore di Δ perché in caso contrario l'immagine reale fornita dalla l_1 si formerebbe prima della l_2 che, essendo divergente, produrrebbe un'immagine virtuale e non la necessaria immagine reale sul reticolo;
- tenendo conto che f_1 è positiva e f_2 è negativa, la (1) può anche essere scritta nella forma:

$$f = \frac{f_1 \cdot |f_2|}{\Delta - (f_1 - |f_2|)} \quad (3)$$

dalla quale si deduce che la distanza focale f varia in modo inversamente proporzionale alla distanza Δ , e più precisamente che assume il valore massimo quando il cannocchiale viene

adattato alla distanza minima di focamento (1-2 m), mentre assume il valore massimo quando viene collimato un punto all'infinito tenendo presente che per oggetti a distanze superiori a 20-25 m (distanza iperfocale), il valore di A si può ritenere praticamente costante.

L'adattamento alla distanza si ottiene facendo variare la distanza A spostando la lente collettiva tramite un bottone esterno o un anello zigrinato coassiale con il tubo che porta l'obiettivo e il reticolo.

Nello schema fino ad ora descritto, l'immagine risultante dall'azione combinata del sistema obiettivo e del sistema oculare è capovolta rispetto all'oggetto collimato, mentre, per praticità d'uso, è necessario che l'immagine sia diritta. Per raggiungere questo scopo, fra la lente collettiva e il reticolo si dispone un prisma a sezione pentagonale con le facce AE e CD parallele e perpendicolari all'asse di collimazione, mentre la faccia DE è normale alle prime due. Le facce AB, BC e DE sono lavorate a specchio. Il funzionamento di tale prisma è facilmente intuibile osservando la fig. 10.

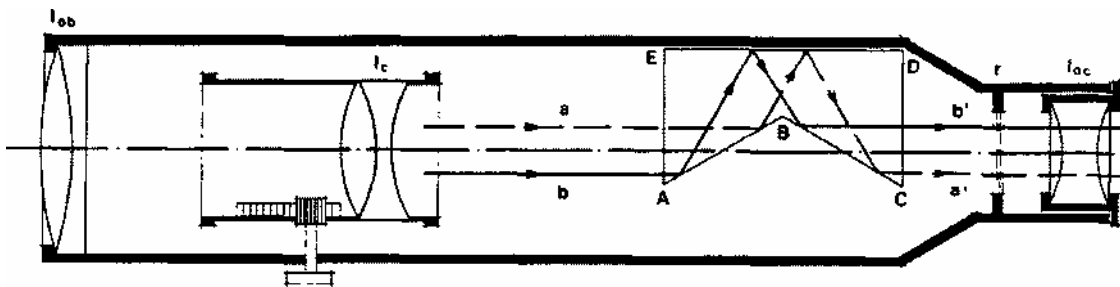


Figura 10 - Schema geometrico di un cannocchiale a lunghezza costante munito di prisma pentagonale per il raddrizzamento delle immagini

2.3.1. Caratteristiche del cannocchiale

L'ingrandimento angolare di un cannocchiale viene definito come il rapporto fra le tangenti dell'angolo sotto il quale l'operatore vede l'immagine dell'oggetto collimato con il cannocchiale e l'angolo sotto il quale vedrebbe il medesimo oggetto senza l'ausilio del cannocchiale.

L'ingrandimento normale di un cannocchiale è il valore che assume l'ingrandimento angolare quando l'oggetto osservato è posto a una distanza superiore alla distanza iperfocale del cannocchiale ($> 20 - 25$ m). Esso risulta pari al rapporto tra le distanze focali rispettivamente dei sistemi obiettivo e oculare. Normalmente i cannocchiali utilizzati negli strumenti topografici hanno ingrandimenti normali che variano da 20x (strumenti di bassa precisione) fino a 40x.

La chiarezza di un cannocchiale è definita come il rapporto fra la chiarezza dell'oggetto visto attraverso il cannocchiale e la chiarezza dell'oggetto visto a occhio nudo. Tale rapporto è generalmente minore dell'unità. Se D è il diametro dell'obiettivo, b il diametro visibile del reticolo e I l'ingrandimento normale del cannocchiale, la *chiarezza*, risulta essere espressa dalla relazione:

$$c = K \cdot \frac{D^2}{b^2 \cdot I^2}$$

La chiarezza dunque è direttamente proporzionale al quadrato del diametro utile dell'obiettivo e inversamente proporzionale al quadrato dell'ingrandimento.

Il campo di un cannocchiale è rappresentato dall'ampiezza angolare del cono che ha per vertice il centro ottico del sistema obiettivo e per base il foro dell'anello che porta il reticolo. Le case costruttrici definiscono il campo del cannocchiale dando la distanza trasversale che è visibile a 1 km

attraverso il cannocchiale. Tanto più è piccolo il campo tanto maggiore è l'ingrandimento.

La **portata** di un cannocchiale è rappresentata dalla distanza massima alla quale un oggetto risulta visibile attraverso il cannocchiale. Per un singolo cannocchiale non può essere definita in quanto la portata dipende dall'ingrandimento, dalla chiarezza e dalle dimensioni dell'oggetto. Negli strumenti topografici (livelli), con il cannocchiale si devono collimare strumenti metrici come le stadi (aste lunghe da 1.5 m a 4 m con suddivisioni in metri, decimetri e centimetri o con codici a barre) sui quali si devono effettuare letture dirette fino al centimetro con stima del millimetro o riprese di immagini per operazioni di autocorrelazione dei codici a barre: nei normali cannocchiali topografici la portata è di circa 100 m H- 120 m.

In alcuni strumenti topografici (teodoliti) occorre collimare segnali che materializzano un punto mediante una serie di linee del tipo di quelle utilizzate per la materializzazione del centro del reticolo (vedi fig. 7). In questi casi la portata di un cannocchiale assume scarsa importanza rispetto a un'altra caratteristica, detta **potere risolutivo o separatore**, per la quale due punti oggetto distinti forniscono due punti immagine anch'essi distinti e perfettamente distinguibili solo quando la distanza fra i due punti immagine risulta maggiore di un certo valore d .

Il potere risolutivo è fornito dall'inverso di tale distanza d ed è un valore finito che costituisce una delle caratteristiche di ogni strumento ottico. Il potere risolutivo è limitato da diverse cause, ma principalmente dalla diffrazione (fenomeno per il quale a un oggetto puntiforme non corrisponde un'immagine puntiforme, bensì una serie di corone circolari concentriche chiare e scure alternate, detta figura di diffrazione).

La **sensibilità** di un cannocchiale è rappresentata dall'angolo minimo formato da due visuali passanti per due punti distinti, al di sotto del quale all'occhio, attraverso il cannocchiale, sembra che i due punti non risultino più separati.

Considerando che il potere separatore dell'occhio nudo è di circa 60", la sensibilità di un cannocchiale risulta:

$$s'' = \frac{60''}{I} = \frac{0.000291 \text{ rad}}{I}$$

dove I rappresenta l'ingrandimento complessivo del cannocchiale. In base al valore della sensibilità, è possibile determinare la dimensione minima del segnale visibile attraverso il cannocchiale in funzione della distanza di collimazione. Nel caso dell'occhio umano nel quale $s'' = 0.000291$ rad, si ha pertanto:

$$d_v = 0.000291 \cdot D_c$$

Quindi è possibile osservare a occhio nudo oggetti di dimensioni maggiori o uguali a circa 3 cm a distanze non superiori a 100 m.

2.4. LAMINA PIANO PARALLELA

Un altro dispositivo ottico che trova applicazione nei teodoliti è la **lamina pian-parallela**.

Questa è costituita da un mezzo di densità diversa rispetto all'ambiente circostante, separato da due superfici piane e parallele.

Un raggio luminoso attraversa la lamina ed emerge parallelamente alla direzione di incidenza spostato di una quantità d proporzionale all'angolo di incidenza i :

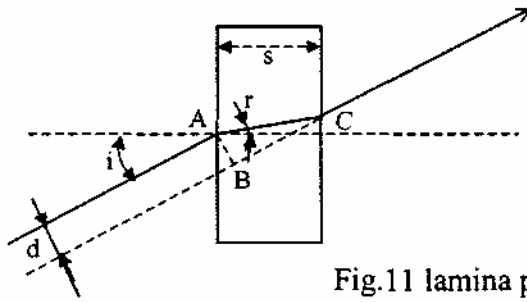
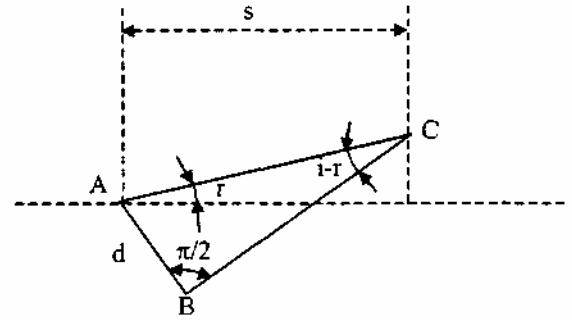


Fig.11 lamina pian-parallela



dalla fig. 11 risulta applicando il teorema dei seni al triangolo ABC:

$$\frac{d}{\text{sen}(i-r)} = \frac{s}{\cos r}$$

$$\frac{d}{\text{sen}(i-r)} = \frac{s}{\text{sen} \frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{d}{\text{sen}(i-r)} = \frac{s}{\cos r}$$

Se i e r sono angoli piccoli, si possono effettuare le seguenti semplificazioni:

$$\begin{aligned} \text{sen } i &\cong i \\ \text{sen } r &\cong r \\ \cos r &\cong 1 \\ \cos i &\cong 1 \\ \text{sen}(i-r) &= \text{sen } i \cdot \cos r - \cos i \cdot \text{sen } r = \text{sen } i - \text{sen } r \end{aligned}$$

e quindi:

$$d = s (\text{sen } i - \text{sen } r) = s \text{sen } i \left(1 - \frac{\text{sen } r}{\text{sen } i} \right) \quad \text{dove} \quad \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n = \text{indice di rifrazione}$$

$$d = s i \left(1 - \frac{1}{n} \right) = s i \frac{n-1}{n} = k i \tag{4}$$

La traslazione d risulta dunque proporzionale all'angolo di incidenza i .

Negli strumenti topografici le lamine pian-parallele sono utilizzate (come si vedrà in seguito) per la misura delle frazioni di graduazione dei cerchi.

2.5. LE LIVELLE

Le livelle sono strumenti semplici che in topografia sono utilizzate per rendere orizzontale un asse o un piano, oppure per rendere verticale un asse. Esse sono presenti in tutti gli strumenti topografici e dal loro corretto utilizzo dipende in massima parte la precisione del rilievo.

Le livelle possono essere controllate a vista dall'operatore (livelle sferiche e livelle toriche) oppure mediante opportuni dispositivi ottico-meccanici (livelle a coincidenza di immagini).

2.5.1. La livella sferica

È costituita da una fiala cilindrica di vetro, delimitata superiormente da una superficie a calotta sferica, che riporta uno o più cerchi concentrici (v. fig. 12) il cui centro rappresenta il centro della calotta (centro della livella).

La fiala è riempita parzialmente da un liquido con basso punto di congelamento (alcool, benzina, etere solforico, ecc.). Lo spazio della fiala che non viene riempito dal liquido viene saturato dai suoi vapori che formano una bolla che, per effetto della gravità si dispone sempre nella parte più alta della fiala..

La fiala di vetro è contenuta in un'armatura metallica che può presentare una base piana quando la livella è impiegata per rendere orizzontale un piano (come nel caso di tutti gli strumenti topografici), oppure presenta lateralmente un piano o un angolare che consentono di fissare la livella ad aste che devono essere disposte lungo la verticale (paline da segnalazione, stadi per livellazioni geometriche, ecc.).

Facendo riferimento alla fig. 12, l'asse $a-a$ tangente alla calotta sferica nel suo centro C rappresenta l'asse **della livella**; il piano tangente alla calotta sferica nel suo vertice C è detto **piano tangente centrale**; il raggio r della calotta sferica si chiama **raggio di curvatura della livella**.

Si definisce **prontezza della livella**, il tempo che il liquido impiega a disporsi in equilibrio, e quindi la bolla a fermarsi, dopo aver subito uno spostamento. La prontezza dipende dalla viscosità del liquido, dalla levigatezza della superficie interna della calotta sferica e dal raggio di curvatura della livella.

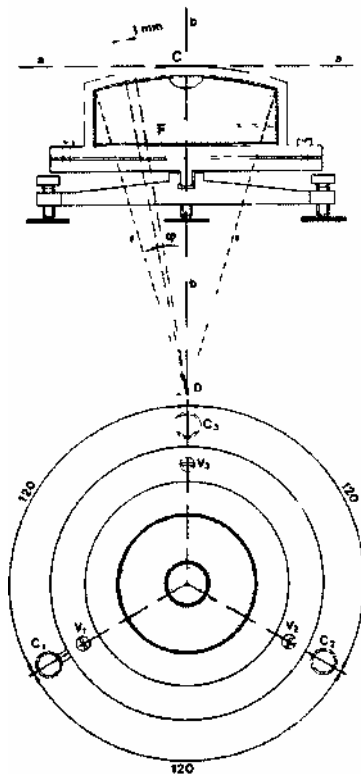


Figura 12 - Schema geometrico della livella sferica

Si definisce **sensibilità della livella** l'ampiezza dell'angolo di cui ruota l'asse della livella per lo spostamento della bolla di 1 mm lungo l'arco della calotta sferica. Le livelle sferiche utilizzate in topografia hanno valori di sensibilità superiori a $1'$.

Una livella sferica si dice rettificata quando il piano tangente centrale è perpendicolare all'asse $b-b$, cioè parallelo al piano di appoggio della fiale di vetro nell'armatura.

In una livella sferica rettificata, quando la bolla risulta centrata ossia quando si inscrive perfettamente al centro della fiala, il piano tangente centrale risulta orizzontale. Se la livella non è rettificata, quando la bolla è centrata, il piano tangente centrale sarà ancora orizzontale, ma tale condizione non varrà per il piano di appoggio dell'armatura.

Nei teodoliti e nei livelli, la livella sferica viene montata in aggiunta a una o più livelle toriche affidando alla prima l'operazione di disporre in modo approssimato il piano orizzontale (o l'asse verticale) agendo successivamente con la livella torica per ottenere la massima precisione dell'operazione.

2.5.2. La livella torica

Una livella torica è costituita da una fiala di vetro quasi completamente riempita con alcool, etere o benzina, la cui superficie interna ha la forma di una superficie torica.

La parte interna non occupata dal liquido è riempita dai vapori del liquido che formano una bolla la quale, per effetto della gravità, si dispone sempre nella parte più alta della fiala.

Il punto di intersezione C (vedi fig. 13) dell'asse di rotazione $a-a$ con il piano α , perpendicolare all'asse stesso e passante per il centro g del cerchio generatore del toro di cui appartiene la fiala, rappresenta il **centro di curvatura della livella**. Il piano α passante per il punto C interseca la livella secondo l'arco AB , detto **arco direttore**, con raggio $c = CM$ che rappresenta il **raggio di curvatura della livella**.

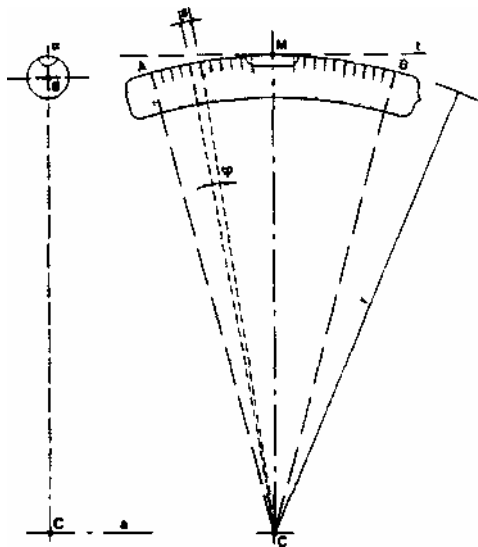


Figura 13 - Schema geometrico di una livella torica

La zona superiore della fiala porta incisa una graduazione con tratti a distanza costante (generalmente 2 mm): ogni spazio compreso tra due tratti successivi viene detto **parte**. Le parti sono disposte simmetricamente rispetto al punto M che rappresenta il punto centrale dell'arco direttore.

La tangente t all'arco direttore nel punto M è detta **tangente centrale** della livella torica.

La fiala di vetro è racchiusa in un'armatura metallica che presenta una base di appoggio piana. L'armatura è fissata alla base di appoggio mediante una cerniera a una estremità, ed è munita di un

dispositivo a doppia vite (V1, V2 - vedi fig. 14) di rettifica che permette piccoli spostamenti orizzontali e verticali della livella all'interno dell'armatura.

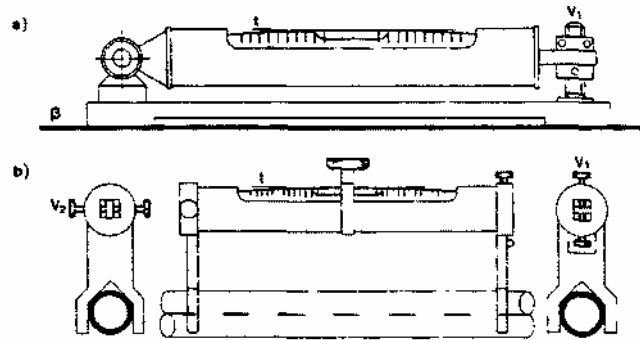


Figura 14 - Armatura di una livella torica

Le caratteristiche di una livella torica sono quelle già definite per la livella sferica e cioè la prontezza e la sensibilità. Se s rappresenta la dimensione della parte (2 mm) il valore dell'angolo corrispondente al tratto di arco direttore compreso tra due tratti successivi della graduazione varrà s/r e si chiama **valore angolare della parte**.

La **sensibilità** di una livella torica è convenzionalmente espressa come il valore angolare corrispondente a un tratto dell'arco direttore di 1 mm .

Essa viene espressa con la notazione a/b dove a indica il valore angolare della parte e b il valore della parte in millimetri.

Ad esempio una livella torica, indicata come da $30''/2$, avrà una sensibilità pari a $15''$.

Le livelle toriche applicate negli strumenti topografici hanno una sensibilità variabili da $1'$ fino a poche unità di secondo sessagesimale.

Una livella torica si dice **rettificata** quando la tangente centrale è parallela al piano di appoggio.

La bolla di una livella torica si dice **centrata** quando la mezzeria della bolla coincide con il centro M della graduazione.

Quando la bolla è centrata la tangente centrale risulta orizzontale.

Poiché risulta più facile individuare i menischi laterali della bolla, ossia le sue parti estreme, la centratura della bolla avviene facendo in modo che i due menischi siano equidistanti dal tratto centrale della graduazione. La valutazione di questa equidistanza è semplificata dalla presenza della graduazione come si può notare osservando la fig. 14.

Vediamo ora di descrivere le operazioni di svolgere per utilizzare una livella torica nelle sue possibili applicazioni:

RENDERE ORIZZONTALE UN ASSE.

Consideriamo un asse $m-m$ inclinato di un angolo a rispetto all'orizzontale. Si dispone la livella sull'asse $m-m$ (v. fig.15a) in modo che la tangente centrale sia ad esso parallela. Si ruota l'asse attorno al punto O fino a quando la bolla risulta centrata (v. fig. 15b) Infine si ruota la livella di un angolo pari a ρ .

Può risultare che:

- > la bolla rimane centrata (v. fig. 15b). In questo caso la livella risulta rettificata e l'asse $m-m$ è orizzontale in quanto parallelo alla tangente centrale;

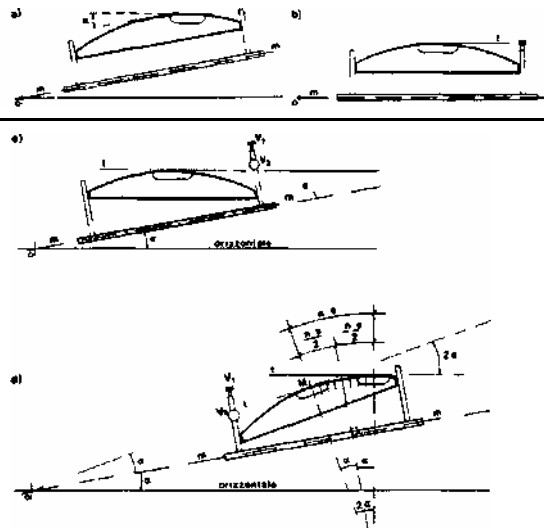


Figura 15 - Livella torica per rendere orizzontale un asse

> la bolla si sposta di una quantità $n-s$ (v. fig.15d) cui corrisponde una inclinazione dell'asse $m-m$ di una quantità pari a 2α dovuta per metà al fatto che la livella non è rettificata e per la restante metà al fatto che l'asse $m-m$ non è orizzontale. Si agisce sulla vite di rettificazione richiamando la bolla verso il punto M della quantità $1/2 n*s$ corrispondente a una rotazione della tangente centrale pari ad α e in questo modo si rettifica la livella. Infine si ruota ancora l'asse $m-m$ fino a quando la bolla risulta centrata rendendo così l'asse $m-m$ orizzontale.

RENDERE ORIZZONTALE UN PIANO.

Un piano può essere individuato da tre punti oppure da due rette giacenti su di esso. Di norma gli strumenti topografici presentano un supporto di base fornito di tre razze disposte a 720° , alle estremità delle quali si trovano tre viti calanti $C1, C2, C3$ (v. fig. 16). Le due rette a e b indicate in fig. 16 definiscono il piano di appoggio dello strumento. Affinchè questo piano sia orizzontale sarà sufficiente verificare che le due rette a e b , che gli appartengono, lo siano.

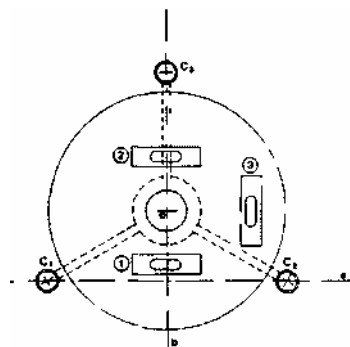


Figura 16 - Livella torica per rendere orizzontale un piano

Per cui, ricordando quanto detto sopra si procede nel seguente modo:

- > si dispone la livella in posizione (1) in direzione parallela alla retta a congiungente le viti $C1, C2$ e si centra la bolla con moto simultaneo e contrario delle due viti;
- > si ruota la livella di un angolo pari a ρ nella posizione (2) e, come visto nel caso precedente, se la bolla rimane centrata vuol dire che essa è rettificata, cioè che la sua tangente centrale è parallela al piano da rendere orizzontale;

- > se la bolla si sposta, si corregge lo spostamento per metà con la vite di rettifica V1, e per metà agendo nuovamente con moto simultaneo e contrario sulle due viti C1 e C2. In questo modo la retta *a* risulta certamente orizzontale;
- > infine si ruota la livella di un angolo pari a $\rho/2$ disponendola nella posizione (3) parallela alla retta *b* e l'eventuale spostamento della bolla si corregge operando sulla vite V3. A questo punto anche la retta *b* è orizzontale e di conseguenza il piano che contiene le rette *a* e *b* risulterà anch'esso orizzontale.

RENDERE VERTICALE UN ASSE.

L'asse da rendere verticale di norma è rappresentato dall'asse principale di uno strumento topografico collegato al piano del basamento sostenuto da tre razze dotate di viti calanti. Per costruzione tale asse è perpendicolare al piano del basamento e quindi l'operazione si riconduce a quella di rendere orizzontale un piano descritta sopra.

2.5.3. La livella torica a coincidenza di immagini

Pur non essendo più presente nei moderni strumenti topografici, descriviamo il principio di funzionamento di questa particolare livella, in quanto trova applicazione negli strumenti ottico meccanici di alta precisione che in alcuni casi possono ancora essere utilizzati. Questo particolare dispositivo permette una maggiore comodità e una maggiore precisione in quanto il centramento della bolla viene giudicato mediante la coincidenza di particolari tratti osservati mediante un microscopio semplice.

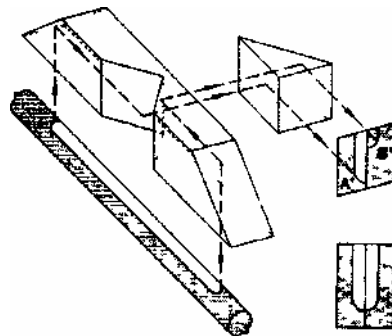


Figura 17 - Livella torica a coincidenza di immagini

Sulla fiala, che non riporta alcuna graduazione, è montato un sistema di prismi (v. fig. 17) attraverso il quale risulta visibile all'operatore, la bolla divisa a metà in senso longitudinale. La livella risulta centrata quando le due metà della bolla coincidono formando una sola immagine.

L'errore di centramento vale per una normale livella torica a graduazione $e = 0.1\sqrt{v''}$ e per la livella a coincidenza di immagine $e = 0.06\sqrt{v''}$ in cui v = sensibilità espressa in secondi sessagesimali.

2.6. LA BASETTA TOPOGRAFICA

Abbiamo già accennato come la basetta topografica sia un dispositivo che serve per collegare lo strumento topografico al treppiede. Essa è composta da un basamento e da una piastra basculante il cui assetto rispetto al basamento è controllato da tre viti calanti disposte ai vertici di un triangolo equilatero inscritto nel basamento.

Il basamento viene rigidamente collegato alla piastra di appoggio del treppiede mediante la vite di fissaggio.

La piastra basculante serve da supporto fisico per lo strumento. Essa è dotata di tre fori posti in corrispondenza delle viti calanti (oppure di un unico foro centrale) i quali ospitano i tre perni (o l'unico perno centrale) di cui sono dotati i basamenti di tutti gli strumenti topografici. Il centro della basetta è il centro del cerchio passante per i centri dei tre fori (o del foro centrale).

La piastra basculante è dotata di una livella sferica, utilizzata per rendere orizzontale la piastra basculante stessa, e di un piombino ottico per consentire di disporre il centro della basetta lungo la verticale passante per un punto a terra. Per gli strumenti dotati di piombino laser la basetta è sprovvista di dispositivi per il centramento.

L'operazione di messa in stazione della basetta consiste nel raggiungere, contemporaneamente, sia la condizione di centramento della livella sia la collimazione attraverso il cannocchiale del piombino ottico del punto a terra su cui si vuole posizionare lo strumento.

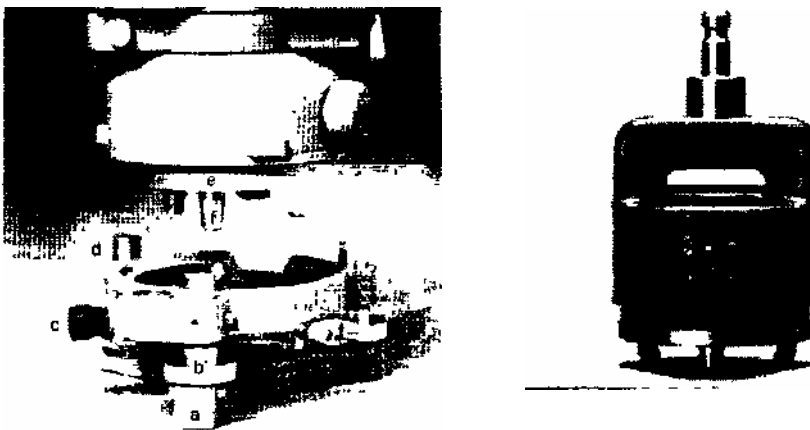


Figura 18 - Esempio di basetta topografica e del suo utilizzo (a - basamento, b - viti calanti, c - piombino ottico, d - piastra basculante, e - basamento dello strumento, f - perni di aggancio, g - dispositivo di bloccaggio). Accanto un dispositivo per l'aggancio di una mira topografica.

2.7. Condizioni di rettifica del teodolite

Nel teodolite si possono individuare tre **assi fondamentali**:

- > asse **principale** o di rotazione dell'alidada (a_1)
- > asse **secondario** o di rotazione del cannocchiale (a_2)
- > asse **terziario** o di collimazione del cannocchiale (a_3)

Le tre parti che compongono un teodolite (basamento, alidada e cannocchiale) devono essere assemblate in modo tale che si realizzino le seguenti condizioni geometriche, dette **condizioni di rettifica del teodolite**:

1. i tre assi fondamentali devono avere come unico punto di intersezione il centro strumentale;
2. l'asse a_2 deve essere perpendicolare all'asse a_1 ;
3. l'asse a_3 deve essere perpendicolare all'asse a_2

Poiché il verificarsi di tali condizioni dipende esclusivamente dalle tecniche costruttive realizzate (meccaniche e ottiche) è verosimile che esse siano verificate a meno di inevitabili errori. Gli **errori di rettifica** (classificabili come errori sistematici) che possono influenzare in modo non trascurabile le misure angolari sono:

- > **errore di inclinazione:** angolo i che la normale all'asse a_1 con l'asse a_2 ;
- > **errore di collimazione:** angolo c che la normale all'asse a_2 forma con l'asse a_3 .

Altri tipi di errore, che dipendono dalla buona riuscita o meno delle parti ottico-meccaniche del teodolite e che possono influire in modo non trascurabile sulla precisione di misura, sono:

- A. errore di eccentricità dei cerchi:** distanza e tra il centro della graduazione dei cerchi azimutale e zenitale e l'intersezione rispettivamente degli assi a_1 e a_2 ;
- B. errore di graduazione dei cerchi:** non corretto tracciamento o codifica delle graduazioni.

2.8. Condizione operativa del teodolite

Per far sì che il teodolite possa misurare correttamente gli angoli azimutali e zenitali, è necessario che l'asse a_1 sia verticale.

In questa situazione, infatti, se lo strumento è rettificato, si realizzano le seguenti condizioni:

- > il cerchio azimutale giace in un piano orizzontale
- > il cerchio zenitale giace in un piano verticale
- > l'asse a_2 è orizzontale
- > l'asse a_3 descrive piani verticali passanti per il centro strumentale.

Anche la condizione operativa del teodolite può essere realizzata a meno di un **errore di verticalità** v , definito come l'angolo che la verticale passante per il centro strumentale forma con l'asse a_1 del teodolite.

2.9. Messa in stazione del teodolite

Da quanto finora visto, sappiamo che il teodolite è in grado, una volta verificate le condizioni di rettifica e realizzata la condizione operativa, di individuare angoli azimutali con vertice coincidente con il centro dello strumento.

Poiché i vertici di tali angoli devono in realtà coincidere con punti del terreno, occorre stabilire una relazione tra queste entità puntuali che permetta la misura degli angoli necessari alle operazioni di rilievo.

Innanzitutto notiamo che per la definizione di un angolo azimutale data in 2.1, non è necessaria la coincidenza tra il centro dello strumento e il vertice dell'angolo azimutale, ma è sufficiente che questi due punti appartengano alla medesima verticale.

L'operazione di **messa in stazione del teodolite** consiste appunto nel realizzare quest'ultima condizione.

Individuato il punto di stazione a terra, si procede alla messa in stazione di un treppiede e di una basetta topografica. Il teodolite viene quindi inserito nella basetta: in questa condizione l'asse principale del teodolite si troverà sulla verticale del punto a terra con la precisione tipica della livella sferica che ha consentito la messa in stazione della basetta topografica.

Per affinare questa operazione, si perfeziona la verticalità dell'asse principale mediante la livella loricata montata sull'alidada seguendo le procedure indicate nei paragrafi 2.5 e seguenti utilizzando le tre viti calanti della basetta che ora forma, con il teodolite, un unico corpo rigido.

Al termine delle operazioni di centramento della livella loricata, il centro strumentale del teodolite si troverà sulla verticale del punto di stazione a terra a meno del già citato errore di verticalità che, in base a quanto visto, sarà dell'ordine di grandezza della sensibilità della livella torica montata sullo strumento.

2.10. Mezzi di lettura ai cerchi negli strumenti ottico-meccanici

Abbiamo già detto che il cerchio orizzontale è solidale alla basamento, mentre i relativi indici di lettura sono solidali all'alidada; il cerchio verticale è solidale al cannocchiale, e i relativi indici di lettura sono interni all'alidada.

I cerchi graduati sono di vetro ottico; la graduazione, finissima (lo spessore dei tratti è dell'ordine di 1/10 o 1/100 (mm), è incisa direttamente sul vetro, o riprodotta fotograficamente. Il raggio di tali cerchi varia da 4 ad 8 cm.

L'osservazione ai cerchi si esegue con microscopi composti, il cui percorso è notevolmente complesso. All'interno del teodolite vi sono dei prismi per convogliare le immagini dei cerchi nel cannocchiale di lettura, e specchi per illuminare i cerchi stessi, convogliando luce (vedi fig. 19).

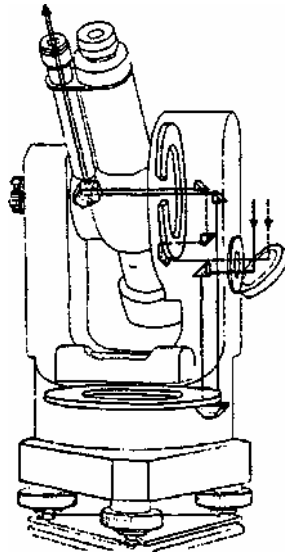


Figura 19 - Illuminazione e lettura dei cerchi graduati in un teodolite ottico-meccanico

I dispositivi per la lettura delle differenti graduazioni sono tra i più importanti all'interno di uno strumento di misura. Non si possono osservare soltanto i valori corrispondenti ai tratti interi, bisogna anche apprezzare le frazioni delle graduazioni stesse.

Si leggono direttamente i gradi e le frazioni di grado incise sul cerchio e si valutano le frazioni di intervallo secondo due modalità:

- > mediante conteggio o stima (strumenti a stima)
- > mediante misura della frazione stessa (strumenti micrometrici).

2.10.1. Lettura a stima.

Il **nonio** (o verniero, dai nomi dei suoi inventori, il portoghese Nunes ed il francese Vernier) è il più antico sistema per stimare un intervallo di graduazione. È costituito da una scaletta ausiliaria affiancata a quella principale.

Si fraziona in N parti l'intervallo di una graduazione lineare, si affianca a $N-1$ intervalli della graduazione principale N tratti della graduazione del nonio, in modo che risulti:

$(N-1)d = Nd'$, dove d e d' sono le dimensioni rispettivamente di una parte della divisione principale e della divisione del nonio.

L'approssimazione del nonio è pari al valore di una suddivisione principale diviso il numero di suddivisioni del nonio: $a = d-d' = d/N$.

Si consideri per esempio la graduazione principale divisa in 10 parti ($N=10$), ad ogni parte corrisponda un intervallo di $10'$, la lunghezza corrispondente a $N-1$ parti viene suddivisa in 10 parti, ogni parte avrà una ampiezza d' pari a $9'$; la sensibilità è in questo caso pari a $1''$.

La lettura viene fatta sotto l'indice di lettura della scala del nonio leggendo direttamente le parti intere. La porzione residua è pari all'approssimazione a del nonio, moltiplicata per il numero di parti che portano alla coincidenza di un tratto della scala del nonio con uno della graduazione principale.

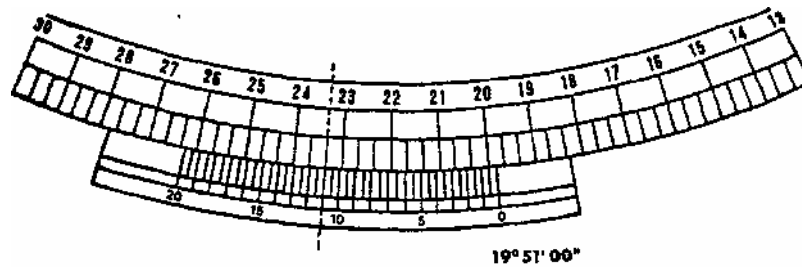


Figura 20 - Il nonio (o verniero)

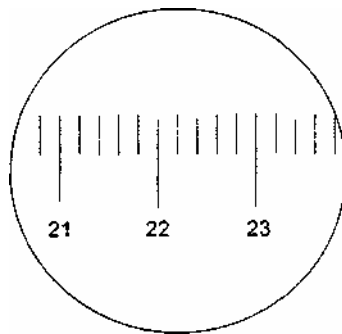
Il nonio così descritto non è più utilizzato nei teodoliti ottico - meccanici, ma se ne è parlato in quanto negli strumenti elettronici attuali viene spesso utilizzato un meccanismo di stima della parte frazionaria della graduazione principale che è simile:

incisa su un cristallo trasparente vi è una scala graduata in parti di larghezza leggermente minore o superiore a quella della suddivisione principale. Il passaggio della luce attraverso il cerchio graduato e questa seconda scala, prossima al cerchio, genera delle figure di diffrazione che variano a seconda della posizione di entrambe le divisioni, del cerchio e della scala del nonio. Queste figure, opportunamente rilevate, vengono digitalizzate elettronicamente e consentono di apprezzare le parti frazionarie con accuratezza anche di $1/100$ della graduazione principale.

L'utilizzazione del microscopio composto nella lettura delle frazioni di graduazione del cerchio, ha un impiego generalizzato negli strumenti topografici ottico-meccanici. Le sue svariate applicazioni si ricollegano ad alcuni schemi fondamentali.

Il **microscopio a stima** (vedi fig. 21) è un metodo semplice di lettura dei cerchi: per realizzarlo all'interno del cannocchiale di osservazione dei cerchi basta interporre un reticolo. La lettura viene fatta in corrispondenza del reticolo leggendo le parti intere di angolo che precedono il filo del reticolo e stimando, solitamente, come percentuale che viene tradotta mentalmente in termini di frazioni di angolo, la porzione residua compresa tra un tratto della graduazione principale e l'indice di lettura.

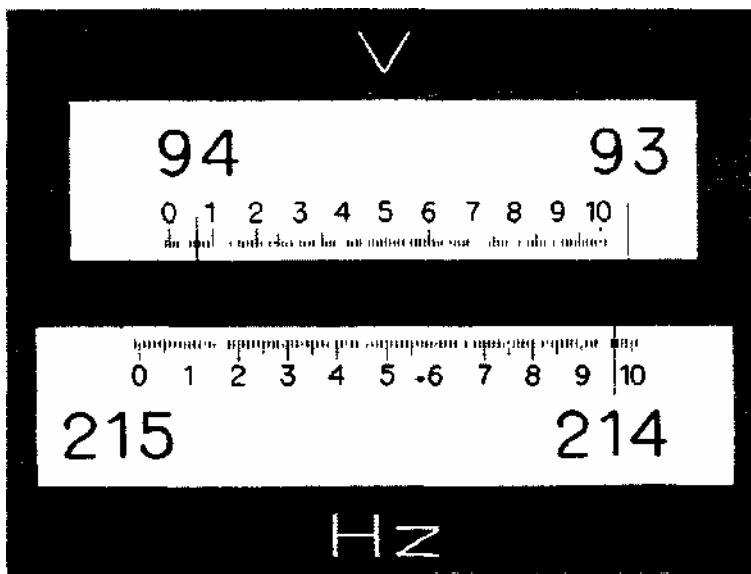
Dato, per esempio, un cerchio graduato di 10 cm di diametro, suddiviso al decimo di grado centesimale, esso avrà 4000 tratti uniformemente distribuiti sui $100 \times 3.14 = 314$ mm della sua circonferenza, con un intervallo tra tratto e tratto di $314/4000 = 0.078$ mm. Con l'osservazione ad occhio nudo non sarebbe possibile alcun apprezzamento della frazione di grado: utilizzando invece un microscopio composto a 30 ingrandimenti, l'intervallo apparente risulta dell'ordine di $0.078 \times 30 = 2.4$ mm, il cui decimo può essere facilmente stimato; l'approssimazione della lettura del valore di 0.01 gon risulta così garantita.



lettura: 21,^{gon}64

Figura 21 - Microscopio a stima

Il **microscopio a scala** (vedi fig. 22) è una variante al precedente metodo; anziché avere un reticolo semplice costituito da un filo si produce un reticolo a scala cioè fatto da tanti tratti equidistanti in un numero di parti sottomultiplo del valore inciso sulla graduazione principale (ad es. 60 o 100 secondo il sistema di graduazione). Il reticolo è posto più in alto o più in basso rispetto alla graduazione principale, da cui parte un filo in corrispondenza di un valore angolare esatto che serve da indice di lettura. L'escursione di questo filo su tutta la scaletta corrisponde all'escursione di una traccia di graduazione intera sulla scala principale. Ad esempio se la suddivisione fosse in gon per la scala principale, si può trovare una scaletta suddivisa in cento trattini e cioè in primi centesimali (0.01 gon).



lettura zenitale: 94,065
lettura azimutale: 214,965

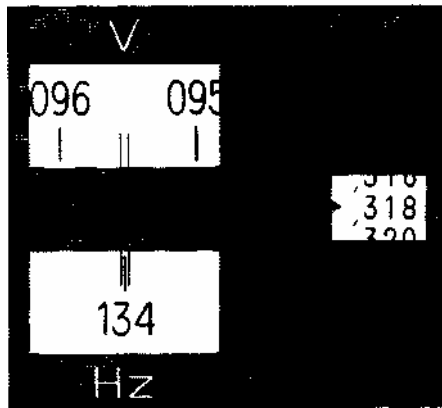
Figura 22 - Microscopio a scala

2.10.2. Strumenti micrometrici

I mezzi sopra descritti non consentono elevate precisioni di misura (~5 mgon). Nei sistemi di lettura in cui si ricorre ai **micrometri** viene sfruttata la sensibilità dell'occhio umano nel realizzare un puntamento o la coincidenza di due tratti: l'occhio umano ha la proprietà di aumentare il potere separatore di circa quattro volte quando debba stimare la coincidenza esatta di due tratti o la bisezione di un tratto all'interno di altri due.

Le letture possono avvenire per **bisezione o per coincidenza di immagini**. Schemi costruttivi diversi sono stati realizzati negli strumenti Wild, Zeiss, Kern.

Questi sistemi sfruttano in genere le funzioni di una lastra piano parallela di adeguato spessore, interposta sul cammino luminoso di osservazione dei cerchi; una rotazione sensibile del dispositivo può corrispondere ad uno spostamento micrometrico dell'asse di collimazione che ispeziona il goniometro. Infatti il movimento di una lamina piano-parallela, che trasforma lo spostamento dei raggi ottici in una rotazione, consente (la rotazione è più apprezzabile dello spostamento) di valutare immediatamente la frazione di graduazione corrispondente alla misura, leggendo il relativo valore sopra un cerchietto micrometrico.



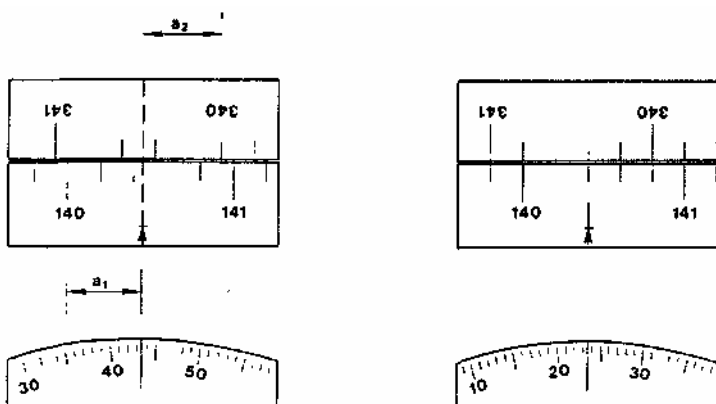
lettura azimutale: 134,318

Figura23 - Microscopio a micrometro ottico

Nella figura 23 si osserva un esempio di lettura (con micrometro ottico) per **bisezione** dei tratti della graduazione del cerchio. Il reticolo è costituito da due tratti paralleli fissi che normalmente cadono in una posizione intermedia interna ad un tratto di graduazione principale.

Una lastra piano - parallela interposta sul cammino ottico, manovrabile con una vite esterna, può portare a bisecare i due fili con un tratto esatto della graduazione principale. La rotazione corrispondente a questo spostamento può leggersi su un tamburo la cui graduazione è visualizzata all'interno del cannocchiale di misura degli angoli, è ingrandita ed osservata col sistema del microscopio a stima.

Alcune case costruttrici adottano il sistema della **coincidenza delle immagini** che utilizza due lastre piano-parallele.



prima della coincidenza

dopo la coincidenza

lettura 140,804235

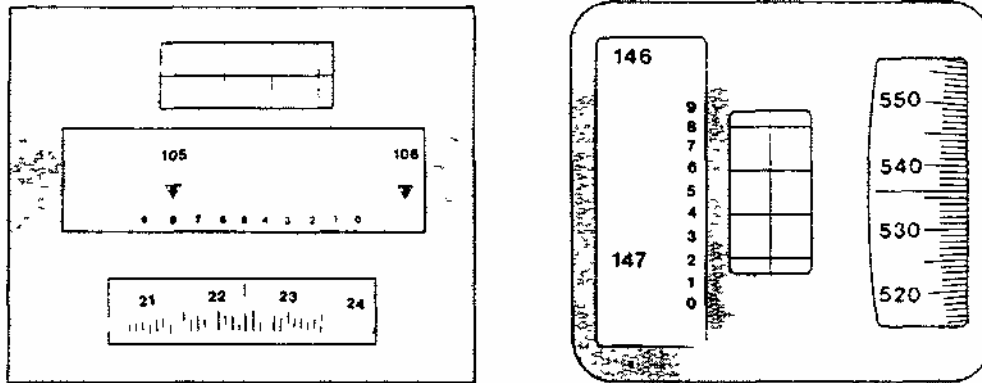
lettura 105, ^{gon}8224lettura 147, ^{gon}2536

Fig.24 Esempi di lettura a coincidenza di immagini

Nel campo di lettura del microscopio vengono riportate mediante un opportuno percorso ottico costituito da una successione di riflessioni e di rifrazioni, le graduazioni del cerchio di misura corrispondenti a posizioni diametralmente opposte, o anche ad angolo retto, in modo che risultino contemporaneamente visibili e confrontabili.

In genere le due immagini, corrispondenti a due zone diametralmente opposte del cerchio, sono sovrapposte e capovolte.

Sul percorso di ognuna delle due immagini è inserita una lastra piano - parallela, che un semplice meccanismo ad ingranaggi regola in modo che la rotazione di una sia uguale e di verso opposto a quella dell'altra.

Normalmente le due scale che sono accostate specularmente non combaciano. Se ad esempio su quella che si legge diritta vediamo la tacca di un angolo intero su quella superiore capovolta l'angolo che si dovrebbe leggere (cioè il precedente più l'angolo piatto) non è perfettamente a coincidenza, ciò in quanto è raro fare una lettura esatta all'angolo intero: la distanza fra queste due tacche rappresenta infatti il doppio della parte frazionaria della lettura da stimare che, sommata alla parte intera, costituisce la lettura angolare corretta.

Per misurare (e non stimare ad occhio) questa parte possiamo deviare il percorso ottico di entrambe le semi - immagini (secondo quantità misurabili) sino a portarle a coincidenza, attraverso la rotazione di una vite che comanda la rotazione contemporanea di due lastre piano - parallele. Il risultato è che ad un apparente spostamento orizzontale in un senso dell'immagine inferiore corrisponde un eguale spostamento in senso opposto di quella superiore capovolta. Lo spostamento che realizza la coincidenza, corrispondente a metà del tratto ancora da stimare, va sommato alla lettura intera della più piccola suddivisione principale che si legge direttamente sul cerchio anche senza l'aiuto di un indice di lettura. Questo indice potrebbe infatti anche essere omissso, perché è evidente quale incisione della graduazione diritta coincida con quella superiore su un angolo più grande di p . Anche qui, come nel caso precedente, la rotazione delle lamine piano - parallele è trasformata in un valore angolare letto su una seconda scala micrometrica visualizzata accanto alla scala principale.

Altre case costruttrici anziché utilizzare questo metodo inseriscono sul percorso ottico, che proviene dagli opposti lembi del cerchio, delle coppie di cunei ottici emisimmetrici traslabili in altezza. Lo spostamento lineare tra le facce prospicienti questi cunei si traduce in uno spostamento angolare uguale e contrario tra le porzioni di cerchio visualizzate diritta e capovolta.

La sensibilità nella misura angolare può spingersi anche ad una frazione di 0.0001 gon ($s < 0,1$

mgon). La precisione conseguente, nel caso ad esempio in cui $e=1/10$ 0.1 mgon sarebbe $1/4 \cdot 10^{-7} = 2.5 \cdot 10^{-8}$.

Questa sensibilità non è ancora stata raggiunta con i moderni teodoliti digitali a cerchio codificato. È da mettere tuttavia in evidenza come la precisione di misura angolare non coincida con quella di lettura per la presenza congiunta di numerose altre cause di errore, che in seguito verranno esaminate.

2.10.3. Mezzi di lettura ai cerchi negli strumenti elettronici

I metodi di misura elettronica degli angoli, vengono spesso di classificati in funzione della tecnica con cui vengono letti i cerchi e di conseguenza dalle modalità con cui vengono incisi.

Vi sono dei teodoliti elettronici che utilizzano **cerchi codificati** che permettono di conoscere automaticamente la posizione assoluta dell'indice di lettura all'interno del goniometro, e quindi della lettura zero dello stesso, ed altri che eseguono la lettura a **cerchi graduati**, che in genere consentono di misurare una posizione angolare relativa rispetto ad una precedente.

Nel primo caso avviene una **misura assoluta** della direzione angolare e nel secondo una **misura incrementale**.

Una seconda classificazione è basata sulle modalità di misura angolare: questa può avvenire **staticamente o dinamicamente**. Nel primo caso il cerchio rimane, come in un teodolite tradizionale, solidale alla base, mentre nell'altro caso il cerchio subisce una rotazione che non è quella dell'alidada ma è prodotta da dei micromotori continuamente attivi durante la misura.

Parliamo prima di alcuni concetti sulla lettura elettronica, codificata o graduata (si può chiamare in sintesi lettura digitale) per poi entrare in merito a particolari tipi di teodoliti elettronici o stazioni totali ed ai relativi sistemi di lettura.

Come anticipato, siamo in ogni caso in presenza di strumenti del tutto simili a quelli tradizionali, con cerchi di cristallo sui quali la graduazione, codificata o numerata è ottenuta ancora attraverso processi di fotoincisione.

2.10.3.1. La lettura assoluta

Supponiamo ora di distendere su di un tratto rettilineo l'intera circonferenza sulla quale è incisa una particolare graduazione (Fig.25). Definiamo su un'origine il valore zero e sulla fine dell'incisione che corrisponde alla fine del segmento stabiliamo la lettura (sviluppo della circonferenza) $c=2\pi r$.

Cerchiamo di capire con quali mezzi, come è possibile, in modo digitale, leggere i cerchi.

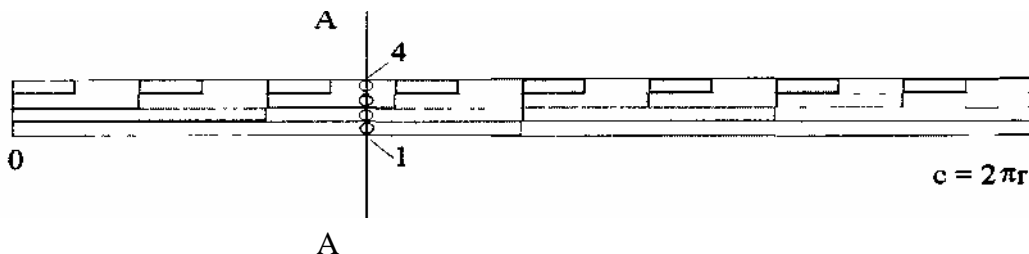


Fig.25 Principio della lettura assoluta

Poniamo di dividere questo tratto lungo e in due parti. Una parte sia annerita in modo da renderla opaca alla luce e l'altra metà sia trasparente. Così si è operata una prima suddivisione per due del cerchio. Lo spessore di queste righe opache sia dell'ordine di qualche decimo di mm, così che in pochi mm se ne possano disegnare ad esempio 16 o 32. In una riga successiva si divide lo stesso intervallo e in quattro parti e si anneriscono alternativamente due di queste quattro parti. Supponiamo di fare la stessa operazione in una terza

riga, dividendola ora in 8 parti ed ancora per esempio in una quarta riga ove le suddivisioni saranno 16.

In una posizione qualsiasi del cerchio, su queste suddivisioni parallele, supponiamo vi siano quattro fotodiodi e di fronte a questi, sull'altra faccia del cerchio di cristallo, una sorgente luminosa. Immaginiamo di dover fare una lettura quando questi fotodiodi si trovano ad esempio nella sezione A-A.

Leggendo i segnali di luce e di buio provenienti dai fotodiodi possiamo, in modo assoluto, anche se con una precisione abbastanza scarsa in questo esempio, sapere ove si trovano i fotodiodi rispetto al cerchio, cioè all'interno di questa banda che abbiamo disteso.

Nel caso esaminato in figura i fotodiodi che permettono il passaggio della luce, ognuno a seconda della presenza di una zona trasparente od opaca, segnalano il primo la presenza di una zona scura (0), il secondo la presenza di una zona chiara (1), il terzo la presenza di una zona scura (0) il quarto quella di una zona trasparente (1). Questo risultato è, in linguaggio binario, il numero equivalente alla lettura angolare.

Possiamo infatti renderci conto che attraverso il primo fotodiodo siamo in grado di dire che eseguiamo una lettura minore di $c/2$. Attraverso il secondo fotodiodo possiamo anche dire che la lettura è maggiore di $c/4$ ma sempre minore di $c/2$, attraverso il terzo si può dire che è maggiore di $2c/8$ ma è anche minore di $3c/8$ e attraverso il quarto fotodiodo si può dire che è maggiore di $5c/16$ ma anche minore di $6c/16$, quindi nell'esempio la lettura angolare finale, essendo $c=400$ gon, sarà un numero maggiore di 125 gon e minore di 150 gon.

In maniera approssimata siamo ora grado di fare queste letture angolari; l'errore massimo in questo esempio poco realistico, è la metà della più piccola suddivisione, cioè $\pm 12,5$ gon: è chiaro che una lettura angolare con errore così alto è insufficiente.

Occorre ora scendere dal principio di funzionamento alla pratica applicazione: ci si rende conto che non si può moltiplicare di molto, per problemi fisici di spazio, il numero dei fotodiodi, come pure non si può suddividere all'infinito la larghezza della corona circolare del cristallo.

Questo sistema di misura assoluta, come pure quello incrementale avrà bisogno necessariamente di un secondo sistema di lettura fine, che permetta cioè la lettura di frazioni delle più piccole parti intere nelle quali è suddiviso il cerchio, in analogia a quanto avveniva nei teodoliti tradizionali col sistema micrometrico. Dei sistemi micrometrici di lettura digitale parleremo più avanti, un cenno se ne fece parlando del nonio, per ora ci basti sapere che sono necessari.

Abbiamo parlato di lettura digitale assoluta del cerchio, in questo caso infatti è possibile sapere esattamente dove si trova l'ipotetica lettura di zero rispetto all'asse di collimazione.

2.10.3.2. Lettura incrementale.

La misura incrementale di una direzione angolare avviene in generale in due fasi distinte:

- > determinazione approssimata effettuata dinamicamente durante la rotazione dell'alidada necessaria per la collimazione
- > determinazione di precisione effettuata a collimazione avvenuta calcolando la posizione dell'indice di lettura rispetto all'ultimo impulso contato. In questa fase un diodo fornisce un segnale proporzionale alla luminosità della zona d'ombra sul punto di misura.

La novità è che il cerchio ruota per effetto del trascinamento di un piccolo elettromotore; per ogni misura angolare il cerchio fa una rotazione completa ed è letto da due diodi all'infrarosso, di cui uno fisso (posto sulla circonferenza interna) e l'altro mobile (posto sulla circonferenza esterna). Il cerchio fisso definisce lo zero, cioè la direzione d'origine (il cerchio non è codificato e non è dunque assoluto): l'angolo azimutale da misurare è quello tra i due diodi. Se tali assi fossero su due punti iniziali dell'intervallo periodico di graduazione ξ_0 , la differenza di fase sarebbe nulla e la

misura dell'angolo consisterebbe in un numero incognito di unità di fase. Si ha perciò in generale:

$$f = n\mathbf{f} + D\mathbf{f}$$

dove $D\mathbf{f}$ è la differenza di fase. Per conoscere il valore di f sono necessari il valore di n , misura grossolana, e di $D\mathbf{f}$, misura raffinata. Entrambe le misure sono eseguite simultaneamente. La misura grossolana viene eseguita da un circuito elettrico di conteggio dei segnali di chiaro e scuro trasmessi da un fotodiodo.

Questo indice di lettura per conteggio è solidale all'alidada e misura così la rotazione tra il sensore ed una posizione convenzionale del cerchio che è solidale al basamento.

Si è in grado cioè, a partire da questo zero del tutto convenzionale, (perché assume ad esempio la lettura zero all'accensione strumentale) di sommare o di sottrarre il numero di volte che il sensore "vede" uno di questi passaggi tra il chiaro e lo scuro.

Poiché lo stesso valore di luminosità si ottiene in due punti diversi, la determinazione fine deve essere effettuata mediante una distribuzione di diversi diodi. Uno dei problemi è capire automaticamente qual è la direzione di somma e quale quella di sottrazione di questi conteggi, ad esempio l'oraria di somma e l'antioraria di sottrazione, in altri termini occorre cioè capire qual è la direzione di rotazione del cerchio.

Ciò si risolve utilizzando più sensori a fotodiodo, sfasati angularmente di quantità note, cioè posti in parti diverse del cerchio. Avendo collocato attorno al cerchio più fotodiodi con un certo sfasamento noto, a seconda della rotazione oraria o antioraria dell'alidada, un segnale arriva sul tratto opaco o luminoso prima o dopo l'arrivo dell'analogo segnale proveniente da altri fotodiodi a seconda che si ruoti l'alidada in senso orario od antiorario. La sequenza di tratti trasparenti ed opachi ha cioè un certo ordine se si ruota in senso orario e l'ordine inverso se si ruota in senso antiorario.

In genere tutti i metodi di lettura digitale usano più serie di fotodiodi disposti in parti diverse del cerchio.

Vi è poi il problema identico a quello della lettura analogica dei cerchi graduati: quello di saper arrivare ad una approssimazione della misura angolare più spinta della minima suddivisione; serve cioè un interpolatore.

Un comune denominatore di molti di questi sistemi è il metodo di interpolazione utilizzato: il sistema interpolatore è in genere costituito da una seconda graduazione incisa su un piccolo vetrino di cristallo solidale all'alidada (od al cannocchiale per le distanze zenitali) interposto alla graduazione principale in prossimità del sensore ottico, in modo tale che la luce, passante per il cerchio e questa seconda scala produca delle frange di interferenza.

Queste vengono "lette" a loro volta con altri sensori digitali (CCD) che ricevono e misurano i livelli di grigio delle frange così prodotte.

A seconda della serie di livelli di grigio di questa figura di interferenza che è un tratto abbastanza ampio rispetto alle minime suddivisioni " m ", (ad esempio di 16m, 32m), o per meglio dire, a seconda della posizione dei livelli di grigio e dell'intensità dei livelli di grigio, si ha la possibilità di interpolare all'interno della minima suddivisione sulla quale cade l'indice di lettura.

Questo avviene in quanto il segnale ottico viene convertito in forma digitale e viene misurato lo sfasamento $D\mathbf{f}$ dell'onda interferometrica così osservata con una sensibilità pari o migliore di 1/100 della graduazione principale. Si è realizzato così un micrometro digitale.

2.10.4. Esempi di sistemi di lettura

Il primo sistema che esaminiamo è quello della Leica-Wild adottato negli strumenti Theomat T2002 e nel Theomat T3000. Si tratta di un sistema di lettura dinamica di alta precisione, che essenzialmente si basa su misure di fase, per cui la misura di una direzione si trasforma nella misura di un intervallo di tempo.

Uno degli errori di cui è affetta la misura angolare è l'errore residuo di graduazione: questo errore è pressoché inevitabile, ma si riduce tradizionalmente con il metodo della lettura a strati, attraverso la reiterazione o la ripetizione.

Nel metodo di lettura dinamica è invece possibile tenere in considerazione (misurare in un certo senso), tutte le suddivisioni di ogni parte del cerchio ad ogni singola lettura goniometrica, riducendo con ciò in teoria a zero sia questo errore, sia l'errore di eccentricità dell'alidada: ciò avviene nello strumento Wild T2002.

Entrambi i cerchi di 52 mm di diametro sono divisi in 1024 intervalli, tutti osservati ad ogni misura attraverso una rotazione completa del cerchio di cristallo graduato in identici intervalli trasparenti - opachi. Il segnale luminoso, tradotto dai fotodiodi in segnale elettrico, non è più un segnale statico ma una vera e propria onda elettromagnetica in quanto il cerchio ruota continuamente.

Questo segnale, variabile nel tempo e dipendente dalla rotazione del cerchio, proviene da due predisposte barriere di fotodiodi, una solidale all'alidada (R) e posizionata sulla parte interna del cerchio e la seconda (S) fissa al basamento ed esaminante la parte esterna dello stesso cerchio.

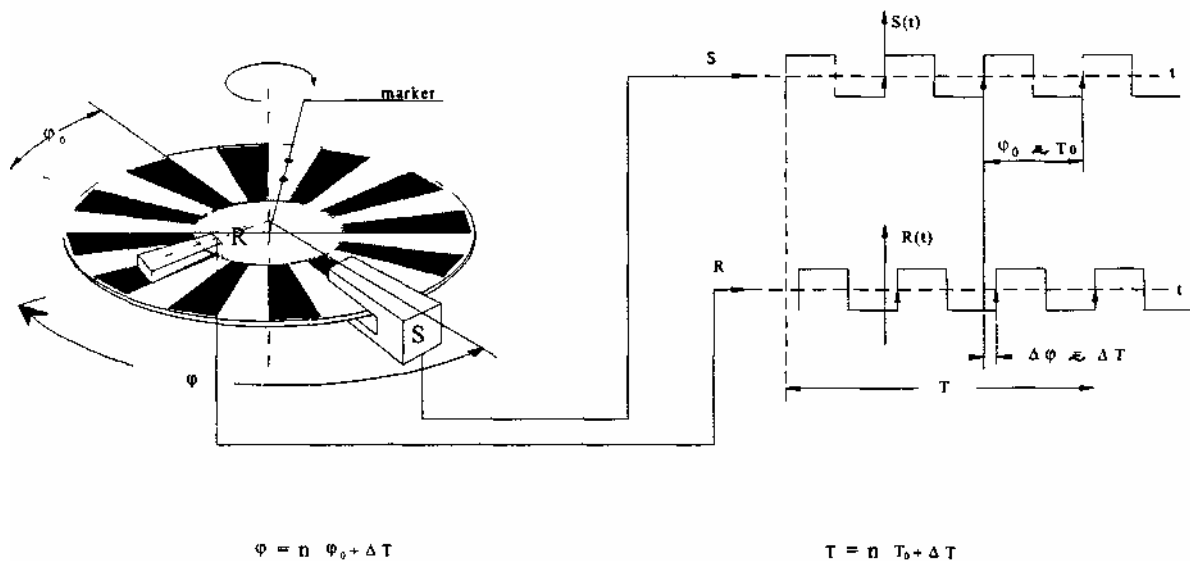


Fig. 26 Sistema assoluto dinamico Leica Wild

Durante la rotazione del cerchio il segnale luminoso ad onda quadra, trasformato dai fotodiodi in segnale elettrico, permette ad ogni istante t (la completa rotazione del cerchio avviene in 338 ms), di misurare lo sfasamento fra i due segnali S e R e mediare tutte le numerosissime misure di sfasamento eseguite in questo breve intervallo di tempo.

La misura di questo sfasamento costituisce la misura "fine" dell'angolo, similmente ai distanziometri ad onde: l'angolo \mathbf{f} che, dal centro di rotazione è sotteso tra il sensore solidale al basamento e quello solidale all'alidada sarà uguale a

$$\varphi = n\varphi_0 + \Delta\varphi$$

dove n è una costante intera che si ricava dal conteggio del numero di chiaroscuri osservati da L_S o da L_R .

Nel caso in esame $f_0 = 2p/1024$, essendo f_0 la più piccola parte di graduazione del cerchio. Esiste dunque una misura approssimata nf_0 ed una misura fine Df .

Per eliminare l'errore di eccentricità, sia i sensori Ls che i sensori LR sono in realtà coppie di sensori diametralmente opposti. Un unico processore presiede e media le numerosissime misure che danno poi luogo alla lettura azimutale e zenitale. La misura ed il calcolo avviene per entrambi i cerchi in meno di un secondo.

È anche possibile predisporre lo strumento per la lettura continua che può avvenire a cadenza di 0,1 s o di 0,15 s, diminuisce però in questo modo la precisione di lettura.

Per il cerchio azimutale Ls è posto nella posizione convenzionale dello zero della graduazione, per il cerchio zenitale Ls è in direzione dello zenit mentre LR è nella direzione del cannocchiale. Il sistema di lettura, dunque, è un **sistema assoluto**.

Per correggere le letture zenitali dall'errore di verticalità, il percorso della luce infrarossa dei sensori zenitali viene preventivamente deviato da un compensatore a liquido silicico. Quando viene impartito l'ordine di misura, un motore ruota il cerchio azimutale o zenitale ad una velocità rigorosamente costante entro limiti di tolleranza sempre controllati. Il conteggio del numero intero n di suddivisioni tra i sensori Ls e LR è semplice in quanto fra le graduazioni esiste una marca di riferimento, durante tutto il giro del cerchio un contatore conta il numero di -graduazioni dopo il passaggio del riferimento da LR sino al comparire dello stesso in Lg.

La misura fine della parte Df avviene dopo aver convertito il segnale completo (di 338 ms di durata) in forma digitale. Il segnale viene analizzato attraverso un contatore con frequenza di campionamento di 1,72 MHz. Dunque 338 ms osservati a 1,72 MHz corrispondono ad un numero di campioni "e" in 400 gon:

$$c = 338 \cdot 10^{-3} \cdot 1,72 \cdot 10^6 = 581 \cdot 10^3$$

La quantità minima "visibile" dal sistema digitale è allora di

$$t = (400 \cdot 10^3) / 581 \cdot 10^3 = 0,68 \text{ mgon}$$

Il periodo di chiaro scuro è di $T = 338 \text{ ms} / 1024 = 330 \text{ } \mu\text{s}$.

In realtà non si deve considerare la tolleranza limite "t" della lettura ma il suo scarto quadratico medio σ . Ipotizzando ragionevolmente la funzione densità di probabilità abbia la forma della distribuzione rettangolare e che il supporto di variazione sia appunto di 0.68 mgon, il valore di σ si ottiene da

$$\sigma = \pm \frac{0,68 \text{ mgon}}{\sqrt{12}} = \pm 0,2 \text{ mgon},$$

in quanto si hanno 6 sensori diametralmente opposti.

Dobbiamo considerare ancora che le misure di fase conteggiate sono ben 1024 e, nel valutare la misura, si tiene conto di tutti questi contessi; per questo la precisione teorica limite aumenta di un

fattore $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1024}}$.

La radice di due al numeratore è dovuta al fatto che la lettura angolare è ottenuta per differenza delle fasi provenienti dai segnali Re S. In tal modo si ottiene per S il valore limite minimo:

$$\sigma_s = \pm (0,2 \text{ mgon} / 23) \cong \pm 0,01 \text{ mgon}.$$

Lo scarto quadratico medio minimo ottenuto in laboratorio, quindi in condizioni ideali ma non teoriche di misura, è stato tuttavia di 0,05 mgon. La casa costruttrice fornisce una deviazione standard di 0,15 mgon per entrambe le letture ai cerchi secondo le norme DIN 18723 (1).

¹che sono divenute lo standard per valutare le precisioni di teodoliti tradizionali ed elettronici.

La risoluzione di lettura è tuttavia spinta a 0,01 mgon. Il compensatore a liquido siliconico agisce su entrambi gli assi di rotazione del teodolite: principale e secondario, ed ha una precisione di rettifica di 0,03 mgon, diminuendo l'influenza dell'errore di verticalità anche sulle letture azimutali.

Di seguito è illustrato il sistema di misura continua, statica e con codificatore assoluto adottato nei teodoliti TI 000 e TI 600 della ditta Leica-Wild (Fig.27).

I cerchi azimutale e zenitale di 78 mm di diametro sono suddivisi in 1152 graduazioni, raggruppabili in maniera distinguibile in 128 settori (da 0 a 127).

In ciascun settore cioè vi sono $1152/128 = 9$ informazioni elementari (o divisioni a seconda di come le si intendono) di 0,27 mm di interasse. In maniera binaria queste 9 suddivisioni contengono: un "marker", cioè un codice che segna l'inizio del settore, 7 bit contenenti il numero di settore ed un bit di parità per il controllo delle letture.

I cerchi, fissi rispetto al basamento od all'asse secondario del teodolite, sono illuminati in prossimità dell'indice di lettura elettronico con un led a luce rossa che illumina una piccola parte del cerchio: circa 4 gon, di poco superiore alla dimensione di un settore che è $400/128 = 3.125$ gon, proiettando la luce al di là del cerchio. La luce, dopo il passaggio attraverso una lente ingrandente, cade su un sensore formato da una serie di 128 fotodiodi. Questi fotodiodi sono governati da un processore che converte il segnale analogico luminoso in forma digitale cosicché un numero binario traduce lo stato luce/buio per ognuno dei fotodiodi.

Su 4 gon di ampiezza del segnale luminoso sono posti 128 fotodiodi, ovvero vi sono su un settore di 3.125 gon, esattamente 100 fotodiodi: è questo il sistema micrometrico di lettura all'interno di ciascun settore,

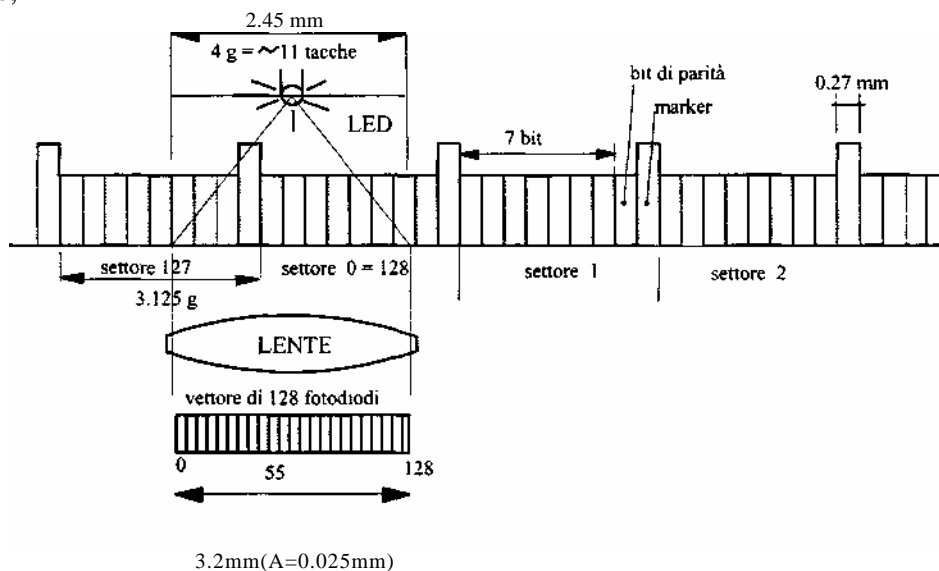


Fig.27 Il sistema di lettura del teodolite Leica Wild Ti 1600

Il diodo led illumina dunque sempre almeno un marker di settore e permette al processore di capire sotto quale dei due o tre settori si trova il centro del led ed il marker necessario per la lettura micrometrica.

Chiamiamo dunque con "N" il numero di settore riconosciuto in maniera assoluta, per la parte di lettura micrometrica il processore traduce in modo digitale il numero di frazione di settore f da zero a 100 corrispondente al numero di pixel al di fuori della marca di riconoscimento del settore. La lettura angolare corretta sarà allora

$$l = \frac{(N-f) \cdot 400}{128}$$

Nell'esempio di figura la lettura sarà $N=0=128$; $f=0.55$ cioè è il 55-esimo fotodiodo su 100 utili.

$$1 = \left(\frac{128 - 0,55}{128} \times 400 \right) = 398.2815 \text{ gon}$$

Ci domandiamo ora quale sarà la precisione di lettura. Notiamo dapprima che le nove suddivisioni proiettate su 100 fotodiodi consentono di stimare la parte frazionaria del settore con una approssimazione superiore al pixel, cioè con scarto quadratico medio a di circa $\pm 0,15$ pixel. Per ogni lettura si avrà quindi

$$s = \pm \frac{0,15/100 \times 400}{128} \text{ gon} = \pm 4,7 \text{ mgon}$$

Ogni 3 ms avviene una lettura. La misura si ricava dalla media di 133 letture corrispondenti ad un intervallo di misura di 400 ms; il valore teorico di a si riduce quindi a

$$\sigma_{\min} \pm \frac{s}{\sqrt{133}} = \pm 0,4 \text{ mgon}$$

La casa fornisce per il T1600 uno sqm standard (a norme DIN 18723) di $\pm 0,5$ mgon, mentre la risoluzione arriva a 0.1 mgon. Lo strumento è dotato di un compensatore a pendolo per l'indice zenitale.

Vengono di seguito citati brevemente alcuni ulteriori sistemi di lettura.

Nel sistema assoluto statico TOPCON i cerchi, sia l'orizzontale che il verticale, di 71 mm di diametro, sono in realtà formati dall'accoppiamento di due dischi di cristallo flint di 4 mm di spessore concentrici e rispettivamente solidali alla parte fissa ed alla parte rotante (nel caso del cerchio orizzontale all'alidada ed al basamento). I cerchi suddivisi in 1 gon il primo ed in 2 gon il secondo sono osservati proiettando con un led le tracce di entrambi su un fotodiodo CCD che funge da micrometro in maniera simile a quanto descritto per lo strumento TI600. Le letture in realtà sono doppie in quanto diametrali. Lo sqm di lettura dei cerchi (a norme DIN 18723) è per lo strumento GTS6 o GTS6A di $\pm 0,6$ mgon e la misura avviene in 0,3 s. Questi strumenti sono dotati di doppio compensatore.

Lo strumento SOKKIA SET 2C è di caratteristiche e precisioni simili.

Anche gli strumenti AGA sfruttano due cerchi concentrici fissi solidali alla parte fissa ed alla parte rotante.

Il sistema di lettura è incrementale. Il principio di lettura micrometrica è induttivo essendo le suddivisioni dei cerchi conduttrici e percorse da corrente. È possibile misurare la differenza di potenziale DV fra i due cerchi, massima nel caso di ricoprimento e minima a metà graduazione. Per la misura angolare si contano il numero di lunghezze d'onda intere e si interpola la porzione di lunghezza d'onda per mezzo di convertitori A/D analogici digitali.

In questo modo, pur raggiungendo uno sqm (a norme DIN 18723) di $\pm 0,6$ mgon, comune ad altri strumenti, si tiene in realtà conto di tutta la suddivisione del cerchio, di modo che queste letture sono teoricamente esenti dall'errore di suddivisione. Anche questi strumenti sono dotati di doppio compensatore.

Infine citiamo il sistema dinamico incrementale della NTKON sullo strumento DTMA6 utilizza un sistema che è simile al sistema dinamico Leica-Wild. In questo caso la ditta fornisce uno sqm di lettura di $\pm 0,2$ mgon.

2.11. Misura degli angoli azimutali

In base alla definizione di angolo azimutale data in 2.1. e a quanto detto in precedenza sui teodoliti, si può definire operativamente un angolo azimutale come la differenza tra la direzione azimutale del punto avanti e la direzione azimutale del punto indietro.

In generale nelle misure di grandezze topografiche si possono commettere errori di lettura, di trascrizione e di individuazione del punto. Questi errori grossolani si presentano più raramente da quando sono stati introdotti i sistemi automatici di registrazione delle misure.

Tuttavia solo se il teodolite fosse perfettamente rettificato la misura dell'angolo azimutale consisterebbe nella esecuzione di due letture sul cerchio orizzontale ai punti avanti ed indietro. (Questo procedimento è adottato solo in caso di bassa precisione richiesta e qualora non si commettano errori grossolani).

In generale in uno strumento messo in stazione, sono presenti i tre **errori residui di rettifica**:

- > **v = errore di verticalità**, l'angolo che l'asse ai forma con la verticale nel punto di stazione
- > **i = errore di inclinazione**, l'angolo che l'asse a2 forma con la normale all'asse al
- > **c = errore di collimazione**, l'angolo che l'asse 3.3 forma con il piano normale all'asse a2

Alcune condizioni di rettifica influenzano poco le misure azimutali e più quelle zenitali o viceversa. Prima di esaminare come gli errori residui di rettifica influenzino le letture, è necessario ricordare che l'alidada ed il cannocchiale dei teodoliti sono costruiti in modo che la collimazione al punto P sia eseguibile in due posizioni diverse dello strumento, una con il cerchio zenitale a sinistra dell'osservatore, uno con il cerchio a destra. (CS e CD), in quanto si dimostrerà che l'uso di procedure di lettura coniugate elimina l'influenza di alcuni errori.

Lo studio degli errori è molto complessa, tuttavia, qualora non si intenda calcolare l'influenza globale degli errori, ma semplicemente, ipotizzando che gli errori siano abbastanza piccoli da poterne trascurare i quadrati e le potenze superiori, studiarli in prima approssimazione, si determina l'influenza di tali errori in modo separato.

2.11.1. Influenza degli errori residui nella misura degli angoli azimutali

Nel caso in cui l'asse a_2 non sia orizzontale a strumento in stazione, si dimostra facilmente che **l'errore di inclinazione i** ha un'influenza G_i sulla lettura azimutale che è funzione della distanza zenitale z :

$$\varepsilon_i = i \operatorname{ctg} z$$

L'errore ε_i ha valore e segno contrario nel caso si effettui la misura angolare nella posizione di cerchio coniugata.

Durante questa operazione il cerchio verticale ha assunto una posizione simmetrica rispetto all'osservatore per cui le corrispondenti letture ai cerchi si dicono anche con cerchio verticale a destra (CD) e con cerchio verticale a sinistra (CS) e sono di seguito indicate con L_s ed L_d .

Ora la lettura fatta al cerchio azimutale differirà di π ma l'influenza dell'errore ε_i sarà di segno opposto a quella fatta sulla precedente porzione di cerchio. In tal modo la lettura corretta, fatta ad uno dei due cerchi si ottiene da :

$$L = \frac{L_s + L_d \pm \pi}{2}$$

L'errore di collimazione e_c è dovuto alla non ortogonalità tra gli assi a_2 ed a_3 .

Detto c l'angolo che manca o che eccede l'angolo retto tra a_2 ed a_3 si può dimostrare che l'influenza e_c sulla lettura azimutale vale:

$$e_c = \frac{-c}{\text{sen } z} \tag{7}$$

e che ha segno uguale e contrario sulle letture fatte ai lembi coniugati del cerchio.

Anche in questo caso la lettura angolare corretta si potrà fare con la (6).

L'errore di verticalità e_v è dovuto alla non verticalità dell'asse primario.

Chiamato v quell'angolo che manca all'asse a perché sia diretto verticalmente dopo la messa in stazione, il calcolo dell'influenza di questo errore sulla misura degli angoli azimutali può essere fatto ricorrendo a considerazioni di trigonometria sferica.

Immaginando l'asse inclinato di v proiettato su una sfera unitaria (vedi figura 28) si ha, dalla trigonometria sferica sul triangolo ABC:

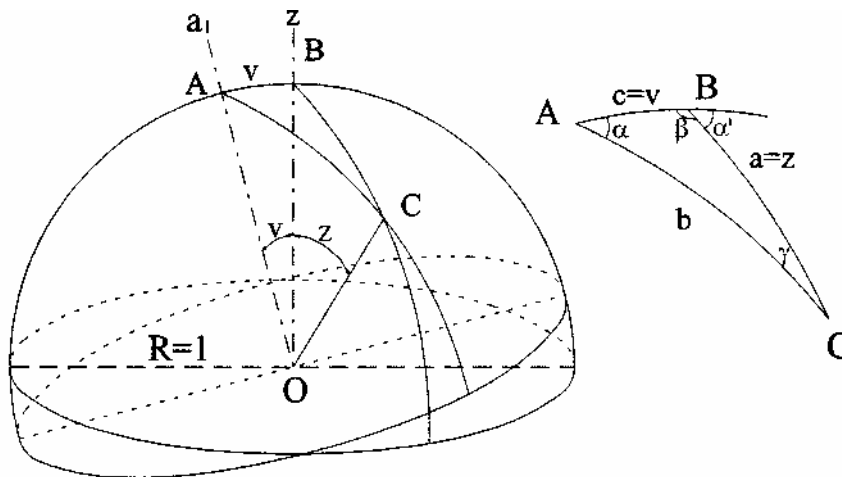


figura 28 - errore di verticalità

$$\text{sen } \beta \cot \alpha = \cot a \text{ sen } c - \cos c \cos \beta \tag{8}$$

e, tradotta sul triangolo ABC:

$$\text{sen } (\pi - \alpha') \cot \alpha = \cot z \text{ sen } v - \cos v \cos (\pi - \alpha')$$

ma

$$\text{sen } v \cong v \quad ; \quad \cos v \cong 1$$

$$\text{sen } \alpha' \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = v \cot g z - \cos (\pi - \alpha')$$

$$\text{sen } \alpha' \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} - \cos \alpha' = v \cot g z$$

$$\text{sen } \alpha' \text{ sen } \alpha - \cos \alpha' \text{ sen } \alpha = v \text{ sen } \alpha \cot g z$$

$$\text{sen } (\alpha' - \alpha) = v \text{ sen } \alpha \cot g z$$

$(\alpha' - \alpha)$ è l'influenza che ha l'errore di verticalità sulle misure dell'angolo orizzontale cioè:

$$(\alpha' - \alpha) \cong \varepsilon_v$$

$$\varepsilon_v = v \text{ sen } \alpha \cot g z \tag{9}$$

L'influenza di tale errore non si può eliminare perché non si conosce a priori la direzione spaziale di a_i e quindi l'angolo A.

Tale errore è quindi sistematico ma rifacendo la messa in stazione, ritoccando le viti calanti, si può supporre che l'errore residuo di verticalità sia cambiato in modulo e verso, per cui influenza in modo differente le misure azimutali che, mediate con le precedenti, appaiono soggette ad un errore di tipo accidentale.

2.11.2. Rettifica dell'asse di collimazione

Le letture sul cerchio orizzontale sono influenzate dagli errori di collimazione e di inclinazione, tuttavia se $\alpha = 0$ l'influenza dell'inclinazione i dell'asse secondario è nulla, mentre quella dell'errore di collimazione è uguale all'errore stesso: evidentemente in queste condizioni è conveniente procedere alla rettifica dell'asse di collimazione (metodo del punto in basso):

$$\alpha \cong 0 \qquad \varepsilon_i = i \tan \alpha \cong 0 \qquad \varepsilon_c = \frac{c}{\cos \alpha} \cong c$$

Si collima nella posizione C.S. un punto P tale che il cannocchiale risulti dunque pressoché orizzontale, si esegue la lettura L_S e se l'asse è deviato a sinistra rispetto all'asse di rotazione (L è la lettura esente da errore):

$$L_S = L + c$$

$$L_D = L + 200 - c$$

Sottraendo e sommando rispettivamente le due espressioni si ottiene:

$$\frac{L_S - (L_D - 200)}{2} = c$$

$$L = \frac{L_S + L_D - 200}{2}$$

Immaginiamo di aver fatto le letture C.S. $68,^{\text{gon}}2606$ e C.D. $268,^{\text{gon}}2600$: l'influenza dell'errore di collimazione, uguale all'errore stesso e risulta di $3 \text{ IO}''^4$ gon e la lettura priva di errore è 68.2603 : mantenendo lo strumento nella posizione C.D. si ruota l'alidada fino a fare la lettura 268.2603 . Il punto non risulta più collimato: si sposta il reticolo fino a che la collimazione sia di nuovo ristabilita.

Per quanto riguarda l'asse di rotazione del cannocchiale, l'errore di inclinazione non viene in generale corretto nei teodoliti ottico - meccanici, tuttavia è opportuno determinarne di tanto in tanto il valore per ragioni di controllo. Dopo aver corretto con la massima precisione possibile l'errore di collimazione, si collima un punto con una visuale notevolmente inclinata ($\alpha > 30$ gon, metodo del

punto in alto): $i \tan \alpha = \varepsilon_i = \frac{L_S - (L_D - 200)}{2}$

da cui si determina i dopo aver letto la distanza zenitale, anche se in modo approssimato. La determinazione di i non è tuttavia molto precisa, in quanto un errore residuo di collimazione, sia pur di modesta entità, produce un effetto vistoso, in quanto la visuale, come osservato, non è più orizzontale; infatti la semi-differenza tra le letture fornisce in questo caso non già quanto scritto

sopra ma: $\frac{c}{\cos \alpha} = +i \tan \alpha$

Si tratta dunque di verificare che non si sia prodotta una srettifica notevole: se si volesse procedere comunque ad una sia pur non precisa rettifica dell'asse secondario, mantenendo lo strumento nella posizione C.D. si ruota l'alidada fino a fare la lettura $L_D + i \tan \alpha$ e si ripristina la collimazione agendo sulle viti di rettifica dell'asse a_2

2.11.3. Errore di eccentricità

L'errore di eccentricità dell'alidada è dovuto al fatto che l'asse a_1 non passa per il centro geometrico O del cerchio azimutale ma in un punto Q di eccentricità e . (vedi Fig. 29)

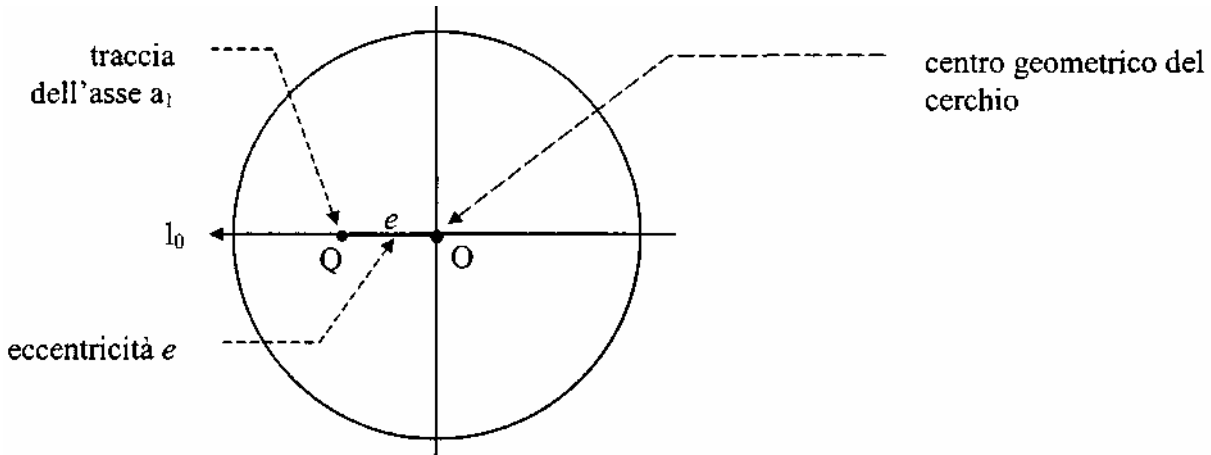
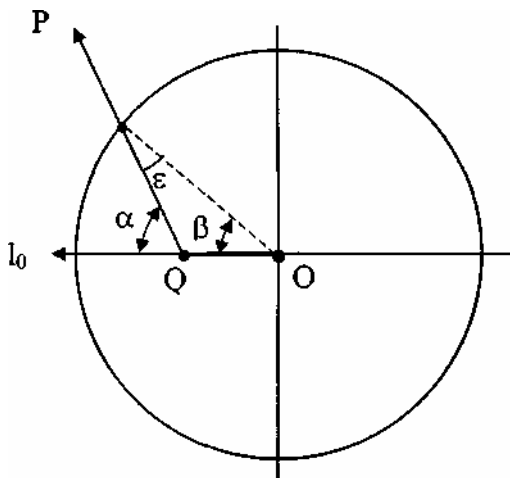


Fig. 29 errore di eccentricità

Per semplicità consideriamo l'origine della graduazione del cerchio (l_0) coincidente con la retta congiungente il punto O con il punto Q .

In questa situazione per collimare un punto P dovremo ruotare l'alidada di un angolo a . La rotazione naturalmente avverrà nel punto Q , traccia dell'asse principale a_1 sul cerchio azimutale:

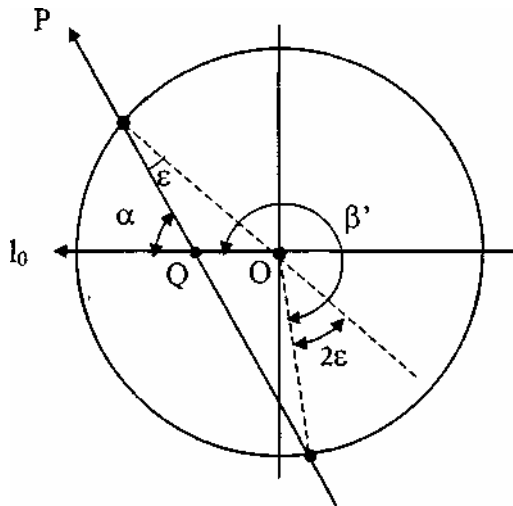


La lettura sul cerchio azimutale, corrispondente alla rotazione dell'alidada di a , sarà riferita invece al proprio centro geometrico O .

Ne consegue che ad una rotazione a dell'alidada corrisponde una misura angolare b diversa da a . Questo errore è dovuto all'eccentricità e del cerchio azimutale.

La relazione tra α e β sarà: $\alpha = \beta + \varepsilon$

Se effettuiamo la lettura sul cerchio azimutale diametralmente opposta otterremo un valore β' che sarà pari a: $\beta' = \beta + \pi + 2\varepsilon$



$$\beta' = \beta + \pi + 2\varepsilon$$

da cui $\varepsilon = \frac{\beta' - \beta - \pi}{2}$ che sostituita nella prima fornirà il valore corretto di α

$$\alpha = \beta + \frac{\beta' - \beta - \pi}{2} = \frac{\beta + \beta' - \pi}{2} \quad (5)$$

Per eliminare l'errore sistematico di eccentricità dell'alidada sarà sufficiente quindi, per ogni direzione collimata, effettuare le due letture coniugate e poi farne la media aritmetica.

Tutti i teodoliti elettronici ed alcuni teodoliti ottico - meccanici sono dotati di un doppio indice di lettura.

Le misure degli angoli azimutali possono dunque essere influenzate dalla presenza di errori residui di verticalità, di collimazione, di inclinazione, di eccentricità dell'alidada e del cannocchiale. Si è visto però che, a parte l'errore di verticalità che non è eliminabile, per quanto riguarda gli altri errori, si può eseguire una lettura corretta mediante l'applicazione della regola di **Bessel**: **In un teodolite è possibile eliminare, nelle misure angolari azimutali, l'influenza degli errori residui di collimazione, inclinazione, eccentricità dell'alidada e del cannocchiale, facendo per ogni punto collimato la media delle due letture agli indici diametralmente opposti, col cannocchiale cioè in posizione prima CS e poi in posizione CD.**

2.11.4. Errori di graduazione dei cerchi

Esistono ancora però gli errori del tracciamento della graduazione del cerchio. La suddivisione della graduazione del cerchio, pure essendo molto precisa, può essere non uniforme.

Le case costruttrici riescono a fornire delle curve d'errore nella graduazione dei tratti che evidenziano difformità angolari delle suddivisioni: alcune più grandi del dovuto su un tratto, altre più corte in un altro. Questi errori sono normalmente assai contenuti (attorno al secondo sessagesimale) e sono di tipo sistematico.

Si può capire però che la somma degli errori, valutata su tutto l'angolo giro deve essere nulla. Si cerca perciò di eliminare questi errori sistematici cercando di renderli accidentali col ripetere le osservazioni angolari su porzioni differenti di cerchio. Come valore più corretto si prenderà poi il valore medio della serie di misure angolari fatte.

È dunque evidente che questo errore al tendere del numero di letture ad N , se N è il numero di suddivisioni del cerchio, o ad $N/2$ per le letture diametrali, si annulla identicamente.

I metodi utilizzati per spaziare con le misure angolari su porzioni differenti del cerchio sono due:

- > la ripetizione e la
- > reiterazione

che hanno bisogno di teodoliti ripetitori e reiteratori rispettivamente.

I teodoliti ripetitori hanno la possibilità di bloccare rigidamente (mediante lo spostamento di una vite) il cerchio alla base (come nelle normali condizioni di lavoro) od alternativamente all'alidada, in modo che, cerchio ed alidada solidali ruotando sopra il basamento non spostino la lettura dell'angolo azimutale.

Una volta deciso il numero di ripetizioni per determinare un angolo α , le operazioni procedono così:

- > si collima il punto indietro facendo la lettura L_1 , con il cerchio bloccato alla base
- > si collima il punto in avanti, ottenendo un valore della misura dell'angolo con la regola di Bessel
- > per ogni ulteriore misura si blocca con la vite di ripetizione il cerchio all'alidada ritornando a collimare il punto all'indietro (la misura precedente resta fissa), senza fare la lettura, si sblocca il cerchio e lo si ricollega alla base, si ricollima il punto in avanti, ripetendo la misura

Alla fine delle n operazioni l'angolo azimutale corretto sarà:

$$\alpha = \frac{L_n - L_1 + 2k\pi}{n}$$

ove k è il contatore di angoli giri contenuti nell'angolo complessivo $n\alpha$. La prima e l'ultima lettura devono effettuarsi ad entrambi i lembi diametrali del cerchio o, come si dice, col cerchio zenitale a destra (CD) e col cerchio zenitale a sinistra (CS).

Gli errori dovuti alla graduazione risulteranno certamente ridotti, perché nella ripetizione sono state interessate differenti zone del cerchio.

I teodoliti reiteratori dispongono invece di una vite (normalmente protetta da una capsula) che serve solo per far scorrere a frizione il goniometro sopra il basamento, ruotandolo attorno all'asse principale. Appariranno quindi, nel cannocchietto di osservazione dei cerchi, porzioni differenti del cerchio. Una volta deciso il numero di reiterazioni n , dette anche *strati*, occorre fare per ogni punto collimato $2n$ osservazioni (col CS e col CD) e $2n$ puntamenti per ricavare alla fine n valori di direzione angolare relative ad ogni punto osservato. La rotazione da dare al cerchio azimutale dopo ogni strato sarà pari a $\pi/2n$, utilizzando strumenti con lettura diametralmente opposta, π/n nel caso meno frequente di utilizzo di strumenti a singolo indice di lettura.

Il metodo della reiterazione è più utilizzato perché più preciso della ripetizione, anche se richiede più operazioni: infatti, a parità di misure eseguite, la reiterazione richiede $2n$ collimazioni e $2n$

letture, mentre la ripetizione prevede solamente $2n$ collimazioni e 2 letture. Nella ripetizione infatti possono insinuarsi eventuali errori di trascinamento, dovuti al fatto che alidada, cerchio e sottostante basamento possono non essere perfettamente solidali; inoltre nella reiterazione si esplorano, con un numero ragionevole di misure, zone diverse della graduazione.

2.12. Misura degli angoli zenitali

Si è definito in precedenza l'angolo zenitale (ovvero la distanza zenitale) del punto P rispetto al punto O (centro dello strumento) come l'angolo compreso tra la direzione della verticale in O e l'asse del cannocchiale che collima P.

Possiamo definire operativamente tale grandezza come la differenza tra le direzioni zenitali misurate collimando il punto in oggetto e il punto posto sulla verticale. La distanza zenitale Z_P sarà pari alla differenza tra le letture sul cerchio zenitale effettuate in corrispondenza della direzione collimata e della verticale: $Z_P = I_P - I_0$

Per misurare tali angoli i teodoliti sono provvisti di un cerchio verticale (zenitale) a graduazione generalmente oraria, solidale con il cannocchiale, e quindi mobile con esso e indici di lettura fissati sull'alidada (una coppia di indici diametralmente opposti consente di eliminare gli effetti dell'errore di eccentricità del cerchio).

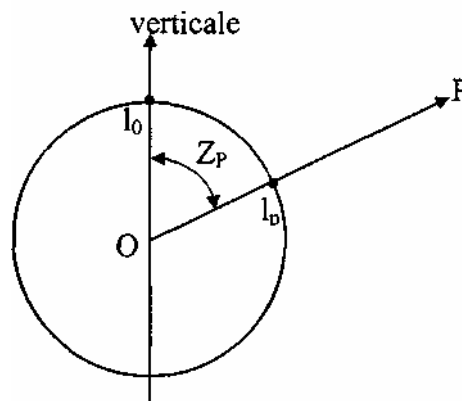


Fig.30 Definizione di angolo zenitale

In realtà nei teodoliti il cerchio zenitale viene posizionato in modo da far coincidere l'origine della graduazione (zero gon) con la direzione dell'asse principale (a_i), per cui in assenza di errori avremo: $Z_P = I_P$.

Il cerchio zenitale è posizionato in modo tale che, collimando la direzione dello zenith, si legga un valore uguale a zero gon; l'eventuale differenza di lettura si chiama "zenit strumentale" o "errore d'indice" (vedi Fig. 31):

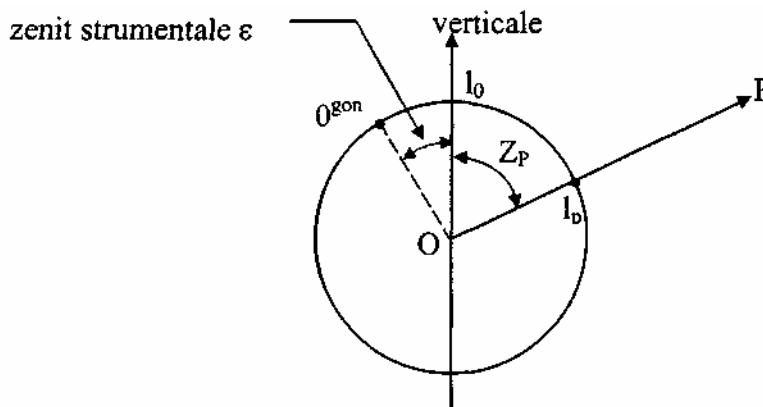


Fig. 31 – zenit strumentale

Come abbiamo già detto la graduazione del cerchio zenitale è crescente in senso orario e le letture possono essere effettuate nelle due posizioni coniugate di "cerchio a sinistra" (CS) e "cerchio a destra" (CD).

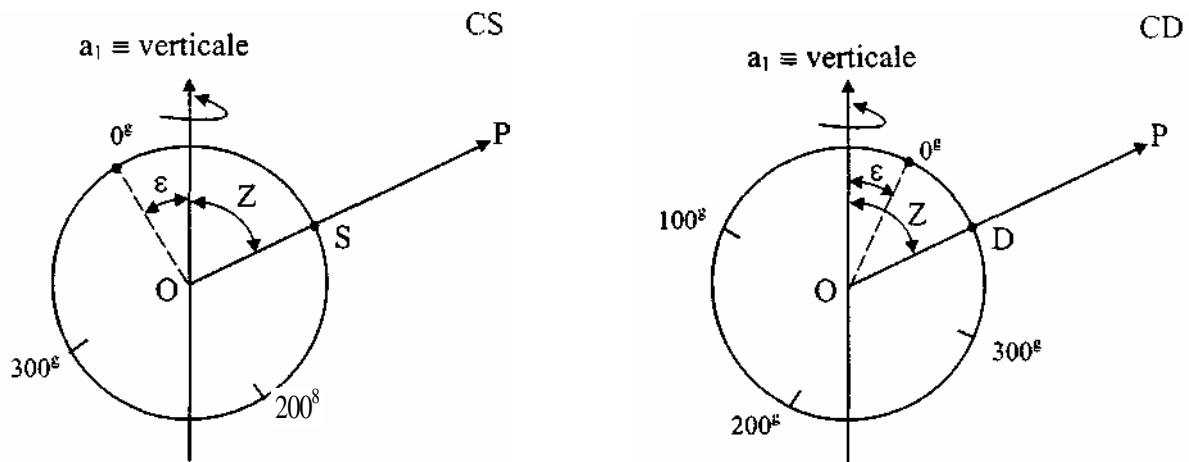


Fig. 32 - misura di un angolo zenitale

Nell'ipotesi che l'asse principale a coincida con la verticale, indicando con S la lettura fatta sul cerchio zenitale nella posizione "cerchio a sinistra" e con D quella fatta nella posizione "cerchio a destra" avremo:

$$S = Z + \varepsilon$$

$$D = 400^g - (Z - \varepsilon)$$

Facendo la differenza delle due letture a cerchio a sinistra (S) e cerchio a destra (D) otterremo il valore di Z depurato dello zenit strumentale:

$$S = Z + \varepsilon$$

$$D = 400^g - Z + \varepsilon$$

$$S - D = 2Z - 400^g$$

$$\text{e quindi: } Z = \frac{S + 400^g - D}{2} \tag{6}$$

Facendo la somma delle due letture a cerchio a sinistra (S) e cerchio a destra (D) otterremo il valore dello zenit strumentale:

$$S = Z + \varepsilon$$

$$D = 400^g - Z + \varepsilon$$

$$S + D = 2\varepsilon + 400^g$$

$$\text{e quindi: } \varepsilon = \frac{S + D - 400^g}{2}$$

Esempio di calcolo:

lettura in posizione cerchio a sinistra $S = 83^{\circ},4326$ e

lettura in posizione cerchio a destra $D = 316^{\circ},5814$

Si calcoli il valore della distanza zenitale Z e dello zenit strumentale E :

$$Z = \frac{S + 400^{\circ} - D}{2} = \frac{83^{\circ},4326 + 400^{\circ} - 316^{\circ},5814}{2} = 83^{\circ},4256$$

$$\varepsilon = \frac{S + D - 400^{\circ}}{2} = \frac{83^{\circ},4326 + 316^{\circ},5814 - 400^{\circ}}{2} = 0^{\circ},007$$

Lo zenit strumentale va preso in considerazione per le misure speditive (di bassa precisione) delle distanze zenitali: se infatti è nullo, avremo che: $D = 400^{\circ} - S$ e quindi $Z = S$

La misura speditiva si esegue allora facendo una sola lettura collimando il punto con il cerchio a sinistra.

Per eliminare lo zenit strumentale, si determina la distanza zenitale corretta, si ricollima il punto nella posizione C.S. e si spostano gli indici di lettura con l'apposita vite fino ad imporre la lettura corretta.

2.12.1. Errori che influenzano le letture zenitali

La misura di un angolo zenitale è affetta da errori derivati da difetti di montaggio, dalla non perfetta rettifica del teodolite, da errori di graduazione del cerchio zenitale, dall'influenza della rifrazione atmosferica.

Si è già parlato dell'eccentricità e dell'errata posizione dell'origine della graduazione (zenit strumentale). Per quanto riguarda la rifrazione, si può dimostrare che l'angolo di rifrazione dipende dal coefficiente di rifrazione mediante la seguente espressione:

$$\varepsilon = K \frac{d}{2R}$$

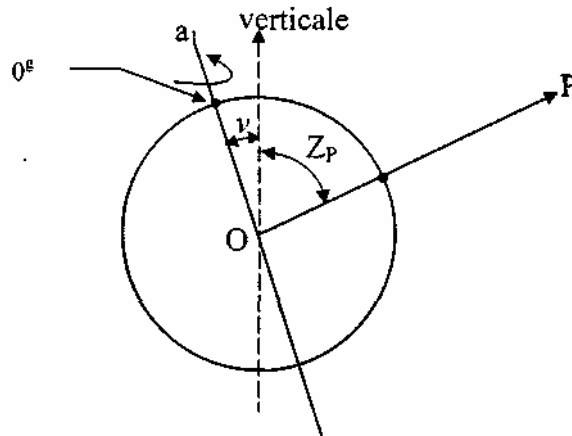
in cui K dipende dalla pressione atmosferica, dalla temperatura e dall'escursione termica. Il coefficiente di rifrazione varia da luogo a luogo, e durante il corso della giornata. Per distanze superiori a 0.5 km, l'effetto della rifrazione non è trascurabile in misure di alta precisione.

La misura della distanza zenitale non può essere reiterata per ragioni costruttive (il cerchio è collegato al cannocchiale in modo rigido), del resto l'effetto ineliminabile della rifrazione atmosferica rende le misure zenitali meno precise di quelle azimutali e perciò inutile l'idea di correggere gli errori di graduazione del cerchio. (La ripetizione delle misure viceversa è consigliabile, per ridurre l'influenza di errori di collimazione).

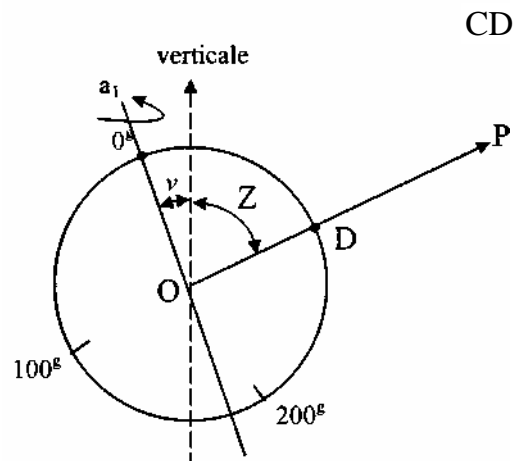
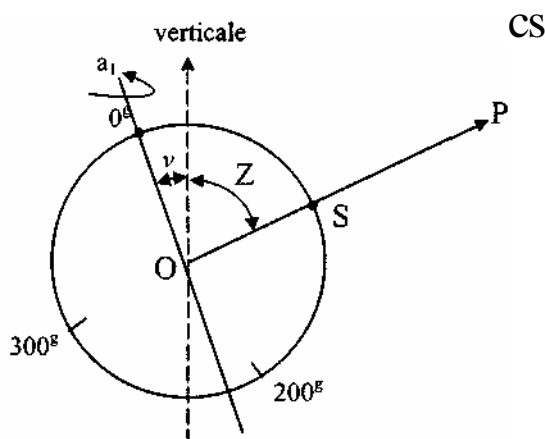
Per quanto riguarda gli errori di rettifica, si può dimostrare agevolmente che l'influenza degli errori residui di **collimazione** c e di **inclinazione** i sulla misura dell'angolo zenitale dipende dai quadrati e dai prodotti di i e c , si tratta quindi di un fattore più piccolo degli errori stessi e quindi trascurabile, quando il teodolite è soddisfacentemente rettificato.

L'errore residuo v di **verticalità**, provoca invece un errore in Z dello stesso ordine di grandezza, per cui non è trascurabile:

Per semplicità consideriamo un teodolite nel quale lo zero della graduazione del cerchio zenitale coincida con l'asse principale a_1 ma quest'ultimo non coincida con la verticale, esista cioè un errore residuo di verticalità v .



Se applichiamo semplicemente la relazione che calcola Z utilizzando le letture fatte al cerchio zenitale nelle posizioni coniugate S e D otterremo un valore della distanza zenitale errata della quantità v (errore residuo):



$$S = Z + v$$

$$D = 400^g - (Z + v)$$

$$S = Z + v$$

$$D = 400^g - Z - v$$

$$S - D = 2Z - 400^g + 2v$$

$$\text{e quindi: } \frac{S + 400^g - D}{2} = Z + v \tag{9}$$

Se l'asse principale a_1 è inclinato in una direzione qualsiasi con v si intende la componente dell'errore di verticalità nel piano di collimazione.

L'errore di verticalità, che influisce direttamente sulla misura, è dell'ordine di grandezza della sensibilità della livella torica servita per la messa in stazione del teodolite. ($10''$ - $30''$), per cui è necessario predisporre una procedura che riduca l'effetto di v .

Nei teodoliti ottico meccanici si ricorre ad una **livella zenitale o all'indice zenitale automatico**. Infatti risulta ininfluente la giacitura dell'asse principale, se gli indici di lettura possono ruotare intorno alla verticale anche se l'alidada ruota intorno all'asse principale, inclinato di v rispetto alla verticale stessa.

Nel primo caso si dispone una **livella torica** di adeguata sensibilità posta sulla traversa dell'alidada, la cui rotazione sposta anche gli indici di lettura zenitali (la tangente centrale della livella è parallela al piano del cerchio). Le letture CS e CD al goniometro verticale si eseguono solo a bolla centrata. In questo modo i due indici di lettura saranno comandati dalla livella, qualora essa sia centrata dopo ogni collimazione, e le letture saranno riferite all'orizzontale individuata dalla livella torica stessa, e quindi l'influenza dell'errore di verticalità verrà eliminata.

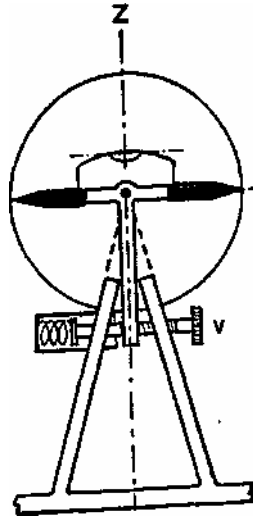


Fig. 33 - livella zenitale

L'operatore che utilizza un teodolite con livella zenitale deve centrare la livella zenitale prima di eseguire la lettura.

Infatti detta S la lettura nella posizione C.S. dopo il centramento della livella, che ha dunque la tangente centrale orizzontale, ruotando di 200^{gon} l'alidada la tangente centrale della livella zenitale si inclina di $2v$, se si ricentra la livella prima di effettuare la lettura D , l'indice di lettura si sposterà in modo da far aumentare la lettura di $2v$, indicando con D' la nuova lettura si avrà:

$$\begin{aligned} S &= Z + v \\ D' &= 400^{\text{g}} - Z - v + 2v \\ \hline S - D' &= 2Z - 400^{\text{g}} \end{aligned}$$

$$\text{e quindi: } \frac{S + 400^{\text{g}} - D'}{2} = Z$$

L'indice zenitale automatico, invece, realizza automaticamente l'eliminazione dell'errore residuo di verticalità v attraverso un meccanismo a pendolo o una superficie liquida.

Questi meccanismi ottici o meccanici, ed altre variazioni più complesse che eliminano l'influenza dell'errore residuo di verticalità, fanno parte cosiddetti **compensatori** (utilizzati con altri fini anche nei livelli).

L'operatore che utilizza un teodolite dotato di indice zenitale automatico, può eseguire le misure senza alcun accorgimento preventivo.

Nei teodoliti elettronici si sfrutta invece la presenza dei rilevatori dell'errore di verticalità: il valore della lettura fornito dallo strumento è corretto in base alla rilevazione dell'errore di verticalità.

1. Esempi di compensatori

Come si è visto, all'interno del problema di individuare lo zenit strumentale, cioè la direzione a partire dalla quale possono essere misurati sul cerchio verticale le distanze zenitali, si sono adottate varie soluzioni, a partire dal primitivo dispositivo con due indici di lettura ai due lembi opposti del cerchio verticale, controllato da una livella loricata rettificabile, attraverso dispositivi più sofisticati, fino agli attuali sistemi molto evoluti, dispositivi a indice zenitale automatico, basati su un **liquido in equilibrio**, oppure su **sistemi pendolari**.

Gli automatismi brevettati dalle case costruttrici che riescono ad eliminare l'influenza dell'errore residuo di verticalità sono molti e anche assai ingegnosi. Si basano tutti sul principio di rendere le letture al cerchio zenitale fatte in posizione CS ed in posizione CD, simmetriche rispetto ad una direzione fissa ed indipendente dall'inclinazione dello strumento. Queste direzioni sono ottenibili, come già osservato, mediante la superficie libera di un liquido che si configura orizzontale o la direzione seguita da un pendolo in quiete, cioè la verticale.

I compensatori possono anche distinguersi in indici a compensazione meccanica ed a compensazione ottica.

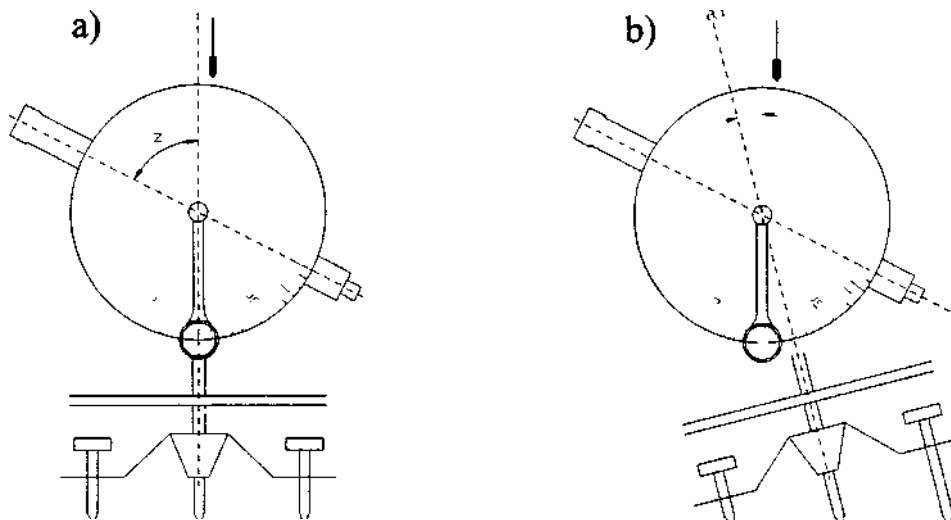


Fig.34 Schema di indice zenitale automatico

L'eliminazione dell'influenza dell'errore di verticalità può dunque essere automatizzata da un sistema a pendolo (Fig.34): si rendono solidali gli indici di lettura ad un pendolo, che abbia l'asse di oscillazione sull'asse di rotazione del cannocchiale; poiché l'asse del pendolo si dispone sempre secondo la verticale, indipendentemente dall'inclinazione dell'asse principale, l'insieme equivale ad una livella zenitale che si centri sempre automaticamente. E' evidente che le differenze di inclinazione fra l'asse del pendolo e l'asse dell'alidada nel piano ortogonale a quello del cerchio non comportano differenze nella lettura.

Nelle realizzazioni pratiche delle varie case costruttrici si utilizzano come sistemi pendolari obiettivi e prismi in modo da realizzare lo schema con la necessaria precisione.

Nei teodoliti elettronici vengono montati dei sensori che permettono di misurare l'ampiezza degli errori residui di verticalità dell'asse principale e in alcuni casi degli errori si rettificano. Tali sensori agiscono su uno o due assi. L'errore di verticalità si può scomporre in due parti: una giacente nel piano di collimazione, l'altra nel piano normale a quello di collimazione. Il compensatore biassiale misura entrambe le componenti. Il compensatore monoassiale agisce invece solo sulla componente

giacente nel piano di collimazione.

Il **compensatore biassiale** (vedi Fig.35) nei teodoliti elettronici si serve della superficie libera di un liquido in quiete, contenuta in un'ampolla di vetro; un prisma incollato al fondo del contenitore rinvia l'immagine della superficie orizzontale a due obiettivi. Un diodo (1) invia un segnale luminoso al liquido e viene riflesso totalmente al diodo ricevitore a quattro quadranti (2).

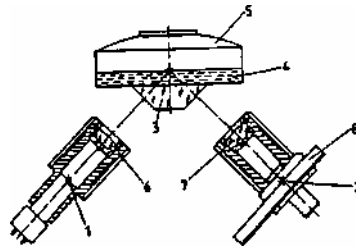


Figura 35 - Schema di compensatore biassiale

Il diodo fornisce le inclinazioni degli assi secondario e terziario del teodolite. In sede di assemblaggio, il complesso è montato con l'asse principale verticale, in modo che le indicazioni del diodo siano uguali a zero in entrambe le direzioni, cosicché, in fase operativa le differenze di posizione fornite dal diodo sono misurate con buona precisione e memorizzate dal microprocessore. Il compensatore ad un solo asse è invece costituito da una livella torica provvista di sensori elettrici alle due estremità. Un terzo elettrodo è disposto ad un estremo del tubo torico: se la bolla si sposta la dissimetria genera una tensione elettrica che viene misurata e digitalizzata; il suo valore fornisce lo spostamento della bolla, che diviene misura dello spostamento dell'asse (vedi Fig.36)

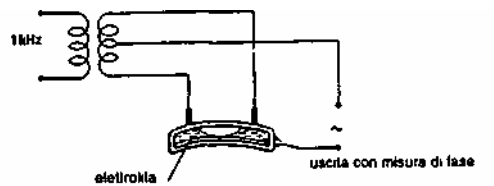


Figura 36 - Schema di compensatore monoassiale

Entrambi i compensatori sono montati in strutture insensibili alle variazioni termiche e forniscono, come già osservato, i valori ad un microprocessore. Poiché le inclinazioni degli assi fondamentali del teodolite che questi strumenti riescono a rilevare con precisioni molto elevate, influiscono, come vedremo meglio in seguito, in modo non trascurabile sui valori delle direzioni angolari misurate, il microprocessore gestisce la correzione automatica, e completamente trasparente all'operatore, delle letture angolari.

2.13. ACCESSORI PER GLI STRUMENTI TOPOGRAFICI

2.13.1 -Il Treppiede

L'impiego di uno strumento topografico, nello sviluppo delle differenti operazioni di misura, non può essere disgiunto dalla disponibilità di un idoneo supporto di sostegno che, situando lo strumento a una opportuna *altezza* da terra, possa consentire all'operatore l'esecuzione delle diverse operazioni.

Questa funzione viene svolta dal **treppiede**: esso è costituito da **tre gambe a lunghezza regolabile o fissa**. I treppiedi a gambe rigide sono utilizzati solo con strumenti di elevata precisione nelle operazioni dove la stabilità del sostegno gioca un ruolo determinante nell'affidabilità delle misure (es. livellazione geometrica di altissima precisione).

Le gambe del treppiede sono incernierate alla **piastra di appoggio**. La piastra di appoggio ha la forma di un triangolo equilatero a spigoli arrotondati ed è provvista di un foro centrale attraverso il quale passa la **vite di fissaggio** che serve a vincolare rigidamente al treppiede uno strumento (la basetta topografica) che collega il treppiede allo strumento.

La vite di fissaggio può scorrere all'interno di un **collare** incernierato al di sotto della piastra di appoggio. Ruotando il collare e traslando la vite di fissaggio all'interno del collare, è possibile portare la vite di fissaggio in un qualsiasi punto del foro della piastra di appoggio.

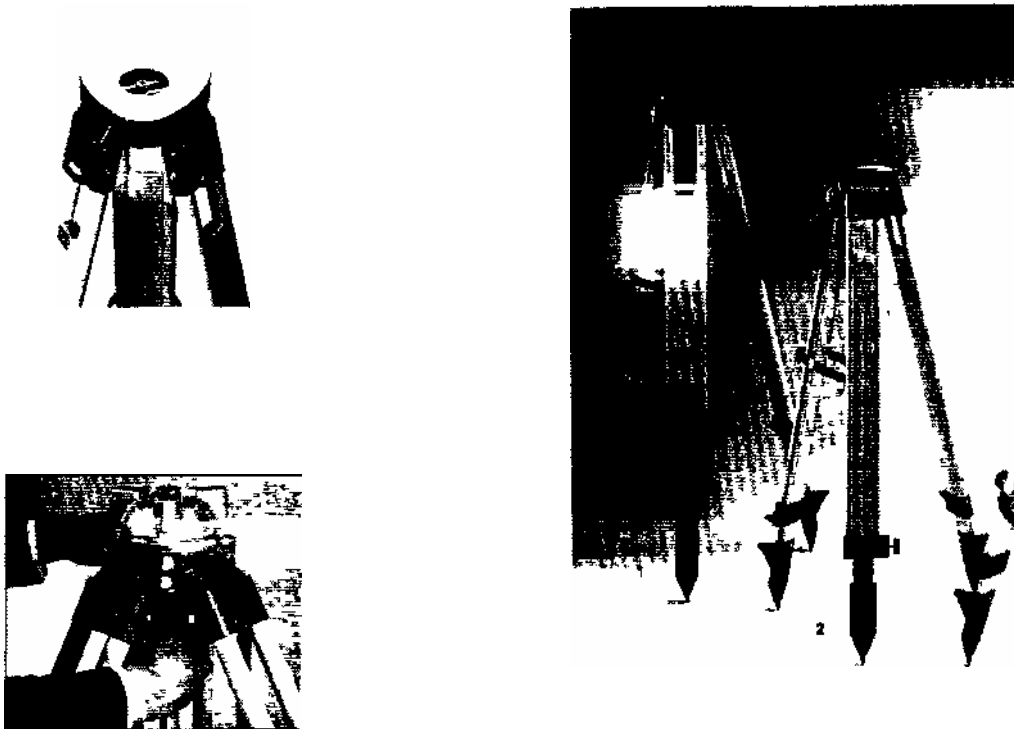


Figura 37 - Esempi di treppiedi

L'operazione di **messa in stazione del treppiede** consiste nel far sì che il centro della piastra sia all'incirca sulla verticale del punto a terra (vertice degli angoli da misurare o estremo della distanza) e che la piastra di appoggio sia orizzontale. Per far ciò, si sfrutta l'azione combinata di un filo a piombo (vedi par. 3.2) collegato alla vite di fissaggio e, ove possibile, la possibilità di variare in modo indipendente le lunghezze delle tre gambe del treppiede.

Se i punti di stazione sono materializzati su manufatti, o pilastri in muratura, il sostegno dello strumento di misura può essere assicurato dall'impiego di opportune **piastre o basi per pilastro** che, una volta centrate sul punto di stazione, offrono un duraturo e stabile sostegno allo strumento durante tutto l'arco delle operazioni di misura programmate. L'impiego di piastre o basi per

pilastrino è particolarmente consigliabile nello sviluppo di misure di grande precisione per lo studio di piccoli movimenti o deformazioni in strutture nonché per lo sviluppo di reti di inquadramento di particolare interesse.

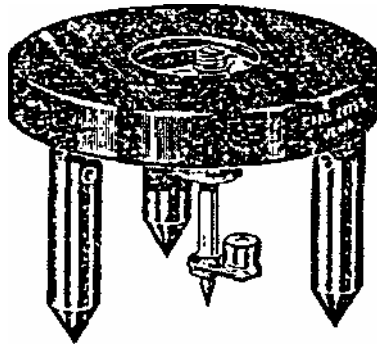


Figura 38 - Esempio di base per pilastrino

2.13.2 - IL FILO A PIOMBO E I PIOMBINI SPECIALI

Il filo a piombo è costituito da un filo flessibile al quale è legata a una estremità una massa metallica con peso variabile da 150 g a 300 g avente la forma di un solido di rivoluzione e che termina a punta, il cui asse coincide con la direzione del filo.

Tenendo il filo sospeso per l'estremo superiore, dopo una breve oscillazione libera, il filo a piombo assume una posizione di equilibrio disponendosi secondo la direzione del campo di gravità terrestre (verticale) passante per la punta della massa metallica.

Il filo a piombo consente di rendere verticali aste (quali ad esempio le paline) e a riportare più punti sulla medesima verticale. Questa ultima applicazione è in quasi tutti i casi utilizzata quando vengono impiegati gli strumenti topografici inferiormente ai quali viene agganciato un filo a piombo che consente di porre sulla medesima verticale il centro dello strumento (vertice degli angoli da misurare o estrema di una distanza da misurare) con il punto a terra (punto di stazione).

Si sospende il filo a piombo collegandolo al centro strumentale e si regola la lunghezza del filo, fino a quando la punta del piombino sfiora il terreno.

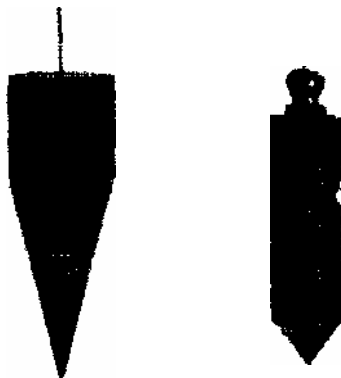


Figura 39 - Esempi di filo a piombo

La precisione del filo a piombo è piuttosto limitata a causa dei disturbi causati dall'aria in movimento. Si può ritenere che l'errore di verticalità residuo sia pari a circa 10'. Considerando di posizionare gli strumenti a circa 1.5 m da terra questo errore residuo di verticalità comporta errori di individuazione del punto a terra di circa 4 mm.

Il **piombino a bastone** è costituito da due tubi coassiali scorrevoli l'uno nell'altro, in modo da poter variare la lunghezza complessiva del bastone. Il tubo esterno termina a punta e su di esso è montata una livella sferica: quando questa risulta centrata il bastone è verticale. Il bastone, allungato fino a che la punta sfiora il terreno, viene fissato alla parte inferiore della testa del treppiede e con piccoli spostamenti di questa si centra la livella sferica. Il bastone è graduato in modo che sia possibile leggere direttamente l'altezza strumentale, ossia la distanza tra il centro dello strumento che verrà montato sul treppiede e il punto individuato a terra dalla punta del bastone.

La precisione del piombino a bastone dipende dall'errore con cui la livella sferica lo rende verticale. Come vedremo in seguito questo errore può essere considerato pari a circa $2'$ per cui, considerando un'altezza strumentale di circa 1.5 m si hanno errori di posizionamento a terra di circa 1 mm .

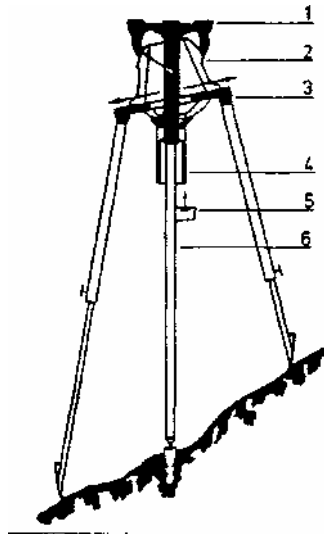


Figura 40 - Piombino a bastone

Il **piombino ottico** è costituito da un piccolo cannocchiale, montato sul basamento di quasi tutti gli strumenti topografici, il cui asse di collimazione viene deviato ad angolo retto da un prisma a riflessione totale e facendo in modo che esso sia sul prolungamento dell'asse principale dello strumento.

Per disporre l'asse di collimazione deviato in posizione verticale, si usano tre **viti calanti** che controllano l'assetto della struttura che contiene il piombino ottico (una basetta topografica o lo strumento vero e proprio). Le viti calanti hanno un raggio di azione limitato, per questo l'uso del piombino ottico è possibile solo partendo da una condizione di verticalità sufficientemente approssimata. Si dispone la testa del treppiede approssimativamente orizzontale (spesso è sufficiente l'orizzontalità giudicata a occhio dall'operatore oppure si utilizzano piccole livelle loriche di sensibilità variabile tra $1'$ e $2'$) e, dopo aver montato lo strumento, con un filo a piombo si centra il punto a terra con buona approssimazione. Mediante le tre viti calanti si mette in stazione lo strumento, cioè si fa in modo che il suo asse principale sia verticale. A questo punto, con piccoli movimenti dello strumento sulla piastra di appoggio del treppiede si centra il punto a terra mediante il piombino ottico utilizzando il reticolo montato nel piombino.

È importante in questa operazione evitare rotazioni dello strumento sulla base: la traslazione deve avvenire lungo due direzioni perpendicolari in quanto l'errore di orizzontalità della piastra di appoggio risulta sempre troppo elevato. La direzione degli spostamenti può essere agevolmente controllata utilizzando i fili del reticolo del piombino.

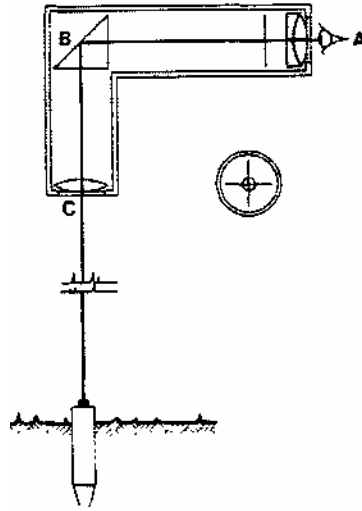


Figura 41 - Schema di piombino ottico

Gli errori residui di centramento del piombino ottico sono simili a quelli riscontrati con l'uso dei piombini a bastone.

Recentemente il piombino ottico è stato sostituito dal **piombino laser**. Nello strumento viene montato un diodo che emette un raggio laser lungo la direzione dell'asse principale dello strumento. Lo schema di funzionamento e gli errori residui sono identici a quelli del piombino ottico, ma l'operazione di centramento risulta più agevole per l'operatore.

2.14. SEGNALI

Il rilievo mediante i metodi topografici terrestri avviene mediante la determinazione delle coordinate di un numero discreto di punti sufficiente a descriverne la forma e le dimensioni in funzione dei futuri usi del rilievo stesso. Per l'esecuzione delle operazioni di misura è quindi necessario che i punti oggetto del rilievo siano ben visibili; inoltre, come vedremo esistono dei punti caratteristici (punti di inquadramento) usati come centri di emanazione del rilievo di dettaglio che devono essere rintracciati con sicurezza per tutta la durata del rilievo e in molti casi anche in epoche successive per eventuali integrazioni e aggiornamenti delle operazioni di rilievo eseguite in periodi precedenti.

Per poter soddisfare queste due esigenze occorre provvedere a una opportuna materializzazione dei punti a meno che i punti scelti non siano già definiti con la necessaria precisione da particolari naturali e/o artificiali preesistenti.

In entrambi i casi i manufatti appositamente costruiti o già esistenti che definiscono in modo provvisorio e/o permanente un punto vengono denominati **segnali**.

I segnali possono essere di vario tipo; alcune tipologie standard si trovano in commercio o possono venire realizzati sul posto, ma in molti casi occorre progettare i segnali più adatti all'oggetto da rilevare, tenendo presente le seguenti considerazioni di carattere generale:

- **caratteristiche dell'ambiente** nel quale si trovano i punti da rilevare (in zona aperta o chiusa, illuminati naturalmente o da illuminare con dispositivi artificiali, in zone secche o umide, ecc.) e dello strumento che li deve individuare (nei nostri casi solitamente un cannocchiale munito di reticolo di collimazione);
- **caratteristiche fisiche e naturali dell'oggetto** (terreno friabile, strada asfaltata, parete in

mattoni, parete pregiata, ecc.); •

distanza effettiva di collimazione.

In funzione del loro uso, i segnali possono essere classificati in segnali provvisori e permanenti. I **segnali provvisori** consentono di materializzare i punti, o di rendere visibili punti già materializzati in modo permanente, per il periodo limitato di tempo necessario allo sviluppo delle operazioni di misura e di renderli collimabili mediante un cannocchiale.

I **segnali permanenti** invece consentono di materializzare i punti per un periodo solitamente lungo e devono essere costituiti in modo da evitare una loro distruzione da parte di agenti esterni. Solitamente quindi questi segnali non sono facilmente visibili a meno che si trovino in zone di difficile accesso a persone estranee.

2.14.1. SEGNALI PROVVISORI

I segnali provvisori più utilizzati sono essenzialmente costituiti da chiodi, picchetti, paline, stadi e mire topografiche.

I chiodi sono particolarmente impiegati in terreni molto compatti o rocciosi, su strade asfaltate o lastricate in pietra o anche in terreni incoerenti annegandoli in un massetto in calcestruzzo; hanno in genere una testa grossa per essere facilmente individuabili e su di essa viene inciso un bollino o una crocetta che individua spazialmente il punto in modo esatto.

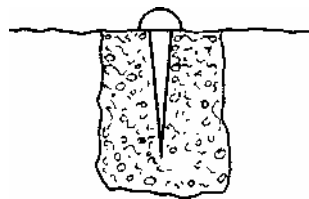


Figura 42 - Esempi di chiodi per segnalazioni provvisorie

I picchetti sono i segnali più comunemente utilizzati in terreni incoerenti e sono costituiti da paletti di legno, tondini o tubi in acciaio lunghi circa 60 cm -5- 80 cm, appuntiti a una estremità, che vengono piantati nel terreno in modo che ne sporga solo la testa. I picchetti in legno hanno una sezione quadrata con lato di circa 5 cm, oppure circolare e per individuare esattamente il punto materializzato viene piantato un chiodo sulla testa del picchetto stesso, oppure viene incisa una croce.

Allo scopo di facilitare la loro individuazione, la parte del picchetto che emerge dal terreno viene verniciata con tinte in contrasto con quelle dell'ambiente circostante.

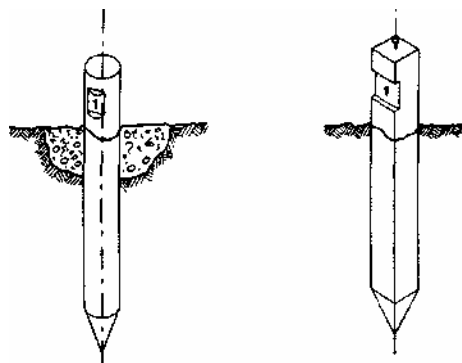


Figura 43 - Esempi di picchetti per segnalazioni provvisorie

Le paline sono aste a sezione solitamente circolare, con dimensione trasversale di circa 3 cm e di lunghezza variabile da 1 m a 5 m, verniciate, nella maggior parte dei casi, a strisce bianche e rosse alte 20 cm per renderle più visibili. Solitamente vengono realizzate in alluminio o in leghe metalliche leggere e sono munite a una estremità di una punta metallica per facilitarne la penetrazione in terreni incoerenti.

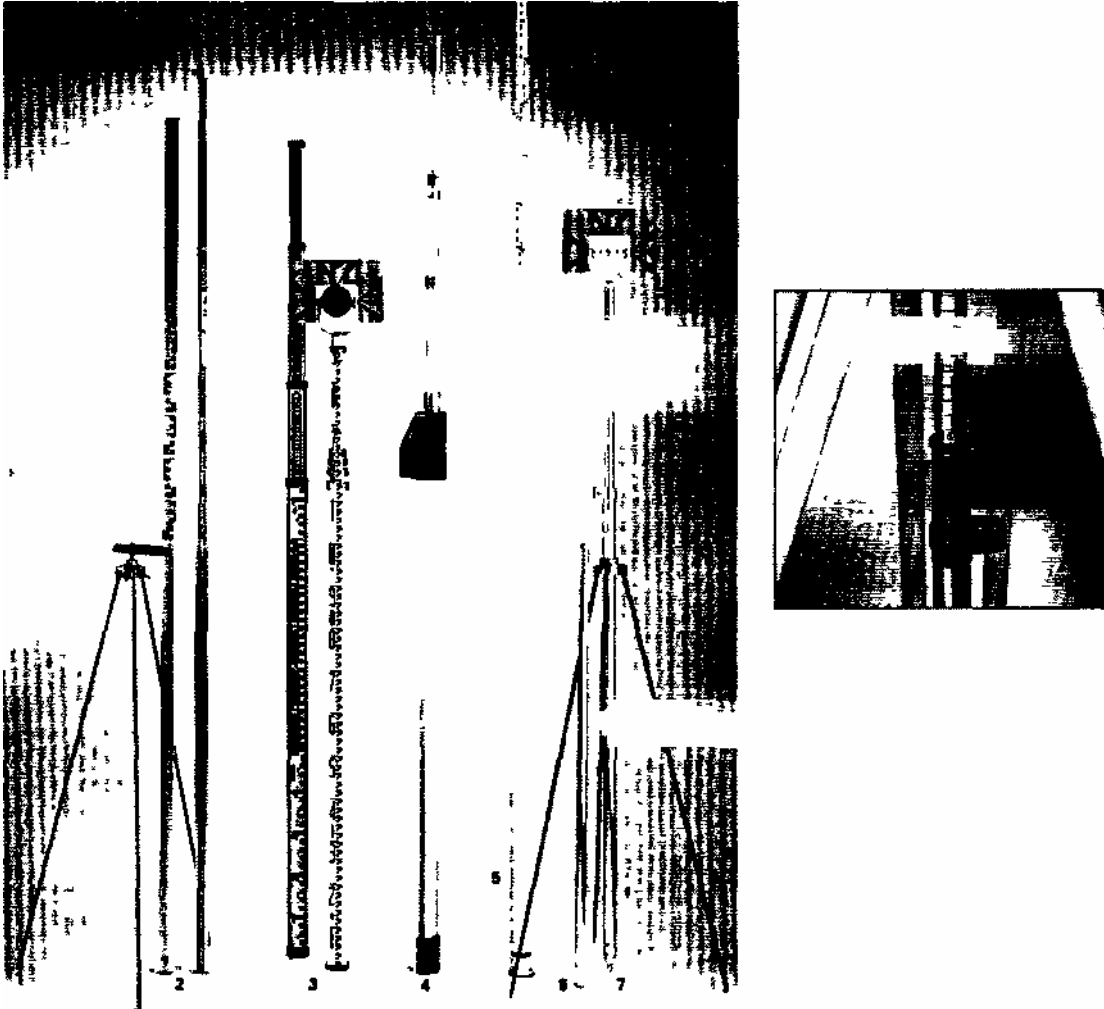


Figura 44 - Esempi di paline e stadie con relativi supporti

Le paline, per poter essere utilizzate devono essere rese verticali e per questo scopo solitamente viene usata una livella sferica (v fig. 46) che controlla l'orizzontalità di un piano perpendicolare alla palina stessa. In assenza della livella sferica, la verticalità può essere raggiunta mediante l'uso di un filo a piombo controllando la verticalità lungo due direzioni ortogonali. Operando su terreni rocciosi o comunque molto compatti oppure su pavimentazioni flessibili e rigide che non consentono una penetrazione della palina sufficiente a garantirne la stabilità di assetto, queste vengono sostenute da appositi cavalletti a pinza (vedi fig. 46). All'estremità superiore delle paline vengono fissate con viti a pressione le mire topografiche che individuano un filo verticale e un filo orizzontale per facilitare le misure angolari mediante un cannocchiale topografico. Per la misura delle distanze, al centro di tali segnali viene montato un prisma retroriflettente.

Le dimensioni delle mire topografiche devono essere scelte in modo da garantirne la visibilità alla relativa distanza di collimazione. Per il dimensionamento si utilizzano le considerazioni svolte al punto 1.3.1. Ad esempio se si utilizza un cannocchiale con $I = 30X$ e se la distanza di collimazione

è di 500 m la dimensione minima della mira risulta essere pari a:

$$s = 0.0003 \times \frac{500m}{30} = 5mm$$

Le mire topografiche reperibili in commercio sono solitamente quadrate con lati variabili da 10 cm a 15 cm ed eventualmente munite di piastre di allargamento in modo da consentire una prima localizzazione del segnale a occhio nudo da parte dell'operatore.

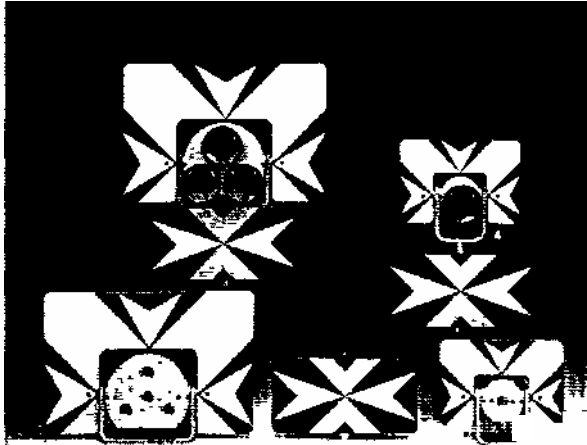


Figura 45 - Esempi di mire topografiche per misure angolari

2.14.2. SEGNALI PERMANENTI

I segnali permanenti per le operazioni di rilievo topografico terrestre devono presentare le seguenti caratteristiche:

- > essere disposti in posizione dominante in modo da risultare visibili da qualunque lato anche a distanze notevoli;
- > essere duraturi nel tempo, protetti dagli agenti atmosferici, dal traffico e da azioni, anche involontarie, degli uomini.

Se possibile, è opportuno disporre questi segnali in modo che coincidano con gli assi di torri, campanili o manufatti di acquedotti, spigoli di fabbricati, spallette di ponti, ciminiere, su pareti di muri di sostegno o di dighe. Quando la zona è montagnosa i segnali vengono disposti anche sulle cime di montagne e realizzati con pavoni, capre o grossi pilastri in modo da poter essere facilmente individuati e collimati. Le materializzazioni, quando si rendono necessarie, vengono realizzate con pilastri in muratura, in

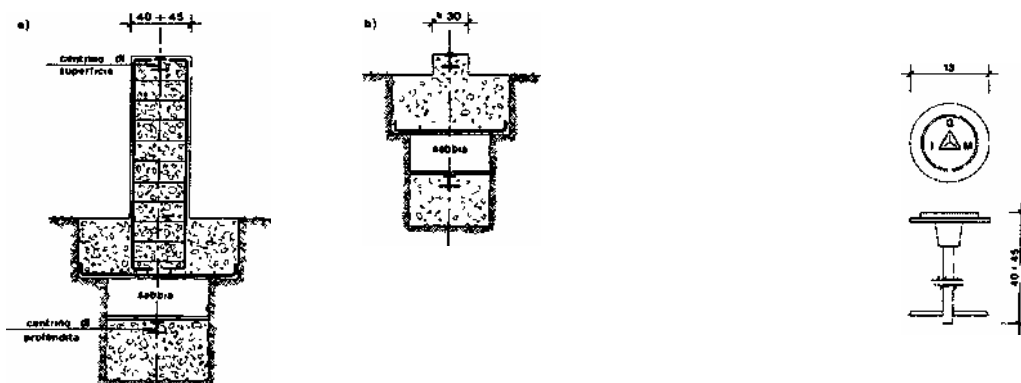


Figura 46 - Esempio di pilastro e centrini di superficie e di profondità

acciaio o più comunemente in calcestruzzo, alti circa 1.2 m, oppure da blocchi in calcestruzzo sulla sommità dei quali viene fissato il centrino di superficie che riporta l'esatta posizione del punto. Nell'eventualità che il segnale permanente possa essere manomesso o danneggiato, a circa 80 cm di profondità viene realizzata una seconda struttura, indipendente da quella di superficie, sulla quale viene fissato un altro centrino (detto di profondità) posto sulla medesima verticale di quello superiore.

Abbiamo già accennato ad un'altra precauzione che consente di ripristinare il punto in caso di manomissione: si posano nelle sue vicinanze, con materializzazioni simili, due o tre segnali secondari con centrini di spia disposti in modo che, con una serie di triangoli di lati noti, sia possibile ripristinare il vertice principale.

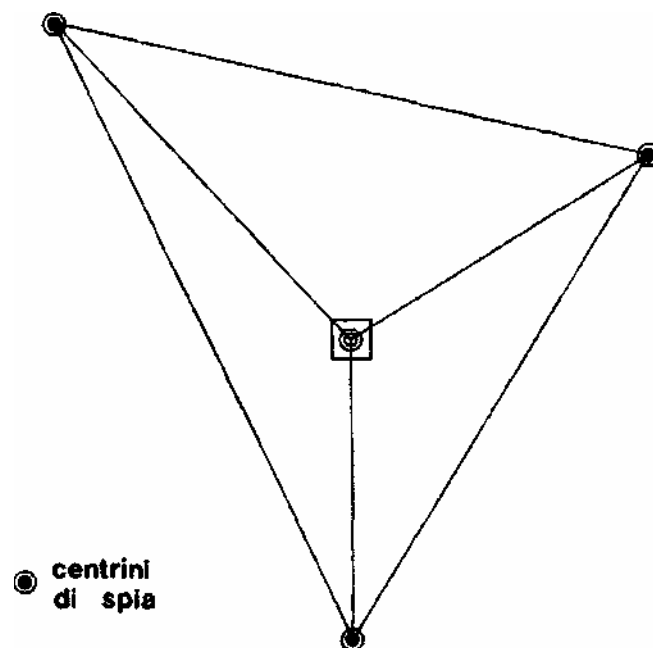


Figura 47 - Disposizione dei centrini di spia attorno al vertice principale

Nella segnalizzazione dei punti utilizzati con le tecniche di rilievo satellitare valgono i medesimi requisiti prima esposti eccezion fatta per la visibilità da zone circostanti. Come vedremo nel corso infatti, le tecniche satellitari richiedono per i punti solo una visibilità verso l'alto.

2.15. MONOGRAFIE

I punti topografici individuati con i segnali prima descritti devono servire come punti di riferimento e di controllo per successivi rilievi topografici, o per operazioni di rilevamento che possono durare per molto tempo; pertanto devono essere facilmente e sicuramente individuati, oppure ripristinati con sufficiente precisione qualora il segnale che li individua possa essere manomesso. Per ogni punto viene quindi redatta una monografia del segnale che riporta uno schizzo planimetrico, i punti di riferimento, una descrizione del segnale e altri elementi atti alla sua individuazione.

Nelle normali operazioni topografiche, la monografia di un punto può essere come quella riportata in fig. 50, nella quale la posizione del punto viene definita solo con misure lineari, che

rappresentano le distanze del punto da altri di posizione fissa rappresentati, per esempio, da spigoli di fabbricati, bordure e cordoli, pali per l'illuminazione, ecc.

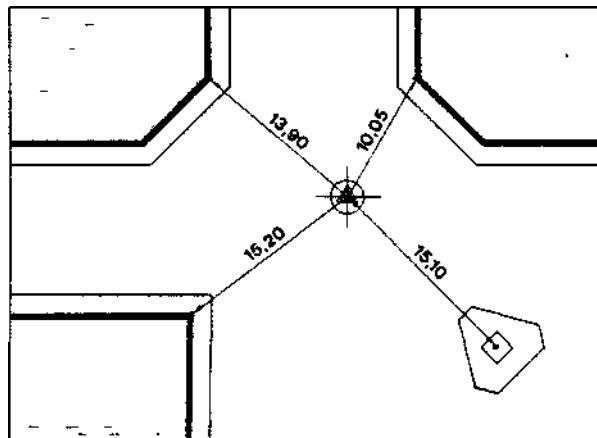


Figura 48 - Esempio di monografia

Nel caso delle reti di inquadramento che interessano il territorio nazionale, l'I.G.M. e il Catasto hanno redatto monografie molto più complete delle precedenti, che riportano i seguenti dati:

- > denominazione e ubicazione del punto;
- > descrizione del segnale;
- > schizzo del segnale e di una limitata zona circostante;
- > posizione di eventuali punti ausiliari;
- > coordinate in vari sistemi di riferimento (locale, geografico, cartografico, WGS84, ecc.);
- > categoria del punto (indice della qualità metrica);
- > date del suo impianto e dei successivi interventi di controllo e manutenzione.

Comando Regione Militare Nord-Ovest - Torino Staz CC Torino Comune Torino (Prov. Proprietario Demanio		Puntir Collegati				
() Cupola della Basilica di Superga. Asse geometrico della lanterna sulla cupola. FCP: Segno con vernice indelebile sulla copertura dello spigolo Nord della balaustra sovrastante il frontone. Le differenze delle coordinate dal CT al FCP sono: $\Delta N = -3,50$; $\Delta E = -31,04$.		0	N°	Nome		
				056206		
Coordinate geografiche $45^{\circ}04'48''308$ $-4^{\circ}41'03''307$ Ord. I N.056206		ANS	Lavori eseg.	mod ANZ1	1° GEOM 2000 mod AN19	mod AN20
Coordinate Gauss-Boaga N: 4 992 678,14 E: 1 403 036,83 Quota al PP H= 727,35		1877	SG	1	1	
SUPERGA (Basilica) Ord. I N.056206 		1908	ST, D, Q	3	2	
		9888/2	RT, Q		1	
TRIG Nome SUPERGA (Basilica) H= 715.23 I 056 N° 206 Sp MFV877D908Q988						

Figura 49 – Esempio di monografia di un vertice della rete di primo ordine dell'I.G.M.

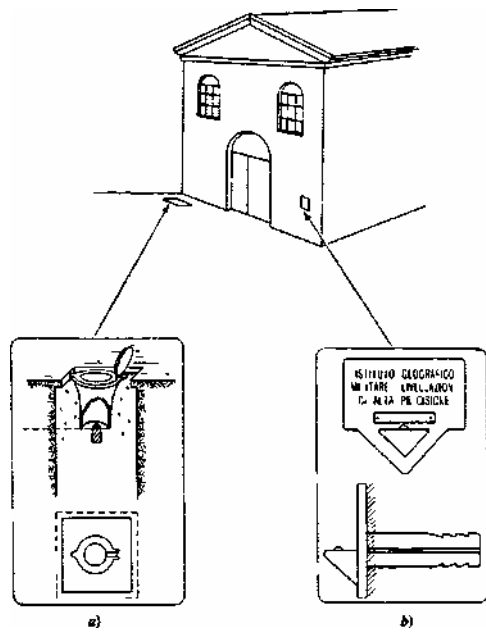


Figura 50 - Materializzazione di un caposaldo di una linea di livellazione I.G.M.

3. STRUMENTI PER LA MISURA DEI DISLIVELLI

Come vedremo nei capitoli seguenti alcuni metodi per la misura dei dislivelli prevedono ancora l'uso dei teodoliti; vedremo però anche altri metodi, detti di livellazione geometrica, che prevedono l'uso di particolari strumenti, detti livelli e di particolari aste graduate dette stadie. In questo capitolo descriveremo brevemente le caratteristiche costruttive e di funzionamento dei livelli e le più diffuse tipologie di stadie.

3.1 LA STADIA

La stadia è un'asta (di legno o metallica), graduata, a sezione rettangolare e con lunghezza variabile di 2, 3 o 4 m. Come abbiamo sopra accennato vengono utilizzate nelle operazioni di livellazione geometrica assolvendo alla duplice funzione di segnalizzazione provvisoria di un punto e di vero e proprio strumento di misura. Per facilitare il trasporto vengono solitamente costruite in più pezzi resi solidali da una cerniera.

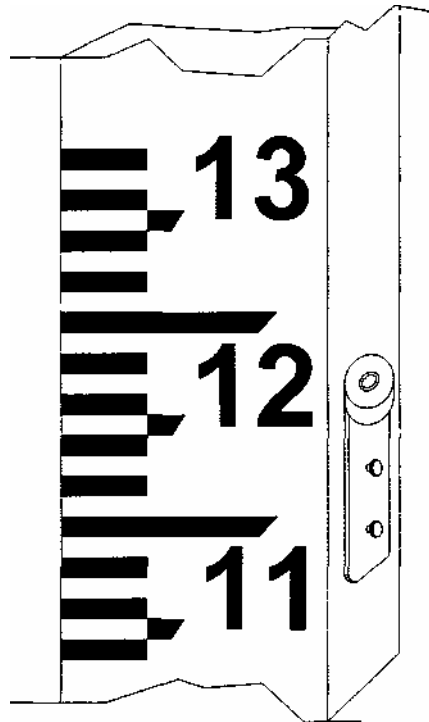


Figura 1 - stadia a graduazione analogica

Sulla faccia anteriore della stadia viene riportata una graduazione mediante tratti alternati di colore bianco e nero (o bianco e rosso), dello spessore di un centimetro. Sulla graduazione vengono riportate le cifre che rappresentano i metri e i decimetri. Queste ultime cifre sono posizionate nell'intervallo di graduazione successiva al tratto che ne rappresenta il valore effettivo. In ogni punto della stadia, si può eseguire una lettura comprensiva di metri e decimetri (letti direttamente dalle cifre impresse sulla stadia), centimetri (contati grazie all'alternarsi dei tratti a colori diversi) e millimetri (stimati solitamente all'interno di un intervallo della graduazione). La stadia deve essere posizionata lungo la verticale del punto a terra con lo zero della graduazione sul punto a terra. Il controllo della verticalità avviene mediante una livella sferica montata sul corpo della stadia e, quando necessario, utilizzando sostegni particolari.

Da alcuni anni la graduazione è stata sostituita da una codifica a barre per consentire l'utilizzo dei livelli digitali, di cui parleremo nel seguito di questo capitolo.

3.2 IL LIVELLO

Il livello è uno strumento topografico (non propriamente di misura) che consente di disporre l'asse di collimazione di un cannocchiale in assetto orizzontale. Questo strumento viene utilizzato nelle operazioni di livellazione geometrica, uno dei metodi che analizzeremo per misurare il dislivello tra due punti. Un livello è costituito dalle seguenti parti:

1. **basamento:** è una struttura realizzata con una piastra recante al centro un foro filettato che consente il bloccaggio dello strumento sul treppiede e da una seconda piastra, munita di livella sferica, il cui assetto rispetto alla prima piastra del basamento, è controllabile mediante tre viti calanti;
2. **traversa:** è una struttura meccanica simile all'alidada di un teodolite, ma notevolmente semplificata rispetto a quest'ultima. Infatti la traversa deve consentire solamente la rotazione del cannocchiale attorno ad un asse perpendicolare al basamento;
3. **cannocchiale:** è dello stesso tipo di quelli utilizzati nei teodoliti.
4. **Livelle:** per poter rendere orizzontale l'asse di collimazione i livelli devono essere dotati o di una livella torica di alta precisione solidale con il cannocchiale o di dispositivi automatici.

L'operazione di messa in stazione di un livello è più semplice della messa in stazione di un teodolite in quanto, come vedremo parlando di livellazione geometrica, occorre solamente centrare la livella sferica del basamento.

Il primo livello di concezione moderna risale alla fine del 1660 (Chézy): è dotato di livella torica. Agli inizi del 1800 compare il livello dotato di cannocchiale e livella rigidamente fissata ad una traversa (Egault).

hi seguito venne progettato il modello di Wild, cui si sono ispirati un gran numero di modelli fino a metà del 1900, dotato di cannocchiale fissato alla traversa, e di livella torica fissata al cannocchiale (tipo inglese).

A partire dagli anni '50 compaiono i livelli ad orizzontamento automatico, detti anche auto livelli. Entrambi questi livelli devono essere utilizzati con stadie a graduazione, mentre i recenti livelli digitali devono essere utilizzati con stadie codificate.

3.2.1 - Livelli ottico - meccanici

I livelli ottico - meccanici si distinguono in:

1. livelli a orizzontamento dell'asse di collimazione mediante livella torica
2. livelli a orizzontamento automatico dell'asse di collimazione

Questi ultimi hanno assunto sempre maggiore importanza e diffusione, sostituendo quasi totalmente i precedenti.

Di seguito si accennerà dapprima ai livelli che hanno bisogno di una livella torica (livelli a vite di elevazione) di precisione, considerando due varianti importanti tra le diverse soluzioni.

La gamma delle soluzioni strumentali è infatti assai ampia: questi livelli si differenziano in base alle caratteristiche della disposizione del cannocchiale, che è fisso o mobile, o alla dislocazione della livella.

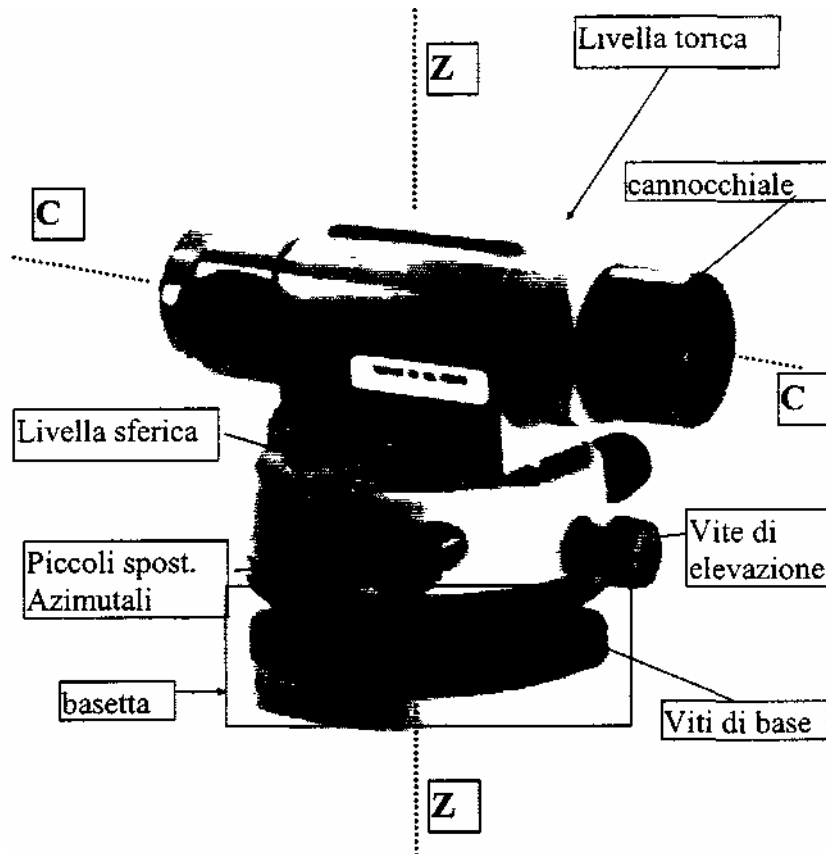


Fig. 2 - schema di livello ottico-meccanico con vite di elevazione La

classificazione, come già accennato, fatta per tipologia costruttiva è la seguente:

1. livelli a cannocchiale fisso con o senza vite di elevazione (detti livelli inglesi);
2. livelli a cannocchiale mobile e livella fissa alla traversa;
3. livelli a cannocchiale mobile e livella fissa al cannocchiale (detti livelli Chézy);
4. livelli a cannocchiale mobile e livella mobile (detti livelli Lenoir);
5. livelli con livelle a doppia curvatura e cannocchiale ruotabile attorno al proprio asse a manicotto.

Lo schema rappresentato in figura 3 riguarda un livello tradizionale con vite di elevazione.

Il livello è costituito da una traversa girevole attorno ad un asse Z e imperniata su una base con viti calanti che consentono di rendere verticale tale asse.

Il cannocchiale è collegato alla traversa con un sistema costituito da un perno e da una vite di elevazione, in modo che possa subire piccole rotazioni intorno ai suoi appoggi.

Al cannocchiale è rigidamente collegata una livella, munita di viti di rettifica, generalmente si tratta di una livella a coincidenza d'immagine.

Un Livello si dice rettificato quando l'asse di collimazione e la tangente centrale della livella sono tra loro paralleli (vedi Fig. 3).

Per un livello rettificato, centrare la livella torica equivale quindi a rendere orizzontale l'asse di collimazione.

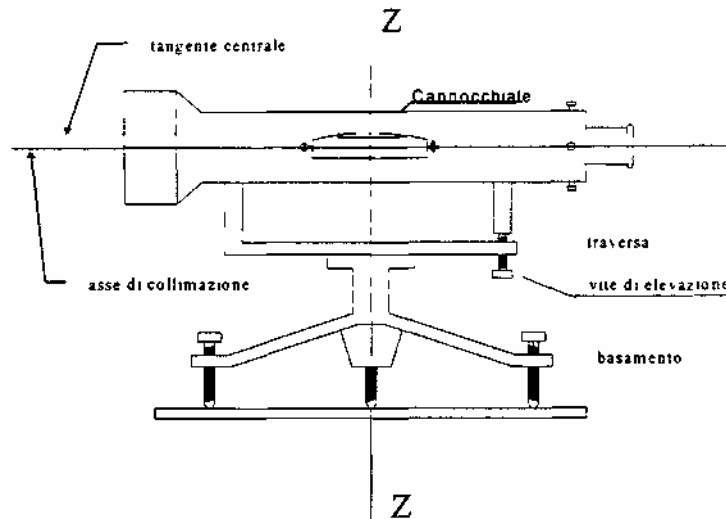


Figura 3 - Schema del livello a cannocchiale con vite di elevazione

La "messa in stazione" consiste dunque solamente nel centrare la livella sferica solidale con il basamento, l'orizzontalità della linea di mira si ottiene prima di ogni lettura alla stadia centrando la livella loricata attraverso la vite di elevazione o al dispositivo autolivellante.

Se al livello manca la vite di elevazione, il cannocchiale sarà rigidamente collegato alla traversa (vedi Fig. 4); in questo caso il livello si dirà rettificato se l'asse di collimazione sarà normale all'asse di rotazione della traversa.

La livella torica e le tre viti calanti consentono di realizzare la verticalità dell'asse, e di conseguenza l'orizzontalità dell'asse di collimazione. Questo è lo schema costruttivo caratteristico dei livelli di minor precisione.

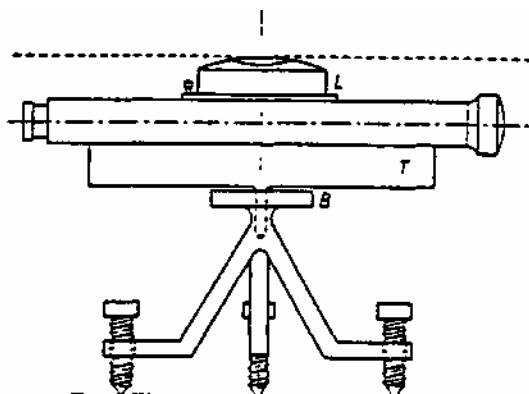


Fig. 4 - schema di livello a cannocchiale senza vite di elevazione

È immediato chiedersi in cosa differisce questo strumento dal teodolite: sono scomparsi i cerchi e l'alidada, esiste ancora un'asse primario (Z), ma il cannocchiale è incernierato sulla traversa e la vite di elevazione permette la sua rotazione di pochi gon rispetto ai punti di appoggio.

3.2.1.1. - Rettifica di un livello

L'errore di rettifica di un livello, è l'angolo ϵ che l'asse di collimazione forma con la tangente centrale della livella torica (vedi Fig. 3).

Anche eseguendo con estrema accuratezza la rettifica di un livello un errore residuo di rettifica permane sempre, e può essere considerato nullo solo negli strumenti meno precisi, mentre nei livelli di precisione, di alta e altissima precisione occorre operare tenendo presente che l'influenza dell'errore di rettifica non può essere trascurata.

Il metodo più semplice e sicuro per eliminare l'influenza dell'errore di rettifica consiste nel porre lo strumento ad eguale distanza dalle due stadi (vedi Fig. 5).

In tal caso l'errore di lettura che si commette, pari a $d \tan \epsilon$, è uguale sulle due stadi in valore e segno, per cui la differenza delle letture eseguite $I_A - I_B$ è uguale alla differenza $I'_A - I'_B$ delle letture teoriche che si sarebbero eseguite in assenza di errore di srettifica.

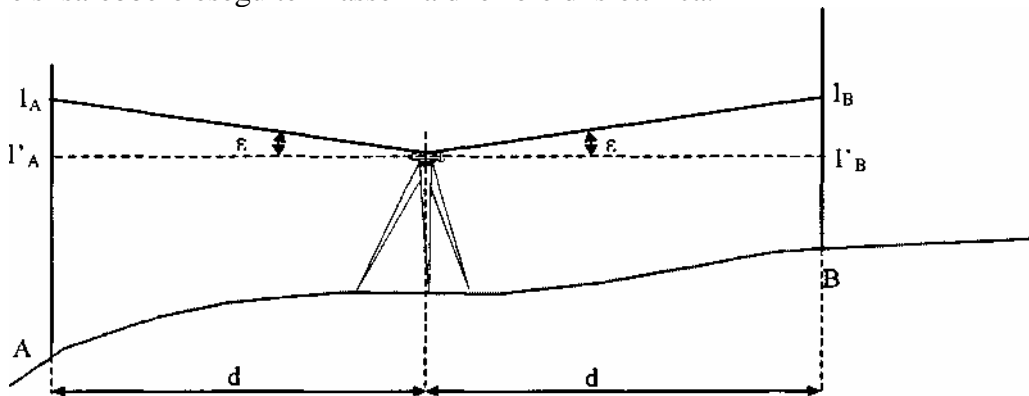


Fig. 5 - eliminazione dell'influenza dell'errore di rettifica con una battuta dal mezzo

In genere poiché ϵ è piccolo una differenza di qualche metro tra le distanze delle due stadi non comporta un sensibile errore nel dislivello, ma è opportuno, specie nelle livellazioni di alta precisione, verificare e correggere l'errore di srettifica.

I livelli si rettificano mediante l'esecuzione di due battute di livellazione che permettono il calcolo dell'errore di rettifica e nel seguente modo:

- > dati due punti A e B, sui quali sono poste due stadi, ad una distanza di 60-70 m, si effettua una battuta di livellazione dal mezzo per determinare, con il livello srettificato, il dislivello corretto D_{AB} (vedi Fig. 5).
- > si sposta poi il livello in una posizione prossima al punto A e si effettua una livellazione tra gli stessi punti, calcolando questo secondo dislivello $D'_{AB} = (I_A - I_B)$ che è differente dal primo,

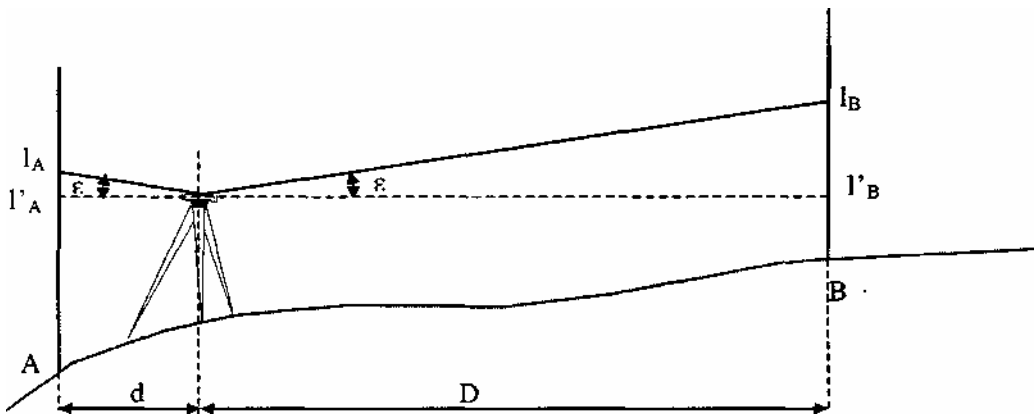


Figura 6 - rettifica di un livello

perché in B è concentrato tutto l'errore di srettifica del livello (vedi Fig. 6).

Data la modesta entità della distanza tra strumento e stadie, si può trascurare l'errore di curvatura e di sfericità in entrambi i punti e rimane soltanto l'effetto dell'errore residuo di srettifica nel punto più distante.

$$\Delta'_{AB} = l'_A - l'_B = (l'_A + \varepsilon d) - (l'_B + \varepsilon D)$$

$$\Delta'_{AB} = l'_A - l'_B - \varepsilon (D - d)$$

$$\Delta'_{AB} = \Delta_{AB} - \varepsilon (D - d)$$

da cui:

$$\varepsilon = \frac{\Delta_{AB} - \Delta'_{AB}}{D - d} \quad (1)$$

Se ε (espresso in **radianti**) risulta positivo vuoi dire che, come in Fig. 6, quando la bolla è centrata l'asse di collimazione è inclinato verso l'alto, mentre risulta inclinato verso il basso se il valore di ε risulta negativo.

Se il livello fosse stato rettificato, sulla stadia in B si sarebbe dovuta fare una lettura: $l_B = l'_B - \varepsilon D$. Calcolato pertanto l'errore εD che si commette nell'effettuare la lettura su B, si procede alla realizzazione della lettura esatta in B, agendo sulle viti di rettifica del reticolo.

3.2.2 - Autolivelli

Gli **autolivelli** realizzano automaticamente l'orizzontalità dell'asse di collimazione attraverso un meccanismo ottico - meccanico chiamato compensatore, non appena l'asse di rotazione della traversa sia stato posto sufficientemente prossimo alla verticale.

Gli schemi costruttivi adottati sono i più disparati e vengono chiamati ottici o meccanici a seconda che il reticolo sia solidale con il cannocchiale oppure mobile all'interno dello strumento.

Il compensatore è dotato di componenti sia ottiche che meccaniche.

Lo schema semplificato di funzionamento di un autolivello è riportato in fig. 7

Sia OR l'asse di collimazione orizzontale, e O sia il centro dell'obiettivo (in realtà secondo punto nodale); trascurando, per il momento, l'esistenza della lente di messa a fuoco e ipotizzando un oggetto puntiforme P posto praticamente a distanza infinita, l'immagine del punto si formerà in R.

Se vi è una rotazione α dell'asse di collimazione (al massimo di 0.5^{gon}), l'immagine del punto P si formerà in R'.

Per riportare l'immagine in R possiamo seguire due strade:

- > utilizzare un'asta rigida incernierata in C e avente all'altro estremo il reticolo R che alla rotazione α dell'asse di collimazione realizzi automaticamente una rotazione P dell'asta stessa (sistema meccanico); in questo caso è il reticolo che si sposta in R';
- > fare in modo che la radiazione luminosa sia sempre inviata da C a R anche in presenza di una rotazione α dell'asse di collimazione (sistema ottico).

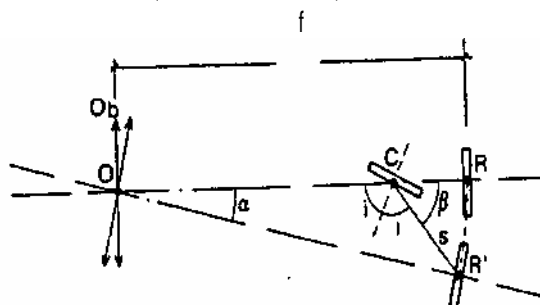


Figura 7- meccanismo di automazione dell'orizzontalità dell'asse di collimazione

La relazione tra le grandezze in gioco è assai semplice:

$$RR' = f \alpha \cong s \beta$$

$$\beta = \frac{f}{s} \alpha = n \alpha$$

In realtà la situazione è più complessa, soprattutto a causa della presenza del dispositivo di messa a fuoco.

Infatti alla condizione meccanica occorrerà aggiungere anche condizioni di natura ottica, imposte dal fatto che si usa una lente e che quindi la distanza tra il reticolo e l'obiettivo non è costante, ma dipende dalla distanza dell'oggetto dall'obiettivo.

Si consideri il punto P sull'orizzontale per O; l'immagine PO si forma alla distanza q data dalla prima formula fondamentale delle lenti:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \text{dove:} \quad \begin{array}{l} d = \text{distanza oggetto lente} \\ q = \text{distanza immagine lente} \\ f = \text{distanza focale della lente} \end{array}$$

Tenendo presente la predetta formula ed il seguente sviluppo:

$$\frac{1}{d \cos \alpha} + \frac{1}{q \cos \alpha} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{q \cos \alpha} = \frac{1}{f} \left(1 - \frac{f}{d \cos \alpha}\right)$$

E con riferimento alla Fig. 6

$$q \cos \alpha = m + l \cos \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{l \sin \beta}{m + l \cos \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{\tan \alpha}{l} (m + l \cos \beta) = \frac{\tan \alpha}{l} q \cos \alpha = \frac{\tan \alpha}{l} f \left(1 - \frac{f}{d \cos \alpha}\right)^{-1}$$

$$\beta \cong \frac{f}{l} \alpha \left(1 + \frac{f}{d}\right)$$

si ottiene così che l'angolo P di cui deve ruotare il braccio è funzione sia di a che di d . I dispositivi pendolari sono tali da imporre al braccio / la rotazione β , corretta per $d = \textit{infinito}$.

$$\beta^* = \frac{f}{l} \alpha,$$

che è funzione solamente dell'angolo di rotazione a .

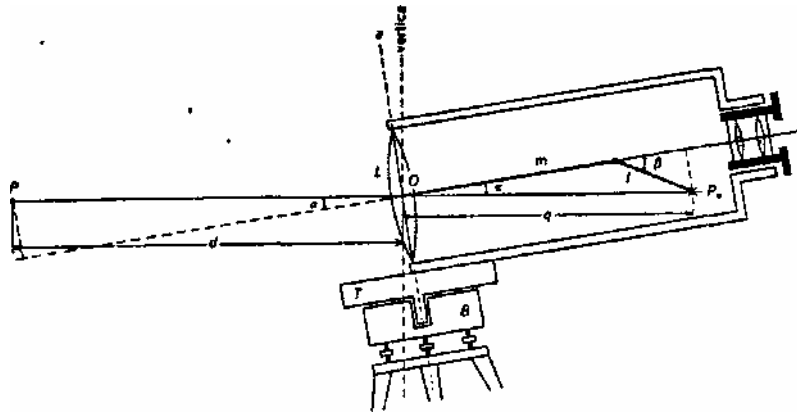


Fig. 8 - Condizioni ottiche in un livello autolivellante

Ne deriva dunque un errore di orizzontalità dipendente dalla distanza dal punto collimato, in quanto la rotazione totale necessaria è:

$$\beta = \beta^* + \frac{f^2}{ld} \alpha$$

La rotazione aggiuntiva può essere evitata, senza peraltro introdurre un errore sistematico, impiegando un cannocchiale centralmente anallattico, e ponendo il fuoco anteriore dell'obiettivo risultante sull'asse di rotazione a dello strumento. (Si ricorda che un cannocchiale anallattico è fornito di una lente convergente che *realizza* una lente obbiettivo risultante avente il fuoco anteriore in un punto prefissato del cannocchiale).

Un compensatore è comunque definito da tre elementi:

1. un elemento fisso (prisma ottico)
2. un elemento mobile (pendolo), che fornisce la direzione della verticale o dell'orizzontale
3. un dispositivo per lo smorzamento delle oscillazioni del compensatore, che può essere ad aria magnetico.

Pertanto gli autolivelli si distinguono a seconda del tipo di compensatore adottato e a seconda del sistema ottico di trasporto delle radiazioni luminose utilizzato, molteplici sono le soluzioni adottate dalle case costruttrici.

Si possono distinguere compensatori meccanici od ottico - meccanici a pendolo, e compensatori a liquido: i primi forniscono la direzione della verticale, poi legata all'orizzontale da schemi ottici, gli altri forniscono direttamente quest'ultima.

Il livello Na della Askania monta un compensatore a pendolo così concepito:

l'immagine proveniente dall'obbiettivo è intercettata da uno specchio disposto a 45°; al di sopra vi è un prisma rettangolare che forma con lo specchio un sistema a doppia riflessione; se l'asse del livello è orizzontale, le facce del prisma e dello specchio sono parallele e paralleli saranno anche i raggi incidente ed emergente.

Se l'asse di collimazione del livello forma con l'orizzontale un piccolo angolo α allora il compensatore formato da pendolo e specchio rinvierà l'immagine alla faccia del prisma, non più a esso parallelo, deviata di α (vedi fig. 9). Il raggio emergente sarà deviato di 2α e ricadrà sul reticolo in R. Lo smorzamento qui è pneumatico, cioè dovuto all'aria contenuta nel pozzetto in cui è contenuto il pendolo.

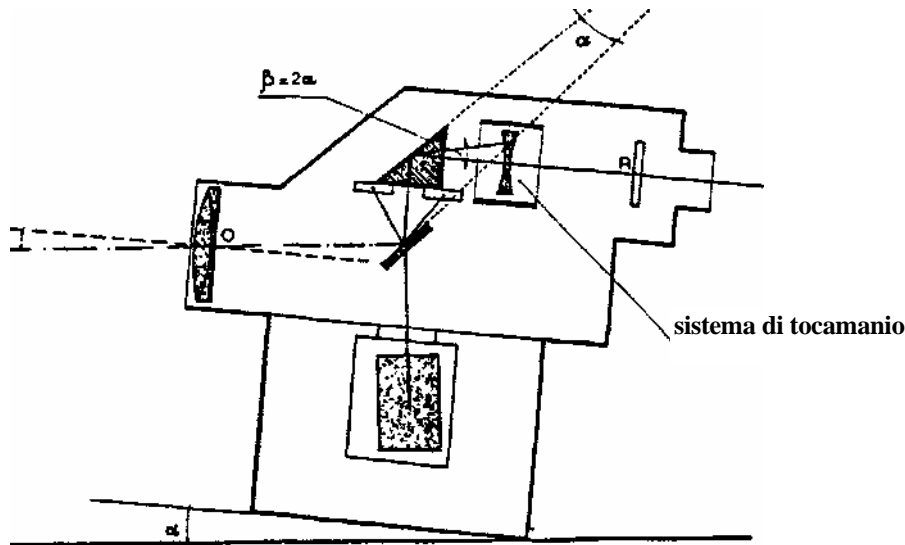


Figura 9 - Schema di livello Askania

Altre case costruttrici utilizzano un compensatore analogo ma con smorzamento magnetico (Autom della ditta Breihaupt).

Inoltre è possibile utilizzare un pendolo rovescio (astatico) invece che dritto (BNA della ditta Ertel). L'angolo β , dato dalla rotazione della struttura elastica, secondo le equazioni di elasticità è data da:

$$\beta = \alpha \frac{1 - l \cos(N / EJ)^2}{1 - \cos(N / EJ)^2}$$

in cui l è la lunghezza dell'asta, avente momento d'inerzia J e modulo di elasticità E , ed N è il carico di punta, (vedi fig.8).

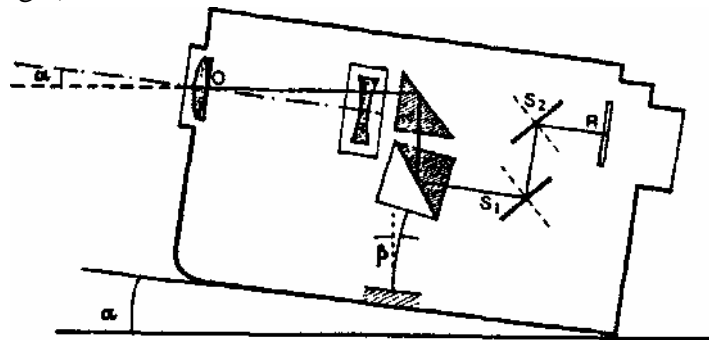


Fig. 10 - Schema di livello con pendolo astatico La Kern (ora Leica)

ha costruito i livelli GKO-A, GK1-A e GK2-A, basati su sistemi diversi.

Il principio che schematicamente è il più semplice è quello adottato nell'auto livello GK1-A della Kern, che utilizza uno specchio (S in Fig. 11) incernierato al corpo del cannocchiale che rimane sempre verticale, e che è posto a metà della lunghezza focale del sistema obiettivo.

L'immagine viene deviata di un angolo uguale e contrario all'inclinazione dell'asse di collimazione del cannocchiale, e, messa a fuoco sul reticolo R , viene da qui portata opportunamente all'oculare. Il cannocchiale è a lunghezza costante, così che è presente nel percorso ottico una lente divergente che serve a mettere a fuoco l'immagine, cioè a portarla sul piano del reticolo. Ogni meccanismo compensatore deve essere estremamente sensibile per essere altrettanto preciso; ne deriva che le oscillazioni del sistema compensatore potrebbero durare anche parecchi secondi;

per ovviare a ciò questi sistemi sono dotati di organi di smorzamento che sfruttano le proprietà di un liquido viscoso, un gas od un attrito magnetico.

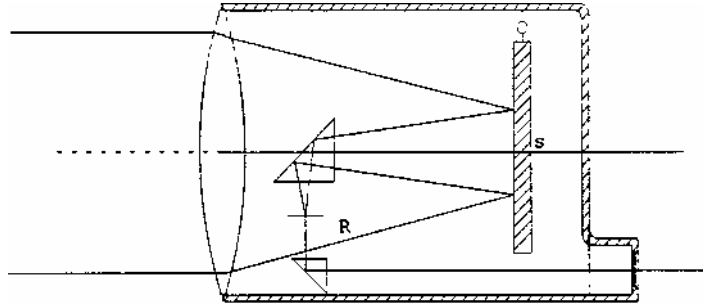


Figura 11 - Principio di funzionamento dell' autolivello Kern GK1-A

Il dispositivo compensatore entra normalmente in azione per piccole inclinazioni dell'asse di collimazione del cannocchiale. Sarà quindi sempre necessario rendere orizzontale la traversa grazie ad una livella sferica ad essa solidale (in questi strumenti è ovviamente assente la livella torica).

Di solito è possibile far oscillare volutamente il sistema compensatore attraverso un bottone esterno opportunamente situato sullo strumento. Questa operazione viene fatta saltuariamente per verificare l'efficienza del compensatore.

Vi sono infine dei compensatori ottici che deviano l'asse di collimazione grazie ad un pendolo diritto costituito da una piccola asta flessibile, sulla quale è posta come massa un prisma riflettente, (vedi fig. 12)

Tutti questi compensatori impongono l'orizzontalità dell'asse di collimazione con s.q.m. che varia da $\pm 0.1''$ a $\pm 2''$; più avanti faremo una distinzione di questi strumenti in funzione della precisione globale della procedura di livellazione geometrica.

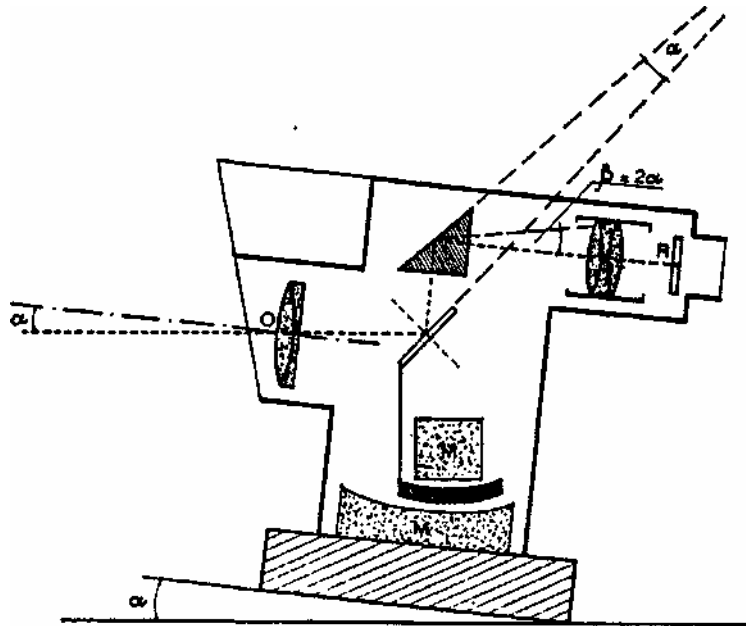


Fig. 12 - Compensatore ottico a pendolo diritto

3.2.3. Livelli elettronici

Nello sviluppo dell'automazione dei livelli, si è giunti anche alla realizzazione di strumenti con lettura a scansione elettronica, in cui cioè la misura è realizzata senza che l'operatore debba leggere sulla stadia.

Il principio generale consiste nell'utilizzo di appositi rilevatori sensoriali che sostituiscono l'occhio dell'osservatore nell'apprezzamento della graduazione della stadia: si tratta di un dispositivo rilevatore, che rende possibile la misura automatica del dislivello e della distanza tra il punto di stazione dello strumento e la posizione della mira.

Dal punto di vista ottico - meccanico, i livelli digitali si basano su principi analoghi agli autolivelli, di cui si è discusso nel paragrafo precedente. Manca cioè la livella loricata di precisione, che caratterizza i livelli classici, mentre è invece presente un compensatore il cui funzionamento è basato su diversi principi già descritti.

Ci si occuperà allora delle caratteristiche ottico - elettroniche del sistema livello - stadia. Occorre infatti chiarire che di digitale ed elettronico vi è solo la lettura alla stadia.

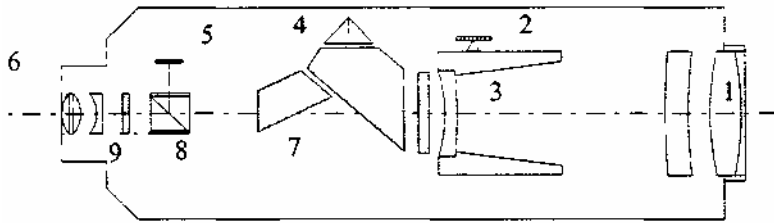
I meccanismi su cui è fondata la lettura delle stadiie nei livelli elettronici sono svariati, così come la relativa interpolazione, come del resto avviene per quanto riguarda i teodoliti elettronici. Non essendo possibile esaurire la trattazione, si faranno solo alcuni esempi.

In generale il principio di lettura della stadia è simile al principio di lettura di una sequenza di codici a barre, perciò le stadiie abbinata allo strumento sono stadiie sulle quali è incisa una particolare sequenza codificata. Lo strumento può tuttavia essere abbinato anche a tradizionali stadiie graduate.

Il percorso per la digitalizzazione delle misure dei dislivelli è stato più lungo di quello per automatizzare la misura delle distanze e degli angoli, forse perché lo strumento preposto a questo tipo di misura è composto da organi separati quali la stadia e il livello. Il primo progetto di livello digitale risale agli anni '60, ma per le prime realizzazioni pratiche bisogna arrivare sino agli anni '80, quando la Zeiss costruì un sistema in grado di leggere automaticamente le parti fini, mentre quelle più grosse venivano misurate dall'operatore per via ottica: la tecnologia dei CCD e l'introduzione delle stadiie codificate portarono alle prime realizzazioni commerciali. I livelli digitali Leica Wild NA2000 e NA3000 sono oggi molto diffusi: essi hanno le medesime caratteristiche ottiche e meccaniche di un normale autolivello; in questo modo possono essere utilizzati anche abbinati alle tradizionali stadiie graduate. Le stadiie in dotazione sono di legno centimetrato od in fibre ottiche; su queste sono incise da un lato le graduazioni in formato binario (a barre) e dall'altro le graduazioni in formato tradizionale.

In figura 13 è raffigurato lo schema del livello digitale Leica Wild NA2000.

L'apertura angolare del sistema ottico del livello è di 2° , dunque la massima lunghezza della stadia di 3,5 m è visibile a circa 100 m ed il minimo campo alla distanza focale minima di 1,8 m, corrisponde a circa 70 cm sulla stadia.



- 1 Obiettivo
- 2 Encoder di messa a fuoco
- 3 Lente anallattica
- 4 Spia di controllo compensatore
- 5 Acquisitore digitale
- 6 Oculare
- 7 Sistema compensatore
- 8 Divisore di immagine

Figura 13 - Schema del livello elettronico Leica Wild Na2000

Una matrice di diodi (che, come già osservato, sostituiscono l'occhio dell'osservatore) riceve l'immagine del codice a barre della stadia, (vedi Fig.14) dopo che è stata deviata da un prisma semiriflettente che provvede a separare la componente luminosa dalla componente infrarossa e riesce a derivare un segnale caratteristico.

Il rilevatore infatti trasforma l'immagine del codice a barre in un segnale video; tale segnale viene poi amplificato e digitalizzato con un convertitore analitico digitale per produrre un segnale di misura consistente in 256 pixels con dinamica da 8 bit, corrispondente a 256 valori di grigio.

Una procedura di correlazione all'interno del livello interpreta la forma di questo segnale riuscendo a stimare la distanza tra il livello e la stadia e contemporaneamente la lettura alla stadia.

Viene calcolata una distanza approssimata attraverso la lettura di un encoder che misura lo spostamento delle lenti di messa a fuoco dell'immagine.

Questa distanza d serve a stabilire approssimativamente una scala dell'immagine digitale ricevuta:

$$d = \frac{k}{s}$$

in cui k è una costante strumentale, mentre s è la posizione della lente di messa a fuoco.

L'immagine del codice a barre giunge attraverso le lenti ad un vettore di diodi ricevitori dopo essere passata da un prisma semi riflettente che devia una parte di luminosità (la componente infrarossa) su un sensore digitale particolarmente sensibile a questa componente e lasciando passare la parte visibile all'occhio umano.

Il segnale viene amplificato e digitalizzato ottenendo alla fine un segnale disponibile al processore che dovrà calcolare la lettura alla stadia.

Il sensore è costituito da un vettore di 256 fotodiodi spazati fra di loro di 25 mm per una lunghezza totale di 6,5 mm.

Il comportamento del compensatore durante la misura è registrato da un sensore elettronico.

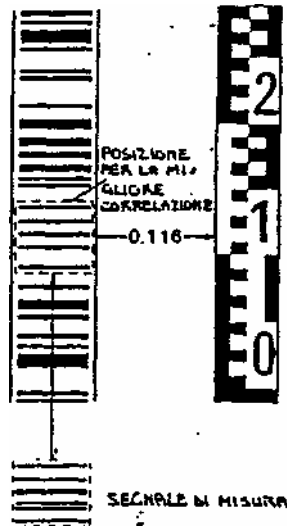


Figura 14 - Immagine di stadia codificato per il livello NA2000

La correlazione consiste nel comparare il segnale immagine del tratto di stadia con un codice di riferimento residente nel livello e preventivamente ridotto alla stessa scala.

La tecnica permette il calcolo dell'altezza e della scala.

Di fatto il processore calcola di quanto il segnale, corrispondente all'immagine della porzione di stadia, vada traslato a partire dall'origine (cui corrisponde la lettura 0 m sulla stadia) per poterlo far coincidere con il campione di riferimento esistente.

La scala da dare al codice memorizzato è proporzionale alla distanza livello - stadia.

La funzione di correlazione che lega questi due valori d ed h data da:

$$r(d, h) = \frac{1}{N} \sum_0^N Q(y) \cdot P(d, y + h)$$

dove: P è il segnale di riferimento Q è il segnale misurato

r è la funzione di correlazione da massimizzare.

N è la lunghezza con la quale si è discretizzato il segnale binario (256).

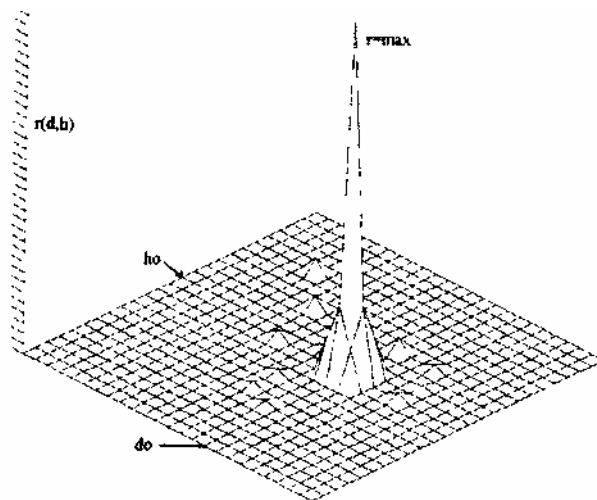


Fig. 15 - Massimizzazione della funzione di correlazione

La Fig. 15 mostra il tipico picco della funzione di correlazione bidimensionale; le coordinate del picco forniscono rispettivamente la distanza d e la lettura h alla stadia.

Per cercare il valore massimo di r considerando di usare un numero discreto di valori di (d, h) , occorre in teoria eseguire questi prodotti circa 50.000 volte con tempi di attesa inaccettabili.

Si ovvia a ciò con una correlazione fatta a due livelli, grossa e fine.

Già la distanza approssimata derivata dall'encoder interno cui si è già accennato, riduce dell'80% l'area di ricerca, le operazioni si riducono drasticamente limitando la dinamica del segnale da 8 bit ad 1 bit in quanto il prodotto $P \cdot Q$ consiste in una velocissima operazione binaria *exnor*¹ che consiste nel porre ad 1 il risultato del prodotto per P_i non è uguale a Q_i .

$$r(\tilde{d}, \tilde{h}) = r(i, j) = Q(j) \text{ exnor } P(i, j)$$

Di seguito è fornito un esempio di operazione *xnor*.

P=0011100011....00100

Q=1100110010.... 11100

r=000010111000111.

Il segnale di riferimento P nella espressione di sopra è ovviamente scalato e traslato in funzione di d e di h .

Ricavati i valori stimati di d ed h , la correlazione fine utilizza tutti gli 8 bit del segnale ma solo all'interno di una limitata area di ricerca.

Siccome l'ampiezza massima e minima del segnale ricevuto e quella del segnale di riferimento sono diverse a seconda della luminosità, la funzione di correlazione viene normalizzata all'interno dell'intervallo [0-1]. Ciò permette anche di capire se si è raggiunta statisticamente una buona correlazione. Viene utilizzata come funzione di correlazione l'espressione del coefficiente di correlazione lineare:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

da cui si ottiene:

$$r_{PQ}(d, h) = \frac{\frac{1}{N} \sum Q_i P_i - \bar{Q} \cdot \bar{P}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum Q_i^2 - \bar{Q}^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum P_i^2 - \bar{P}^2}}$$

La procedura di valutazione tiene conto, oltre che della distanza e del conseguente fattore di scala, anche del fatto che i pixels individuali del rilevatore mostrano una sensibilità trapezoidale alla luminosità: il segnale di riferimento allora, prima di essere correlato con il segnale fornito dal sensore lineare, è modificato da una convoluzione della funzione di codice con la funzione di sensibilità del rilevatore.

Il calcolo considera la possibilità di possibili oscuramenti di parte della stadia a causa di ostacoli che possono essere tollerati senza problemi per circa il 20% dell'immagine.

Se si desidera compiere le operazioni di rilievo in condizioni di luminosità artificiale occorre che lo spettro della luce comprenda anche le componenti infrarosse.

¹la funzione *xnor* è estremamente rapida: ad esempio l'operazione (è *xnor* ù) = F. Si ha infatti in termini binari:

è= 10001010 = carattere ASCII 138

ù= 10010111= carattere ASCII 151

T= 11100010 = carattere ASCII 226

Il valore massimo di $(x \text{ xnor } y)$ si avrà sempre quando $x = y$. Lo stesso ragionamento può essere esteso ai numeri di lunghezza superiore ad 1 byte=8 bit.

Il software interno permette di riconoscere anche dove sono localizzate zone dell'immagine coperte o contrastate da forti ombre.

È bene però che per l'affidabilità della misura queste zone non siano superiori al 20% dell'immagine.

Per discriminare in modo inequivocabile la zona oscurata sono necessari solo 70 mm di codice perciò al di sotto di 5 m di distanza non è possibile che la stadia sia coperta da alcun ostacolo Il livello NA3000 differisce dal livello NA2000 per la densità di ricerca nell'area fine che è maggiore di circa il 40%.

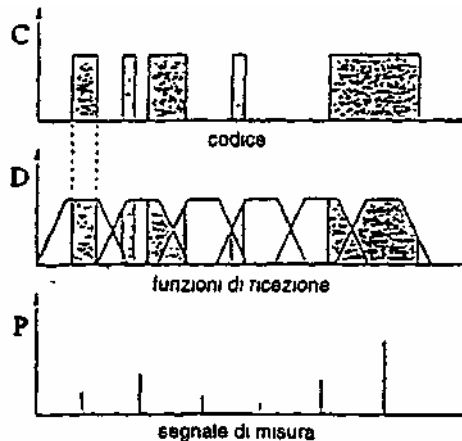


Fig. 16 - Convoluzione del codice con le funzioni di rilevazione

Nei livelli DL101 e 102 Topcon, la stadia ha un triplice codice che corrisponde ad altrettante informazioni. La prima parte è a tratti, distanti sempre 3 cm: i segnali corrispondono a variazioni di spessore di tali strisce.

Vi sono poi sulla parte laterale altre due informazioni, corrispondenti a segnali sinusoidali sfasati di $\pm\pi$ all'inizio della stadia, per permettere di non avere ambiguità di fase per la lunghezza della stadia. Dalla frequenza e dalla fase dei tre segnali si ottengono la distanza e la scala: la prima informazione si ottiene dalla frequenza del primo codice, che aumenta con l'aumentare della distanza. Una speciale trasformazione (Fast Fourier Transform) operata dal microprocessore acquisisce fase e frequenza dei tre segnali.

Nei livelli DiNi 10/20 di Zeiss, la porzione di stadia inquadrata è sempre pari a 30 cm indipendentemente dalla distanza tra stadia e livello. La stadia ha tratti in codice di 2 cm che costituiscono l'unità di misura da interpolare. L'operazione di misura prevede la stima della distanza tra stadia e livello mediante la valutazione del fattore di scala dell'immagine della porzione fissa di stadia proiettata dall'ottica sul sensore CCD.

Quindi mediante un semplice calcolo di interpolazione viene determinata la quota dell'asse di collimazione. Questi strumenti possono collimare stadie da 1.5 m a 100 m di distanza.

In generale l'impiego dei livelli digitali abbassa il tempo di esecuzione di una battuta di livellazione; inoltre è possibile eseguire direttamente il calcolo del dislivello, registrando i dati automaticamente e trasferendoli ad altro mezzo informatico.

Gli strumenti sono infatti dotati di un registratore che permette la memorizzazione delle letture eseguite alle stadie. Gli strumenti sono dotati anche di programmi di controllo strumentale o programmi per particolari misure (livellazione continua, livellazione raggiante ecc.)

Il programma "invert" permette ad esempio di usare lo strumento con stadie "inverse" cioè appese e non appoggiate a caposaldi di livellazione.

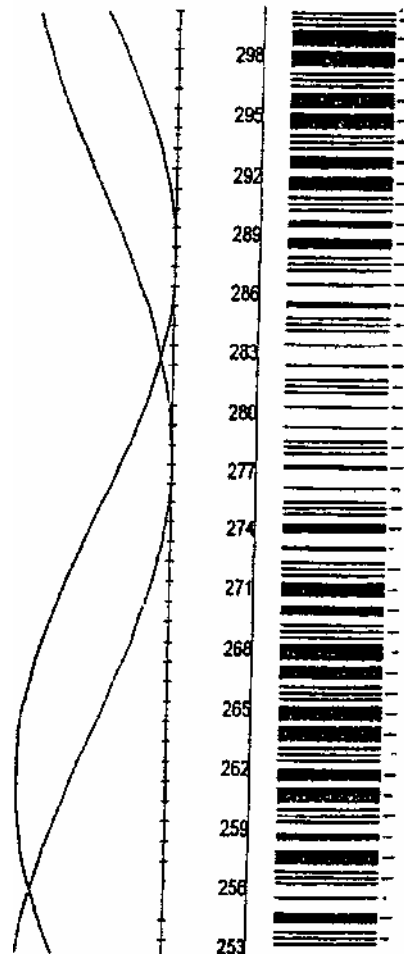


Figura 17- Stadia codificata Topcon

Nella tabella seguente, vengono riassunte le principali caratteristiche tecniche dei tre livelli digitali più precisi oggi presenti sul mercato:

Caratteristica	Leica NA3003	Zeiss DiNi10	Topcon DL101
Precisione con stadia in invar (mm/km)	0.4	0.3	0.4
Precisione misura della distanza (mm)	10	10	10
Precisione del compensatore	0.3"	0.2"	0.3"
Campo del compensatore	± 15'	± 15'	± 15'
Tempo di misura (s)	4	4	4
Campo di misura con stadia in invar (m)	1.8 ÷ 60	1.5 ÷ 100	2 ÷ 60
Peso (kg)	2.5	3	2.8