

Fondamenti di idraulica

idrostatica e idrodinamica

Giancarlo Dalla Fontana
Università di Padova

A.A. 2013/2014

Definizioni e unità di misura

FLUIDO: sostanza caratterizzata da una elevata mobilità delle particelle che la compongono. Reagisce elasticamente solo alle forze di compressione; scorre, cioè si deforma continuamente, sotto l'azione di altre forze, anche se di piccola entità.

I **LIQUIDI** sono fluidi che mantengono costante la distanza tra le molecole quindi hanno un volume praticamente invariabile, assumono la forma del recipiente che li contiene

Il Sistema Internazionale delle unità di misura (SI) utilizza come grandezze fondamentali la massa M, la lunghezza L e il tempo T:

[M] = kg (chilogrammo)

[L] = m (metro)

[T] = s (secondo)

Proprietà fisiche di un fluido

peso specifico (γ) è il peso dell'unità di volume $[\gamma] = \text{N m}^{-3}$

acqua pura a 4°C $\gamma = 9810 \text{ N m}^{-3}$

acqua torbida $\gamma = 10800 \div 11800 \text{ N m}^{-3}$

Densità o massa volumetrica (ρ): massa contenuta nell'unità di volume $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$

acqua pura $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$

fra le due grandezze sussiste la relazione

$$\gamma = g \cdot \rho$$

in cui $[g]$ è l'accelerazione di gravità.

Forze che agiscono su un fluido

FORZE DI VOLUME O A DISTANZA

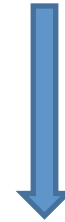
Agiscono su tutte le particelle di fluido come risultato di qualche causa esterna ma non in seguito a contatto diretto

ES: FORZA DI GRAVITÀ, FORZA CENTRIFUGA

FORZE DI SUPERFICIE

Agiscono sul fluido attraverso una superficie di contatto

ES. FORZA DI PRESSIONE, FORZA DI ATTRITO, VISCOSITÀ



VISCOSITÀ

Caratterizza il comportamento del fluido nei confronti delle resistenze che si oppongono al moto, in altre parole misura l'attrito interno di un fluido quindi la resistenza alla deformazione.

Viscosità dinamica ($\text{Pa} \cdot \text{s}$) per l'acqua a 20°C vale $0.001002 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

L'attrito interno dei liquidi è molto variabile con la temperatura ed è indipendente dalla pressione

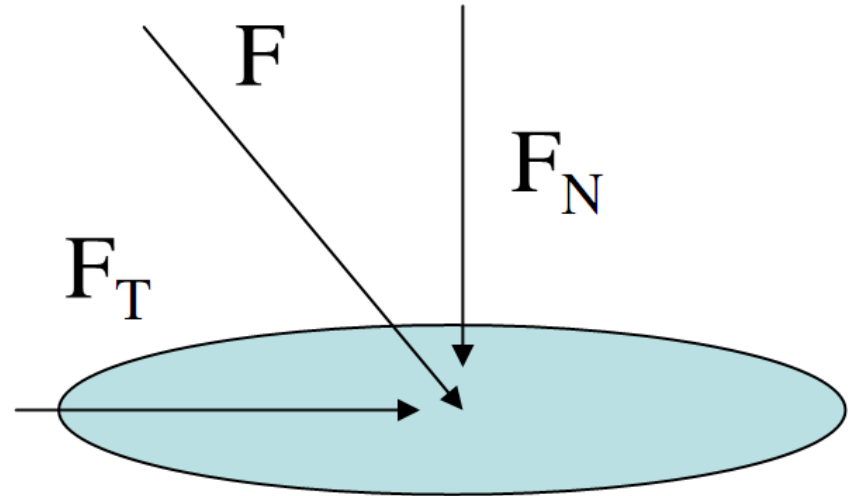
Forze che agiscono su un fluido

SFORZO: forza per unità di area. Dimensioni: N m^{-2}

$$f = \frac{F}{A} \quad \text{Sforzo}$$

$$p = \frac{F_N}{A} \quad \text{Sforzo normale (di pressione)}$$

$$\tau = \frac{F_T}{A} \quad \text{Sforzo tangenziale}$$



idrostatica

Studia le condizioni di equilibrio dei liquidi che si trovano nello stato di quiete. I liquidi in quiete non presentano azioni di viscosità e generano **solo sforzi normali** dovuti al loro peso

La **SPINTA IDRAULICA** P è la risultante delle forze esercitate da un liquido, per effetto del suo peso, su una superficie di area A

$$p = \frac{dP}{dA} \quad \text{pressione idraulica (Pa o N m}^{-2}\text{)}$$

	Atm	bar	m H ₂ O	Pa
Atmosfera	1	1.013	10.33	$1.013 \cdot 10^5$
Bar	0.987	1	10.19	10^5
m H ₂ O	$9.68 \cdot 10^{-2}$	$9.81 \cdot 10^{-2}$	1	9810
Pascal	$9.87 \cdot 10^{-3}$	10^{-5}	$1.02 \cdot 10^{-4}$	1

LEGGE IDROSTATICA

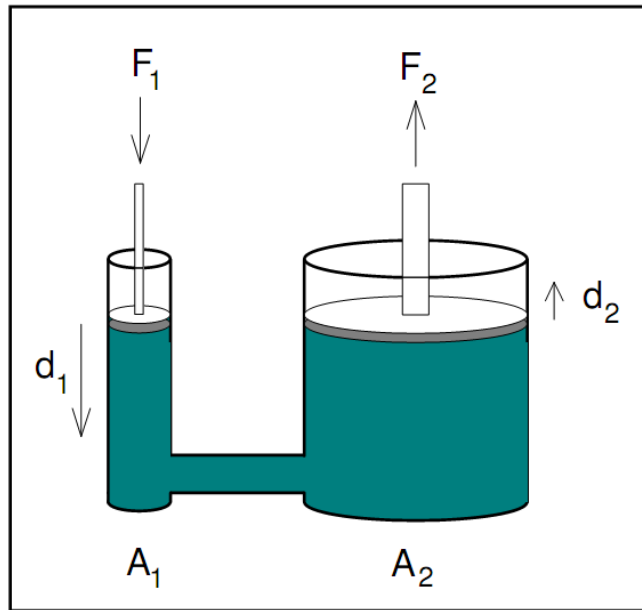
La pressione in un liquido in quiete varia dall'alto in basso con legge lineare:

$$p = \gamma h$$

$$h = \text{altezza piezometrica}$$

Tutti i punti di uguale quota h sono su piani orizzontali ad uguale pressione, cioè su isobare. La pressione è uguale in tutte le direzioni.

Idrostatica – principio di Pascal



Una forza F_1 verso il basso è applicata al pistone di area A_1 . Questa forza è trasmessa attraverso il liquido per generare una forza verso l'alto F_2 . Qual è il valore di F_2 ?

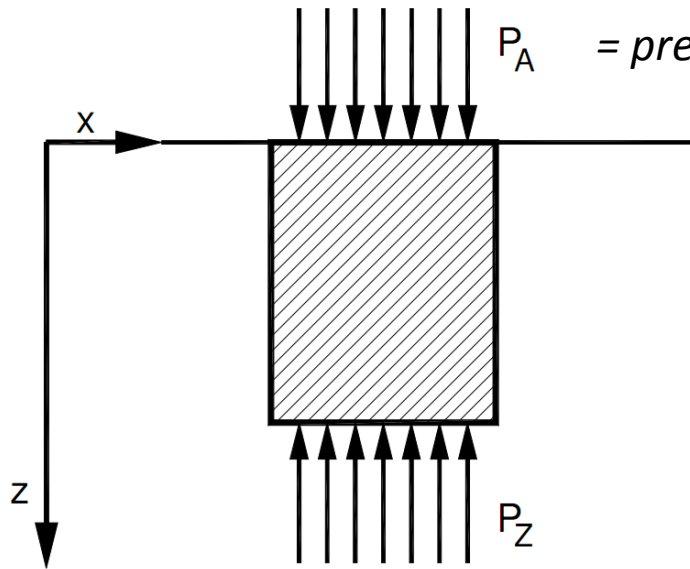
Il Principio di Pascal afferma che la pressione si trasmette inalterata: allora la stessa pressione deve essere esercitata sulle superfici A_1 e A_2 .

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

Pertanto:

La forza F_2 esercitata su A_2 può crescere di molto se l'area A_2 è molto più estesa dell'area A_1 .

Legge fondamentale dell'idrostatica



p_A = pressione atmosferica

$$p_A dA + \gamma Z dA = p_Z dA$$

$$p_Z = p_A + \gamma Z$$

$$p = p_Z - p_A = \gamma Z$$

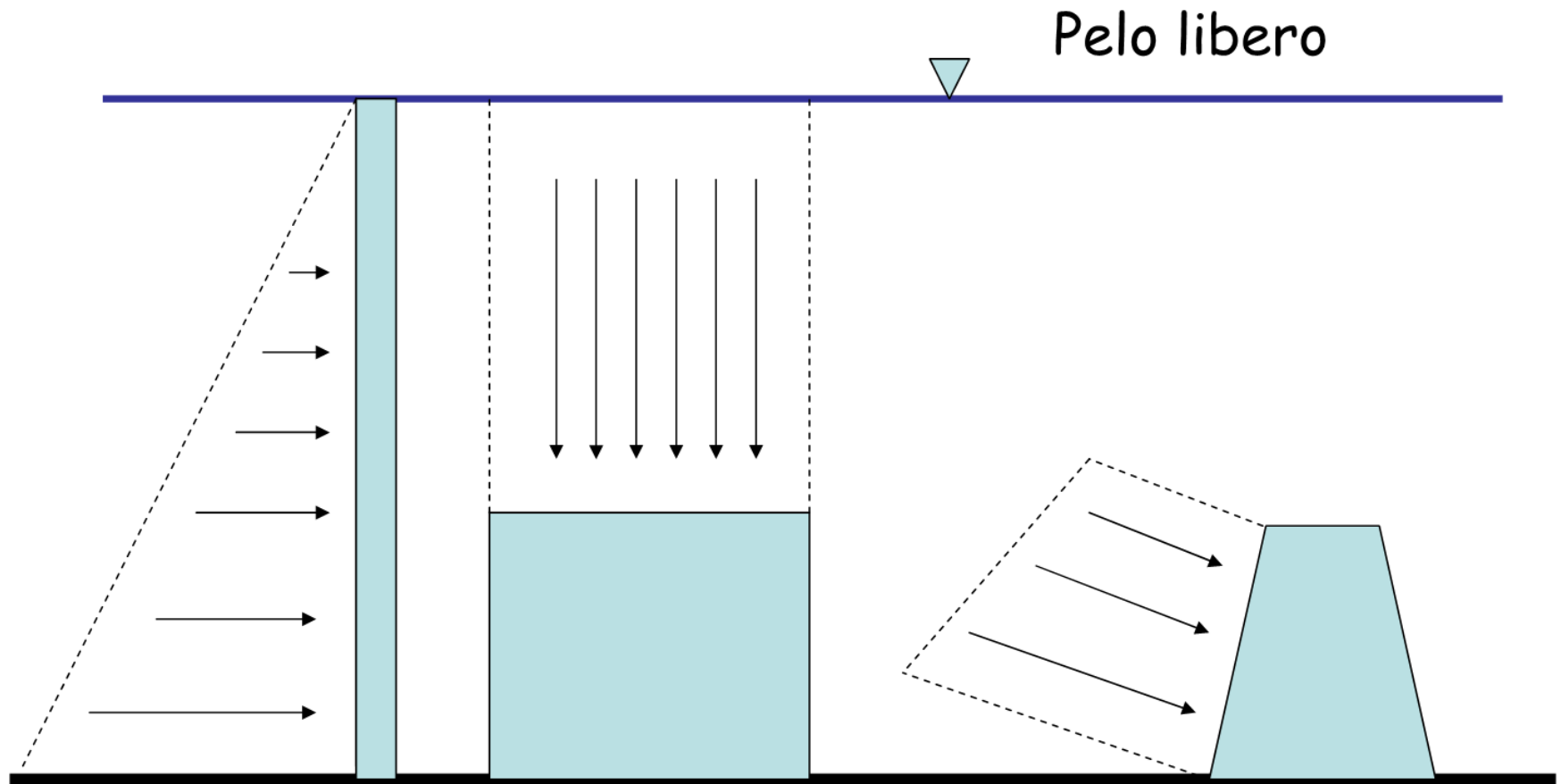


pressione relativa

La pressione varia con legge lineare in modo proporzionale all'affondamento del punto rispetto alla superficie esposta alla pressione atmosferica

Si considera la pressione relativa rispetto alla superficie su cui agisce la pressione atmosferica

Come agisce la pressione su varie superfici



L'azione è sempre perpendicolare alla superficie sommersa

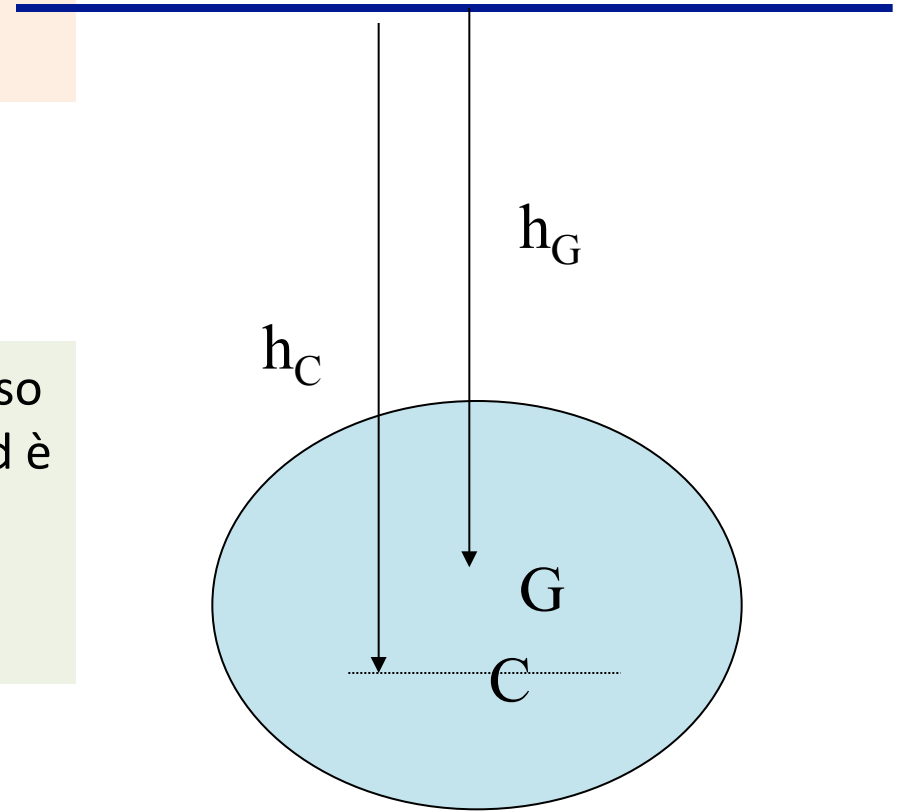
Spinta e Centro di spinta

La spinta è uguale al prodotto tra la pressione esercitata sul baricentro e l'area della superficie premuta

$$S_A = \gamma h_G A$$

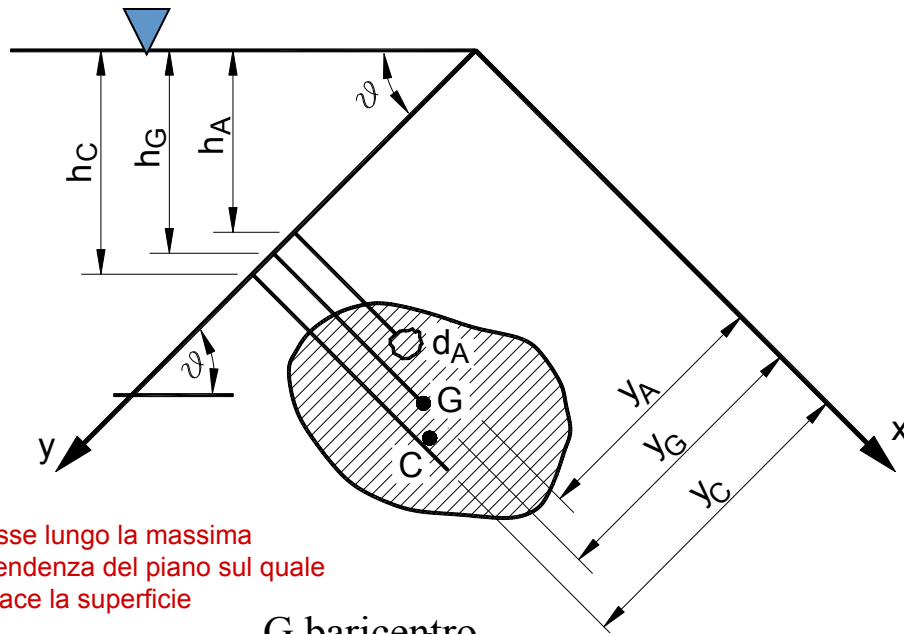
Il centro di spinta è collocato più in basso rispetto al baricentro della superficie ed è determinabile sulla base del momento d'inerzia della figura rispetto all'asse baricentrico (J_0)

$$h_C = \frac{J_0}{A h_G} + h_G$$



G baricentro
C centro di spinta

Spinta su parete piana generica



Asse lungo la massima
pendenza del piano sul quale
giace la superficie

G baricentro
C centro di spinta

Forza di pressione su dA
 $\gamma h_A dA \quad (y_A = h_A / \sin \vartheta)$

$$S_A = \int_A \gamma h_A dA$$

$$\int_A \gamma y_A \sin \vartheta dA$$

$$\gamma \sin \vartheta \int_A y_A dA$$

$$\int_A y_A dA = y_G A$$

L'integrale, pari al momento statico della superficie,
vale il prodotto dell'area per la distanza del
baricentro della superficie dall'asse di riferimento

$$S_A = \gamma \sin \vartheta A y_G$$
$$S_A = \gamma h_G A$$

La spinta è uguale al prodotto della **pressione sul baricentro**
per l'**area della superficie**

Centro di Spinta



Il centro di spinta rispetto al pelo libero è sempre situato più in basso del baricentro. Per determinarne la posizione si uguaglia il momento della spinta idrostatica a quello dell'integrale dei momenti delle spinte elementari

$$M = S_A y_C$$

$$M = \int_A (\gamma y_A \sin \vartheta) y_A dA = \gamma \sin \vartheta \int_A y_A^2 dA$$

$$\int_A y_A^2 dA = J_0 + A y_G^2$$



L'integrale delle spinte elementari è pari al momento di inerzia della superficie rispetto all'asse x e si può scrivere in funzione del momento di inerzia della superficie rispetto all'asse baricentrico (J_0)

$$S_A y_C = \gamma \sin \vartheta (J_0 + A y_G^2)$$

$$y_C = \frac{\gamma \sin \vartheta (J_0 + A y_G^2)}{\gamma \sin \vartheta y_G A}$$

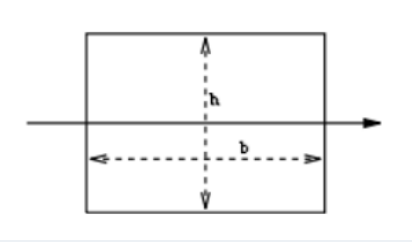
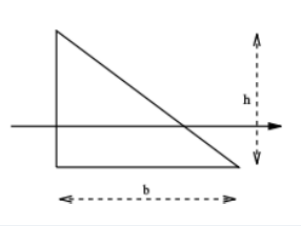
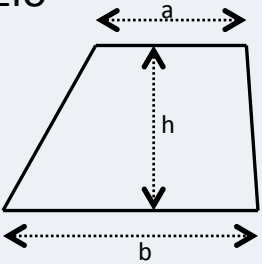


$$y_C = y_G + \frac{J_0}{A y_G}$$

$$h_C = y_C \sin \vartheta$$

Momenti di inerzia per alcune figure geometriche



figura	area	baricentro	momento di inerzia
rettangolo 	$A = b h$	$y = \frac{1}{2} h$	$J_0 = \frac{b h^3}{12}$
triangolo 	$A = \frac{1}{2} b h$	$y = \frac{h}{3}$	$J_0 = \frac{b h^3}{36}$
trapezio 	$A = \frac{1}{2} (a + b) h$	$y = \frac{h(2a + b)}{3(a + b)}$	$J_0 = \frac{h^3 (a^2 + 4ab + b^2)}{36(a + b)}$

Momenti di inerzia per alcune figure geometriche



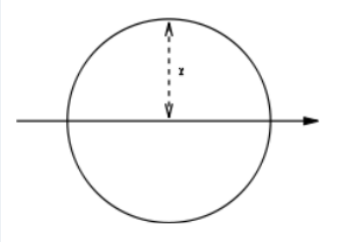
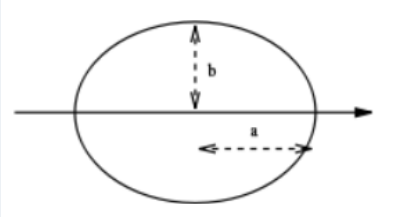
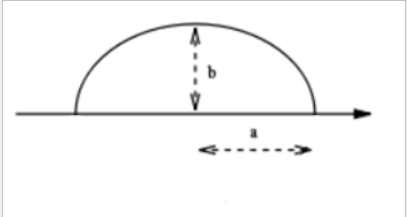
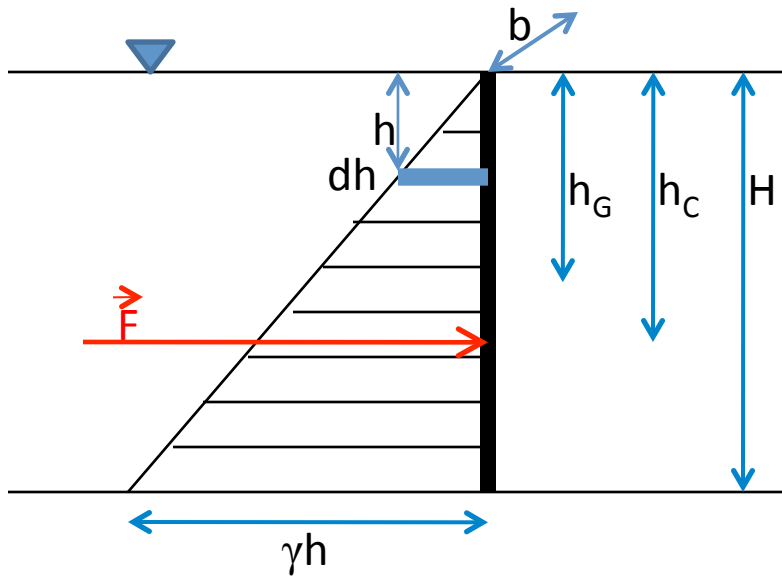
figura	area	baricentro	momento di inerzia
cerchio 	$A = \pi r^2$	$y = r$	$J_0 = \frac{\pi r^4}{4}$
ellisse 	$A = \pi b a$	$y = b$	$J_0 = \frac{\pi ab^3}{4}$
semiellisse 	$A = \frac{1}{2} \pi b a$	$y = \frac{4b}{3\pi}$	$J_0 = \frac{9\pi - 64}{72\pi} ab^3$

Diagramma delle pressioni



La pressione segue una variazione lineare con la profondità dal pelo libero.

Metodo grafico:

SPINTA = volume del solido di spinta x peso specifico (γ)

$$F = \frac{1}{2} (\gamma H) H b = \frac{1}{2} \gamma b H^2$$

La spinta passa per il baricentro del diagramma di spinta. Nel caso del triangolo $h_c = 2/3 H$ dal pelo libero

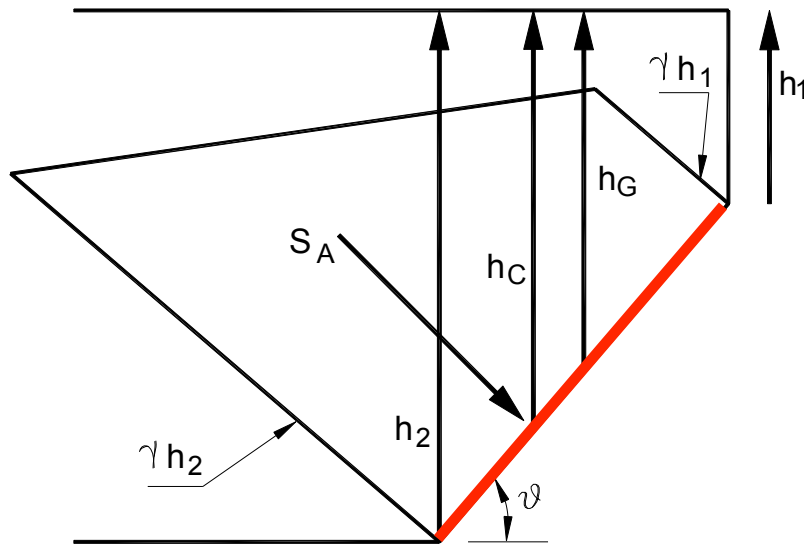
Sull'areola $\{b \, dh\}$ la spinta è $\{\gamma \, h \, b \, dh\}$ che può essere integrata sull'intera superficie di spinta:

$$F = \int_0^H (\gamma \, h) b \, dh = \gamma \, b \int_0^H h \, dh = \frac{1}{2} \gamma \, b H^2$$

E integrando il momento della spinta elementare $\{\gamma \, h \, b \, (H-h) \, dh\}$ rispetto al fondo:

$$M = F h_c = \int_0^H (\gamma \, h) b \, (H-h) \, dh = \gamma \, b \frac{H^3}{6} = \frac{1}{2} \gamma \, b H^2 \frac{H}{3} \quad h_c = \frac{F h_c}{F} = \frac{H}{3}$$

Geometria del solido di spinta



La spinta è uguale al peso del volume definito dal solido di spinta. Il solido di spinta è pari al prodotto dell'area del trapezio che definisce l'andamento delle pressioni per la larghezza

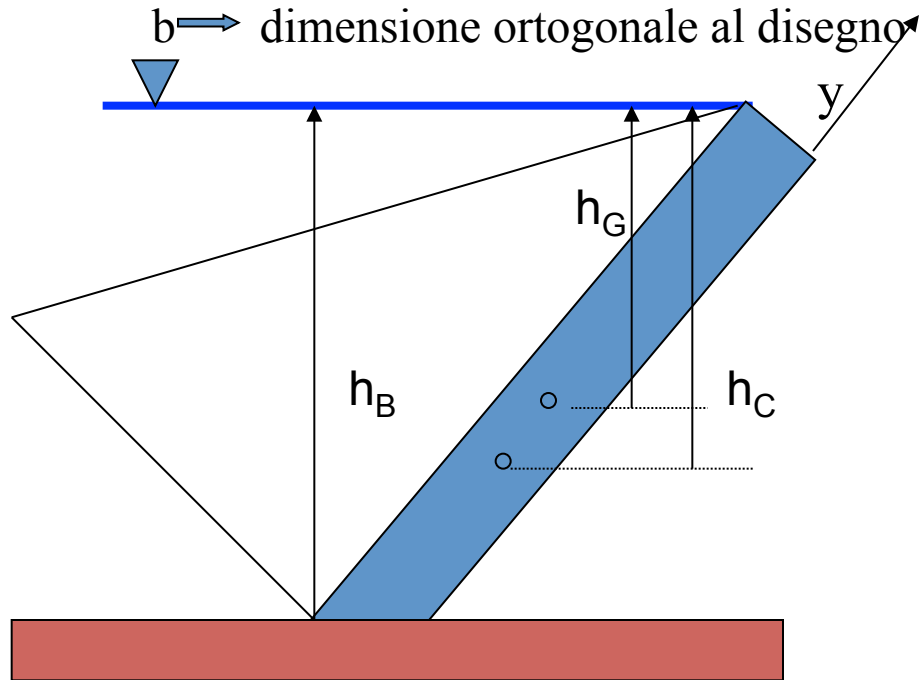
$$S_A = \gamma \frac{(h_2 + h_1)}{2} \frac{(h_2 - h_1)}{\sin \vartheta} b$$

← Area del trapezio →

La spinta passa per il baricentro del diagramma delle pressioni, quindi il centro di spinta è calcolabile sulla base della formula per il baricentro del trapezio che definisce l'andamento delle pressioni

$$h_c = h_1 + \frac{(h_2 - h_1)}{3} \frac{(h_1 + 2h_2)}{h_1 + h_2}$$

Spinta su parete piana rettangolare



$$A = b \frac{h_B}{\sin \vartheta} \quad \text{Area della parete piana}$$

$$h_G = \frac{h_B}{2} \quad \text{Posizione baricentro}$$

$$S = \gamma h_G A = \gamma \frac{h_B}{2} b \frac{h_B}{\sin \vartheta}$$

$$S = \gamma h_G A = \gamma 0.5 h_B^2 \frac{b}{\sin \vartheta}$$

$$y_C = y_G + \frac{J_0}{A y_G}$$

$$y_C = (h_B / \sin \vartheta) / 2 + \frac{1}{12} \frac{b (h_B / \sin \vartheta)^3}{b (h_B / \sin \vartheta) (h_B / \sin \vartheta) / 2} = (2/3) h_B / \sin \vartheta$$

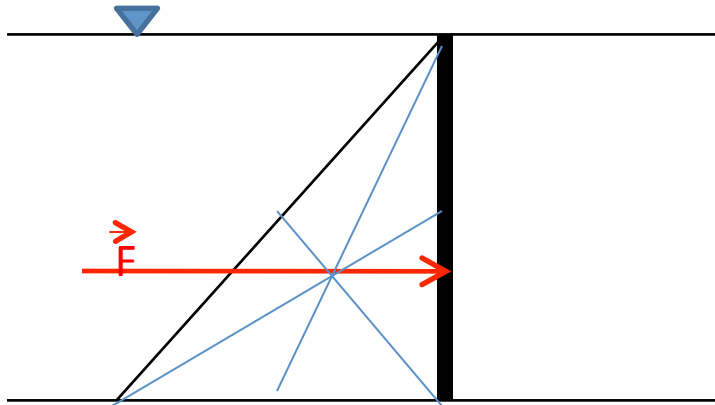
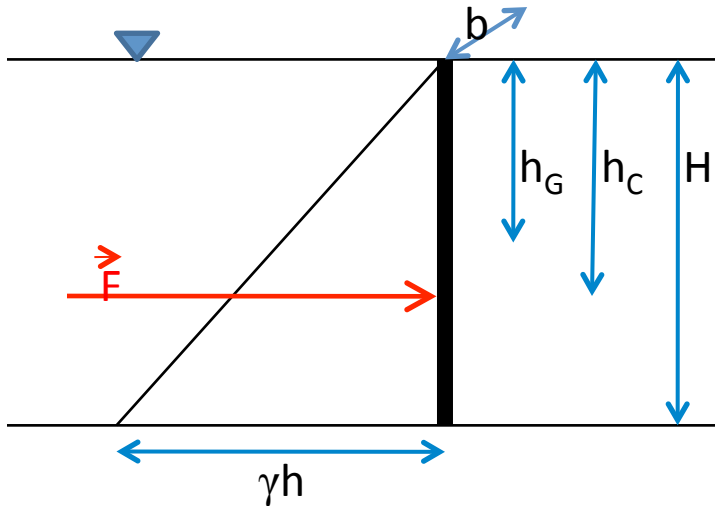
$$J_0 = \frac{b y^3}{12}$$

Per i momenti d'inerzia delle più comuni figure vedi tabella II.I del Benini

$$h_C = (2/3) h_B$$

Esempio di calcolo della Spinta e del Centro di spinta

Determinare la spinta sulla paratoia verticale a battente nullo di altezza $H = 3 \text{ m}$ e larghezza $b = 2 \text{ m}$. Calcolare inoltre la profondità del centro di spinta.



Metodo generale

$$\begin{aligned}\gamma &= 9810 \text{ Nm}^{-3} \\ h_G &= 1/2 H = 1.5 \text{ m} \\ A &= 3 \times 2 = 6 \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$S = \gamma h_G A$$

$$S = 88290 \text{ N}$$

Centro di spinta

$$J_0 = \frac{1}{12} b H^3 = 4.5 \text{ m}^4$$

$$h_c = \frac{J_0}{A + h_G} + h_G$$

$$h_c = \frac{4.5}{6 + 1.5} + 1.5 = 2 \text{ m}$$

Metodo grafico

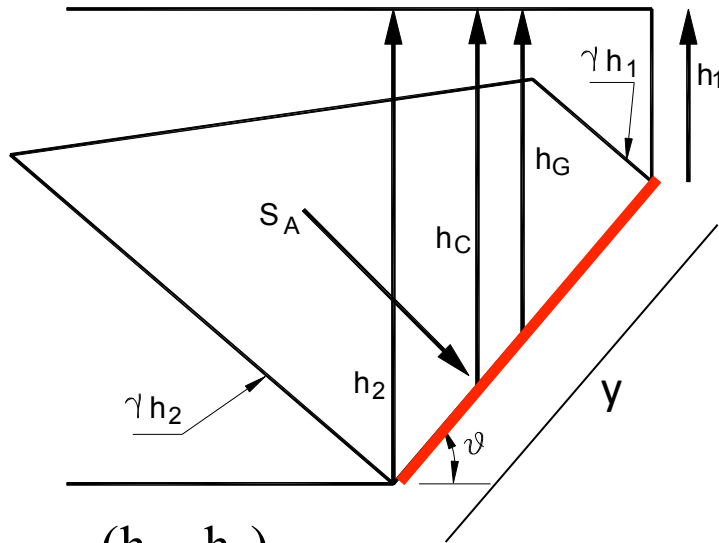
$$S = \frac{1}{2} \gamma b H^2 = 88290 \text{ N}$$

$$h_c = \frac{2}{3} H = 2 \text{ m}$$

Esempio di calcolo della Spinta e del Centro di spinta



Determinare la spinta sulla superficie piana, larga $b = 3\text{ m}$, con $h_1 = 1\text{ m}$, $h_2 = 3\text{ m}$, $\gamma = 9810\text{ N/m}^3$ e $\vartheta = 45^\circ$. Calcolare inoltre la profondità del centro di spinta.



$$y = \frac{(h_2 - h_1)}{\sin \vartheta} = 2.83$$

$$J_0 = \frac{by^3}{12} = 5.67$$

$$Ay_G = 24.02$$

Spinta S_A

$$h_G = h_1 + \frac{(h_2 - h_1)}{2} = 2\text{ m}$$

$$A = b \frac{(h_2 - h_1)}{\sin \vartheta} = 8.49\text{ m}^2$$

$$S_A = \gamma h_G A = 166574\text{ N}$$

Centro di spinta h_c

$$y_G = h_G / \sin \vartheta = 2.83\text{ m}$$

$$y_C = y_G + J_0 / Ay_G = 3.07\text{ m}$$

$$h_C = y_C \sin \vartheta = 2.17\text{ m}$$

Idrodinamica

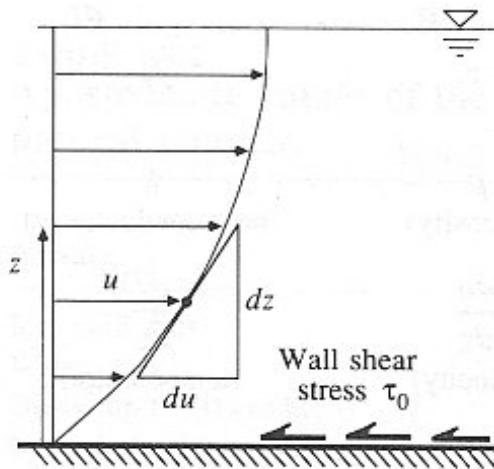
Una particella di fluido in moto è dotata di una certa velocità u funzione del tempo e delle coordinate del punto P che la particella occupa all'interno del campo fluido.

Quando un liquido si muove, accanto alle componenti normali si manifestano anche *componenti di sforzi tangenziali*, che sono comparabili ad *azioni di attrito interno* (tendono a diminuire le differenze di velocità tra particelle attigue).

Supponendo il moto per strati, con velocità gradualmente variabile nella direzione normale agli strati, gli strati più veloci tendono a trascinare quelli più lenti.

Tra due strati si sviluppa un'*azione tangenziale di trascinamento o resistente* τ che è proporzionale al gradiente della velocità u secondo la normale z agli strati.

Un fluido sollecitato da uno sforzo tangenziale risponde con una deformazione angolare in direzione dello sforzo



$$\tau = \frac{\vec{T}}{A} = \eta \frac{du}{dz}$$

Legge di Newton

I liquidi che soddisfano questa relazione vengono chiamati liquidi newtoniani (es. acqua) mentre quelli che non la rispettano sono detti non newtoniani o plastici (es. colata di fango)

Categorie di moto

MOTO VARIO

Gli elementi caratteristici del movimento, velocità e pressione, variano da punto a punto e per uno stesso punto da istante a istante. Si verifica tipicamente in transitorio (variazioni di portata).

MOTO PERMANENTE

Le particelle liquide, che successivamente vengono a passare per uno stesso punto, seguono tutte la stessa traiettoria ed in quel punto hanno tutte la stessa velocità e sono soggette alla stessa pressione. E' la categoria di moto che si incontra più frequentemente in pratica.

MOTO UNIFORME

Le singole particelle mantengono invariate le proprie velocità lungo le rispettive traiettorie

Si possono considerare monodimensionali o lineari quei moti nei quali le traiettorie costituiscono un fascio di linee praticamente parallele (una dimensione prevale nettamente sulle altre). In tal caso possiamo parlare di **CORRENTI**:

- GETTI
- CORRENTI IN PRESSIONE

➤ **CORRENTI A PELO LIBERO**